THEORIE ERGODIQUE DE L'EQUIREPARTITION

J. COLIOT

I - REPARTITION ASYMPTOTIQUE DES SUITES ET ERGODICITE

I.0 - INTRODUCTION -

Dans la pratique, de nombreuses "mesures asymptotiques" sont introduites naturellement par des procédés ergodiques qui les rendent invariantes pour un semi-groupe de transformations ponctuelles G. Les plus classiques sont, sans doute, celles qui sont invariantes par translation sur un groupe compact (mesures de Haar) : elles sont rattachées à la notion d'équirépartition des trajectoires des points dits ergodiques .
Ces trajectoires s'identifient précisément à une fonction définie sur le semi-groupe G et qui possède pour mesure asymptotique relativement à un filtre de mesures sur G, la mesure de Haar normalisée.

Avant d'aborder quelques problèmes plus généraux au chapitre II, nous avons en vue, ici au chapitre I, d'étudier assez systématiquement les problèmes d'équirépartition des suites (s_n) dans un groupe compact $\mathbb{T}$. Nous nous situons donc dans un quadruplet $\left(\mathbb{N}, \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\delta_n, \mathbb{T}, (s_n)\right)$.

Les divers résultats du chapitre I s'appliquent à ce cas, en particulier, tout ce qui concerne le problème des prolongements des mesures est directement utilisable. Nous avons vu comment la mesure asymptotique est entièrement définie par ses valeurs sur un ensemble d'unicité, les fonctions continues bornées, par exemple, ou une partie dense d'entre elles tout au moins. Ces valeurs coïncident avec une notion de moyenne : Il s'agit maintenant de savoir a priori si ces moyennes existent.

Ce chapitre I , assez technique, a donc pour but de dégager des critères d'existence de moyennes à l'aide de la théorie ergodique d'Eberlein qui fournit elle-même des critères d'ergodicité du semi-groupe G et de certaines fonctions continues : nous dégageons, ainsi de nouveaux critères d'équirépartition.

Donc, dans un premier temps, nous précisons certains aspects de l'équirépartition de suites sur des sous-groupes (Cf. I.3).

Dans un second temps, nous caractérisons l'équirépartition d'une suite par des propriétés sur une famille de permutations des entiers (Couot [6]).

Dans un autre contexte, nous savons par un théorème de J. Von Neumann (Cf. Yorke) que sur un espace métrique compact, avec distance d, deux suites (a_n) et (b_n), ayant même ensemble de points d'accumulation, peuvent être mise en correspondance biunivoque, $a_n \rightsquigarrow b_{\pi(n)}$, de telle sorte que $d(a_n, b_{\pi(n)})$ tende vers zéro quand n tend vers l'infini. On sait également qu'une suite dense sur $[0,1]$ peut être remaniée (Halmos) par une permutation pour en faire une suite équirépartie. Nous caractérisons ici plus précisément avec la notion de famille de permutations réordonnantes (Cf. paragraphe 1.4) des permutations conservant l'équirépartition d'une suite.

Enfin, nous indiquons une nouvelle formule d'erreur pour l'intégration à l'aide des suites et l'appliquons (paragraphe 1.5) à des résultats de travaux antérieurs (Cf. Couot [1] et [2]) qui effectuaient une étude fine de l'équirépartition des suites $(n\theta)$ et $(n\Theta)$.

Commençons maintenant (1.1) par faire quelques rappels de la théorie ergodique d'Eberlein et indiquons comment l'équirépartition peut s'y ramener.

1.1 - RAPPELS : THEORIE ERGODIQUE DE W.F. EBERLEIN ET EQUIREPARTITION DES SUITES SUR UN GROUPE -

1.1.1 - Théorème ergodique -

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel topologique localement convexe. Dans $\mathcal{L}(\mathcal{E})$, l'espace vectoriel sur les réels des transformations linéaires continues de $\mathcal{E}$, on considère un semi-groupe G pour le produit de composition des transformations : $G \subset \mathcal{L}(\mathcal{E})$.

Les combinaisons linéaires convexes des éléments de G engendrent un nouveau semi-groupe G^* de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$.

Pour tout élément x de $\mathcal{E}$, on introduit son "orbite" par G^* dans $\mathcal{E}$:

$$G^*x = \{Ux;\ U \in G^*\}.$$

G^*x est un convexe de $\mathcal{E}$ invariant par G^* et sa fermeture $\overline{G^*x}$ conserve cette propriété.

Définition 1 -

On appelle "système d'intégrales presque invariantes" pour G (s.i.p.i) une suite généralisée (S_α) telle que :

1) $\forall \alpha$, $S_\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$;

2) $\forall \alpha$, $\forall x \in \mathcal{E}$, $S_\alpha x \in \overline{G^c x}$;

3) La famille (S_α) est équicontinue;

4) $\forall x \in \mathcal{E}$, $\forall T \in G$,

$$\lim_\alpha (TS_\alpha x - S_\alpha x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_\alpha (S_\alpha Tx - S_\alpha x) = 0.$$

Définition 2 -

On dit que G est ergodique s'il existe un s.i.p.i.

Remarques :

- G^* est ergodique si G l'est.

- 3) est vérifié lorsque S_α appartient à G^* et lorsque G est équicontinu.

- Dans ce dernier cas, 4) seul reste à vérifier : c'est là le coeur même de la notion de s.i.p.i.

- Il suffit que 4) soit vrai sur un ensemble (fondamental) de $\mathcal{E}$ (la fermeture linéaire coïncide avec $\mathcal{E}$).

- Lorsque les S_α commutent avec G, les deux limites de 4) coïncident.

Théorème ergodique d'Eberlein -

Soit G un semi-groupe ergodique sur $\mathcal{E}$ et (S_α) un s.i.p.i.

S'il existe un x dans $\mathcal{E}$ pour lequel l'une des propriétés ci-dessous est vérifiée, alors les trois autres le sont aussi :

1') $\exists\, y$ de $\overline{G^{*}_{x}}$ tel que $\forall T \in G$, $Ty = y$;

2') $\exists\, y$ tel que $y = \lim\limits_{\alpha} S_\alpha x$.

3') $\exists\, y$ qui soit limite faible dans $\mathcal{E}$ de $(S_\alpha x)$.

4') $\exists\, y$ qui soit point d'accumulation faible de $(S_\alpha x)$.

W.F. Eberlein démontre, en particulier, 4') $\Longrightarrow$ 1') à l'aide du résultat suivant de Mazur : tout ensemble convexe fortement fermé est faiblement fermé. Ainsi, le y de 4') est dans $\overline{G^{*}_{x}}$.

Définition 3 -

Pour un semi-groupe ergodique G sur $\mathcal{E}$, un élément x de $\mathcal{E}$ possèdant les propriétés ci-dessus du théorème est dit ergodique.

On constate que si $x \in \mathcal{E}$ est ergodique, il existe un unique y donné pour n'importe quel s.i.p.i par $\lim\limits_{\alpha} S_\alpha x$; on l'appellera G-moyenne de x.

1.1.2 - Propriétés des éléments ergodiques d'un Banach.

Sur un Banach $\mathcal{E}$, les éléments ergodiques forment un sous-espace de Banach Γ, invariant par G. La transformation de G-moyenne, soit S_∞, qui associe à $x \in \Gamma$ l'élément y du théorème ergodique, est linéaire continue; c'est une projection, elle satisfait les relations :

$$U \in G^{*}, \quad S_\infty^2 = S_\infty = S_\infty U = U S_\infty .$$

Pour qu'un élément $x \in \mathcal{E}$ soit ergodique, il suffit que l'un des ensembles $\overline{G^{*}x}$, $(S_\alpha x)$ ou $\{Tx ; T \in G\}$ soit faiblement conditionnellement compact.

Dans un Banach réflexif (ex : $L^p, \ell^p, p>1$), si G est équicontinu, tout élément est ergodique puisque les ensembles bornés sont faiblement conditionnellement compacts : $\Gamma = \mathcal{E}$.

Considérons maintenant le cas où G est le semi-groupe des itérées d'une transformation T de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$:

S'il existe K tel que $\| T^n \| \leq K$, on vérifie aisément que G est ergodique et que les transformations $S_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} T^n$ forment un s.i.p.i.

C'est encore vrai avec une condition plus faible :

il existe K tel que $\| S_N \| \leq K$ et pour tout x de $\mathcal{E}$, $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{T^N x}{N} = 0$.

Plus particulièrement, citons deux exemples de faible compacité conditionnelle de $(S_N x)$ lorsque $x \in L^1(\Omega;\mu)$ $(ou\ \ell^1)$:

- $\exists\, a, b \in L^1$ (ou ℓ^1) tels que $a \leq S_N x \leq b$;

- $\exists$ une transformation biunivoque de Ω, soit φ, conservant la mesure μ, telle que : $Tx = x \circ \varphi$.

I.1.3 - Eléments presque périodiques d'un Banach -

Il est possible d'établir une classification des éléments ergodiques x d'un Banach pour un semi-groupe ergodique G, d'après les propriétés des trajectoires $Gx = \{Tx ; T \in G\}$.

Définition 4 -

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des éléments ergodiques tels que Gx soit conditionnellement compact : on dit que ce sont les éléments "presque-périodiques" (p.p).

Définition 5 -

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des éléments ergodiques tels que Gx soit faiblement conditionnellement compact : on dit que ce sont les éléments "faiblement presque-périodiques" (f.p.p).

De façon générale, si G, non forcément ergodique, est borné, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{F}$ sont des sous-espaces de Banach invariants par G : $\mathcal{P} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{E}$.

En particulier, si G est borné et abélien, G est alors ergodique; on a :

$$\mathcal{P} \subset \mathcal{F} \subset \Gamma \subset \mathcal{E}.$$

I.1.4 - Equirépartition et mesure de Haar -

On considère un groupe abélien compact $\mathbb{T}$ dont le dual discret $\mathbb{T}^\wedge$ est séparable (Loomis). Soit μ sa mesure de Haar avec $\mu(\mathbb{T})=1$. On se place sur l'espace de Banach $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ des fonctions complexes continues définies sur $\mathbb{T}$. La topologie forte de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ est celle de la convergence uniforme.

On s'intéresse d'abord au groupe abélien G des translations, éléments de norme unité dans $\mathcal{L}[\mathcal{C}(\mathbb{T})]$. On constate aisément que ce groupe est ergodique, tout f de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ est ergodique et l'élément invariant par translation dans $\widetilde{G^* f}$ est la fonction constante de valeur $\int f \, d\mu$.

Nous noterons par T_s la translation $f \rightsquigarrow f(\cdot + s)$, $s \in \mathbb{T}$.

On sait que le groupe des caractères forme un ensemble fondamental de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$: nous les noterons par $\langle t', \cdot \rangle$, $t' \in \mathbb{T}^\wedge$.

Rappelons un énoncé généralisé (Eymard) du critère de Weyl relatif à l'équirépartition d'une suite (s_n) sur $\mathbb{T}$ (Cassels).

Définition -

On dit qu'une suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie dans , (e.r.), si pour tout $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$

$$(H) \qquad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(s_i) = \int_{\mathbb{T}} f \, d\mu \quad , (\mu = \text{mesure de Haar}, \mu(\mathbb{T})=1).$$

Théorème (Weyl) -

$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est e.r. dans $\mathbb{T}$ si et seulement si (H) est vérifiée sur un ensemble fondamental de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, en particulier, si et seulement si, pour tout caractère $t' \in \mathbb{T}^\wedge$ distinct du neutre

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \langle t', s_i \rangle = 0.$$

Remarque 1 -

Le théorème de Weyl est un corollaire de la théorie faite au chapitre 1: on considèrera le quadruplet $\left[\mathbb{N}, \left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\delta_n\right), \mathbb{T}, (s_n)\right]$ et on constatera que si la suite (s_n) est e.r. en tant que fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{T}$, elle possède la mesure de Haar pour mesure asymptotique.

Remarque 2 -

De façon plus générale, dans le cadre de la théorie d'Eberlein $S_\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ est obtenu à partir d'une combinaison convexe (C_α) d'éléments de G (le semi-groupe ergodique) : C_α est caractérisé par une suite finie de coefficients positifs de somme égale à 1.

Considérons le quadruplet ($G, (C_\alpha), \mathcal{L}(\mathcal{E}), I$), où I est l'application identique.

$\mathcal{L}(\mathcal{E})$ est complètement régulier.

Pour tout couple $x' \in \mathcal{E}', x \in \mathcal{E}$, on considère la fonction continue définie sur $\mathcal{L}(\mathcal{E})$: $T \rightsquigarrow \langle x', Tx\rangle$ ($\langle\ \rangle$ crochet de dualité sur $\mathcal{E}$).

Ainsi pour tout $x \in \Gamma$ (éléments ergodiques de $\mathcal{E}$) et $x' \in \mathcal{E}'$, on a l'existence de

$$\lim_\alpha \langle x', S_\alpha x\rangle.$$

Nous verrons au chapitre II, paragraphe II.2, que par le procédé de compactification de Čech, G peut être plongé dans un espace compact faisant de I une application régulière à l'infini.

$(G, (C_\alpha), \mathcal{L}(\Gamma), I)$ est un quadruplet pour lequel I possède une mesure asymptotique invariante par G , si G est ergodique et si Γ est l'espace vectoriel des éléments ergodiques.

1.2 - S.i.p.i ASSOCIES A UNE SUITE EQUIREPARTIE SUR UN GROUPE COMPACT -

1.2.1 - Equivalence des convergences ponctuelles et des convergences fortes -

Soit donc (s_n) une suite sur un groupe compact abélien $\mathbb{T}$.

Il est naturel d'introduire la famille $T_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} T_{s_i}$, $N=1,2,\ldots$ d'éléments de G^*, groupe des combinaisons convexes des translations.

Pour chaque f de $\mathscr{C}(\mathbb{T})$, la famille $(T_N f)$ est bornée et équicontinue donc fortement compacte. Pour qu'elle converge fortement, il suffit qu'elle converge faiblement, car tout point d'accumulation fort est alors la limite faible; il suffit encore qu'elle converge ponctuellement puisqu'elle est bornée :

Théorème 1 -

Pour que la suite (T_N) converge fortement dans $\mathcal{L}[\mathscr{C}(\mathbb{T})]$, il faut et il suffit que, pour chaque f de $\mathscr{C}(\mathbb{T})$, $(T_N f)$ converge ponctuellement.

Montrons qu'une suite (s_n) e.r. définit fortement la mesure de Haar μ sur $\mathscr{C}(\mathbb{T})$.

Théorème 2 -

Une suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie sur un groupe compact abélien $\mathbb{T}$ si et seulement si, pour tout f de $\mathscr{C}(\mathbb{T})$, ou tout au moins d'un ensemble fondamental de $\mathscr{C}(\mathbb{T})$, la suite $(T_N f)$ converge fortement vers la fonction constante de valeur $\int f d\mu$, mesure de Haar de f.

D'après la proposition, il suffit de vérifier que $(T_N f)$ converge ponctuellement vers $\int f d\mu$. Or ceci est une conséquence d'une part, du critère de Weyl appliqué à l'ensemble fondamental choisi, et d'autre part, du fait que pour tout s de $\mathbb{T}$, $T_s f$ est un élément de $\mathscr{C}(\mathbb{T})$.

I.2.2 - Equirépartition et s.i.p.i.

Enonçons un nouveau critère d'équirépartition (Couot [6]).

Théorème -

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite (s_n) soit équirépartie dans $\mathbb{T}$ est que la famille $T_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} T_{s_i}$, $N = 1, 2, \ldots$ soit un s.i.p.i. pour le groupe G des translations sur $\mathcal{C}(\mathbb{T})$.

Il reste à montrer que (T_N) est un s.i.p.i. et pour cela même, il suffit maintenant de vérifier l'une des propriétés de 4) puisque G est abélien. On peut encore se restreindre à un ensemble fondamental de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, le groupe des caractères, par exemple.

Or, pour $t \in \mathbb{T}$ et $t' \in \mathbb{T}^\wedge$, on a, avec $T_t \in G$,

$$\begin{aligned} T_N\, T_t \langle t', \cdot\rangle - T_N \langle t', \cdot\rangle &= T_N\left[\langle t', \cdot + t\rangle - \langle t', \cdot\rangle\right] \\ &= T_N\left[(\langle t', t\rangle - 1)\langle t', \cdot\rangle\right] \\ &= (\langle t', t\rangle - 1)\, T_N \langle t', \cdot\rangle \\ &= (\langle t', t\rangle - 1)\langle t', \cdot\rangle\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\langle t', s_i\rangle\right] \end{aligned}$$

Le dernier crochet tend vers 0, lorsque N tend vers l'infini, pour $t' \neq 0$.

Les caractères étant bornés, la convergence du premier membre vers 0 est uniforme. Enfin, le résultat est évident pour $t' = 0$: la condition est suffisante.
Comme, de plus, 4) entraîne la satisfaction du critère de Weyl pour les caractères, la condition est nécessaire.

Remarque .

Le théorème d'Eberlein confirme d'ailleurs le fait que la convergence ponctuelle de $(T_N f)$ équivaut à la convergence forte.

I.3 - EXEMPLES ET APPLICATION A LA DECOMPOSITION DES GROUPES ABELIENS -

I.3.1 - Ergodicité et sous-groupes -

On considère un sous-groupe strict $\mathbb{T}_o$, compact dans $\mathbb{T}$ et le groupe G_o des translations associées sur $\mathcal{C}(\mathbb{T})$. Ainsi, pour tout $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, la famille $(G_o f)$ est compacte : G_o est ergodique et tous les éléments de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ sont G_o-ergodiques : ils sont tous presque-périodiques.

Soit μ_o la mesure de Haar de masse unité sur $\mathbb{T}_o$.

Le théorème ergodique indique l'existence d'une projection S_∞ sur le sous-espace de Banach de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ invariant par G_o : pour tout f de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, il existe g de $\overline{G_o f}$, invariant par G_o, et tel que pour tout s.i.p.i (pour G_o), soit (S_α) : $g = \lim\limits_{\alpha} S_\alpha f = S_\infty f$.

Introduisons la décomposition de $\mathbb{T}$ en somme directe : $\mathbb{T} = \mathbb{T}_o \oplus \mathbb{T}/\mathbb{T}_o$; ainsi, pour $t \in \mathbb{T}$, il existe $t_o \in \mathbb{T}_o$ et $t^\circ \in \mathbb{T}/\mathbb{T}_o$ tels que $t = t_o + t^\circ$.

Il existe alors un $f^\circ \in \mathcal{C}(\mathbb{T}/\mathbb{T}_o)$ tel que $f^\circ(t^\circ) = g(t)$, pour tout t de $\mathbb{T}$; plus précisément :

$$f^\circ(t^\circ) = \int_{\mathbb{T}_o} f(t_o + t^\circ)\, d\mu_o.$$

Il vient $S_\infty f = g = \lim\limits_{\alpha} S_\alpha f = \int_{\mathbb{T}_o} f\, d\mu_o$ (puisque $\int_{\mathbb{T}_o} d\mu_o$ est un s.i.p.i).

I.3.2 - Ergodicité des suites $(n\theta)$.

On considère un nombre θ, $0 < \theta < 1$ et le tore à une dimension $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ soit $\mathbb{T}_o^1$ le sous-groupe de $\mathbb{T}^1$ engendré par θ. On vérifie aisément que la suite $(n\theta)\ (\mathrm{mod}\ \mathbb{Z}),\ n = 1, 2, \ldots$ introduit un s.i.p.i sur $\mathcal{C}(\mathbb{T}^1)$ pour le groupe G_o^1 des translations associées à $\mathbb{T}_o^1$.

Si θ est "irrationnel" $\mathbb{T}_o^1 = \mathbb{T}$ et la suite $(n\theta)(\mathrm{mod}\ \mathbb{Z})$ est équirépartie pour la mesure de Haar μ de $\mathbb{T}^1$:

pour $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^1)$, $\frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N} f(\cdot + n\theta)$ c.v. unif. vers $\int_{\mathbb{T}^1} f\, d\mu = \int_0^1 f(x)\, dx$.

Si θ est rationnel, $\theta = \frac{p}{q}$, $(p,q)=1$; alors $\mathbb{T}_o^1 \neq \mathbb{T}$ s'identifie au groupe fini : $\frac{1}{q}\left[\mathbb{Z}/_q\mathbb{Z}\right] \equiv \left\{0, \frac{1}{q}, \dots \frac{q-1}{q}\right\}$ et $\mathbb{T}/\mathbb{T}_o^1$ au groupe compact $\mathbb{R}/\frac{1}{q}\mathbb{Z}$ des classes résiduelles modulo $\frac{1}{q}$. Les sommes $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(s+i\theta)$ convergent uniformément, pour $s \in \left[0, \frac{1}{q}\right]$, vers la fonction

$$s \longrightarrow \frac{1}{q}\left[f(s) + f\left(s+\frac{1}{q}\right) + \dots + f\left(s+\frac{q-1}{q}\right)\right] \quad \left(\equiv \int f\, d\mu_o,\right.$$

où μ_o est la mesure de Haar sur $\mathbb{T}_o^1$: $\left.\mu_o \equiv \frac{1}{q}\sum_{i=0}^{q-1} \delta_{i/q}\right).$

1.3.3 - Ergodicité des suites $(n\Theta)$ et filtrage.

On considère maintenant le d-plet $\Theta \equiv \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d\}$, où $0 \leqslant \theta_i < 1$. Dans le groupe $\mathbb{T}^d \equiv \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$, tore à d dimensions, la suite $(n\Theta)$ (modulo $\mathbb{Z}^d$) engendre un sous-groupe dont la fermeture $\mathbb{T}_o^d$ est invariante par Θ.

Si les nombres θ_i, $1 \leqslant i \leqslant p$, sont linéairement dépendants sur $\mathbb{Z}$, $\mathbb{T}_o^d$ est sous-groupe strict de $\mathbb{T}^d$. Le système $T_N \equiv \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T_{n\Theta}$ est un s.i.p.i sur $\mathcal{C}(\mathbb{T}^d)$ pour le groupe des translations G_o^d associé à $\mathbb{T}_o^d$. Tout f de $\mathcal{C}(\mathbb{T}^d)$ est presque-périodique, donc ergodique et $(T_N f)$ converge vers un élément g identifiable à un élément g_o de $\mathcal{C}(\mathbb{T}^d/\mathbb{T}_o^d)$.

$\mathbb{T}_o^d$ est isomorphe soit à un groupe discret, soit à un groupe continu. Dans ce dernier cas, ce groupe continu est un tore de dimension $d_o < d$, où d_o est le nombre maximum d'éléments linéairement indépendants dans la suite $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d$: d_o est, en effet, la codimension du noyau de Θ, c'est-à-dire du sous-groupe suivant de $\mathbb{T}^{d\wedge} \equiv \mathbb{Z}^d$:

$$\mathrm{Ker}\,\Theta \equiv \left\{P \,;\, P \in \mathbb{Z}^d, \langle P, \Theta\rangle = 1\right\} \qquad (\langle,\rangle : \text{dualité de groupe});$$

$\mathrm{Ker}\,\Theta$ est constitué de tous les puplets d'entiers rationnels $P \equiv (p_1, p_2, \dots, p_d)$ tels que $\sum_{i=1}^{d} p_i \theta_i = 0$.

Ainsi, si $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d$ sont linéairement indépendants, la suite $(n\Theta)$ est équirépartie dans $\mathbb{T}^d$; si $\dim[\mathrm{Ker}\,\Theta] = d_o > 0$, elle l'est dans $\mathbb{T}_o^d \subsetneq \mathbb{T}^d$; enfin, si $d_o = 0$, c'est-à-dire si les θ_i sont rationnels, $\mathbb{T}_o^d$ est un groupe discret et fini (puisque compact); si $\frac{p_i}{q_i}$ est la représentation irréductible des θ_i, la caractéristique de ce groupe $\mathbb{T}_o^d$ est le plus petit commun multiple des q_i, $i = 1, \dots, d$.

En particulier, si les q_i sont premiers entre eux, $\mathbb{T}^d$ est engendré par $\left(\frac{1}{q_1},\frac{1}{q_2},\dots,\frac{1}{q_d}\right)$. Sa mesure de Haar place une masse égale à $\left(\prod_{i=1}^{d} q_i\right)^{-1}$ en chacun de ses points.

Dans tous les cas, les sommes associées à f de $\mathcal{C}(\mathbb{T}^d)$, soient $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(s+i\Theta)$, convergent uniformément en s, vers un élément g de $\mathcal{C}(\mathbb{T}$

Donc, la série de Fourier de g conserve les coefficients de Fourier de pour chaque caractère appartenant à $\operatorname{Ker}\Theta$; les autres coefficients de Fourier sont nuls. Cela peut se constater sur les égalités suivantes :

$$f(s) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k \langle k, s\rangle,$$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(s+n\Theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k \langle k, s\rangle \left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\langle k,\Theta\rangle^n\right],$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\langle k,\Theta\rangle^n = 1, \quad \text{pour } k\in \operatorname{Ker}\Theta,$$

$$= 0, \quad \text{sinon.}$$

La projection S_∞ coïncide donc avec une notion de filtrage : les composantes du spectre de f appartenant à $\operatorname{Ker}\Theta$ sont seules conservées.

En particulier, si les θ_i sont des fractions irréductibles dont les dénominateurs q_i sont premiers entre eux (ce qui est représentable sur un ordinateur), on réalise à l'aide de la suite $(n\Theta)$ les filtrages des composantes du spectre, $k\neq 0$, telles que pour $k=(k_1,k_2,\dots,k_d)\in\mathbb{Z}^d$, $|k_i|<q_i$.

Ainsi $S_\infty f = g$, se décompose de la façon suivante :

$$g = \int f\,d\mu + h,$$

où $\int f d\mu$ est constante,
où h est continue, périodique de période $\left(\frac{1}{q_1},\dots,\frac{1}{q_d}\right)$;
plus précisément, avec $f(s) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k\langle k,s\rangle$; on a

$$h(s) = f(s) - \sum_{|k_i|<q_i} a_k\langle k,s\rangle.$$

1.4 - NOUVEAUX CRITERES ERGODIQUES D'EQUIREPARTITION.-

1.4.1 - Deux critères ergodiques d'équirépartition sur un groupe abélien compact -

Les théorèmes ergodiques abstraits et en particulier, la notion de système d'intégrales presque invariantes (s.i.p.i) suggèrent de construire de nouveaux critères d'équirépartition des suites en leur adjoignant une idée de semi-groupe de transformations sur un espace vectoriel topologique.

Par exemple, pour un groupe abélien compact $\mathbb{T}$, nous avons pu montrer qu'on pouvait introduire le groupe des translations sur le Banach $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ et qu'une suite (s_n) est équirépartie si et seulement si les transformations $T_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} T_{s_i}$, $N=1,2,\ldots$ forment un s.i.p.i, c'est-à-dire si et seulement si

$$\forall s \in \mathbb{T} \text{ et } \forall f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}), \lim_{N\to\infty} (T_N T_s f - T_N f) = 0.$$

Nous avons là un nouveau critère :

Critère 1 -

La suite (s_n) est équirépartie si et seulement si pour tout f d'un ensemble fondamental de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ et pour tout s d'un ensemble dense de $\mathbb{T}$, on a :

$$\lim_{N\to\infty} (T_N T_s f - T_N f) = 0.$$

On peut évidemment réduire le critère.

Critère 2 -

La suite (s_n) est équirépartie si et seulement si pour tout f d'un ensemble fondamental de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, et tout g d'un ensemble générateur du groupe $\mathbb{T}$, on a :

$$\lim_{N\to\infty} (T_N T_g f - T_N f) = 0.$$

1.4.2 - Famille réordonnante de permutations.-

On considère une suite (s_n) sur un groupe compact abélien $\mathbb{T}$. Il est intéressant d'introduire des permutations π sur l'ensemble des indices de telle sorte que les éléments $s_n - s_{\pi(n)}$ restent dans le voisinage d'un point. Celles-ci permettent d'introduire des critères de répartition de (s_n) dont l'exposé est l'objet de ces paragraphes.

Pour chacune de ces permutations π, nous sommes amenés à introduire la famille de parties finies de $\mathbb{N}$ suivantes:

$$E_N^\pi = \{n ; 1 \leq n \leq N , \pi(n) > N\} , N = 1, 2, \ldots$$

Remarquons dès maintenant que les parties associées à la permutation inverse ont même cardinal ; on les notera, de plus :

$$E_N'^\pi = \{n ; 1 \leq \pi(n) \leq N , n > N\} ;$$

on a : $\quad card\left(E_N^\pi\right) = card\left(E_N^{\pi^{-1}}\right) = card\left(E_N'^\pi\right).$

Nous introduisons la notion suivante :

Définition 1 -

Nous dirons qu'une permutation π de $\mathbb{N}$ est presque-finie $(p.f.)$ si $\lim\limits_{N \to \infty} \frac{1}{N} card\left(E_N^\pi\right) = 0.$

Théorème -

Les permutations presque-finies de $\mathbb{N}$ forment un groupe.

Il suffit de montrer qu'elles sont stables par produit de composition. Soient π et π' presque-finies, on a l'inclusion suivante :

$$\{n ; 1 \leq n \leq N , \pi \circ \pi'(n) > N\} \subset \{n ; 1 \leq n \leq N , \pi'(n) > N\} \cup \{n ; 1 \leq n \leq N , \pi'(n) \leq N , \pi \circ \pi'(n) > N\} ;$$

le premier terme de la réunion est inclu dans $E_N^{\pi'}$, tandis que le second est de cardinal inférieur à card$\left(E_N^\pi\right)$.

Définition 2 -

On appelle famille réordonnante de la suite (s_n) pour τ, élément de $\mathcal{T}$, une famille $\mathcal{T}$ de permutations presque-finies de $\mathbb{N}$ telles que pour tout voisinage V de l'élément neutre de $\mathbb{T}$, il existe $\pi_V \in \mathcal{T}$ vérifiant pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$s_n - \tau - s_{\pi_V(n)} \in V \qquad \text{(ou } s_n - s_{\pi_V(n)} \in \tau + V\text{, voisinage de } \tau\text{)}$$

Remarque -

Dans le cas de $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$, les voisinages V peuvent être décrits à l'aide de la "distance" :

$$s \rightsquigarrow \|s\| = \max_{1\leq i\leq d} \left[\min(|s_i|, |1-s_i|)\right].$$

$\mathcal{T}$, dans ce cas, peut être indexé par un ensemble dénombrable.

Cette définition ne se justifie que par les propriétés que possède alors le système "d'intégrales" associées à la suite (s_n) :

$$T_N = N^{-1}\sum_{n=1}^{N} T_{s_n} \ , \ N = 1,2,\ldots$$

Généralisons cette définition pour en étudier les propriétés dans un cadre plus étendu bien que nous montrions a posteriori que seul le cas des translations soit intéressant.

Définition 3 -

Sur un groupe compact abélien $\mathbb{T}$, on appelle famille réordonnante de (s_n) pour la transformation continue φ de $\mathbb{T}$, une famille $\mathcal{T}$ de permutations presque-finies de $\mathbb{N}$ telles que, pour tout voisinage V de l'élément neutre de $\mathbb{T}$, il existe des permutations π_V et π'_V de $\mathcal{T}$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{T}$:

$$s_n + s - \varphi\left[s + s_{\pi_V(n)}\right] \in V$$

$$\text{et} \quad s_n + \varphi(s) - s - s_{\pi'_V(n)} \in V.$$

Remarque -

Si φ est la translation $s \rightsquigarrow s + \tau$, on retrouve l'expression de la définition 2.

I.4.3 - Propriété fondamentale d'une famille réordonnante -

Théorème -

Soient (s_n) une suite sur un groupe compact abélien $\mathbb{T}$ et $T_N \equiv \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T_{s_n}$ le système d'intégrales associées. Soit φ une transformation ponctuelle continue de $\mathbb{T}$. Pour que tout f de $\mathscr{C}(\mathbb{T})$ vérifie

$$\lim_{N\to\infty}\left[T_N(f\circ\varphi) - T_N f\right] = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{N\to\infty}\left[(T_N f)\circ\varphi - T_N f\right] = 0,$$

il suffit qu'il existe une famille réordonnante de (s_n) pour φ.

Soient $\varepsilon > 0$ et $f \in \mathscr{C}(\mathbb{T})$. Choisissons un voisinage V du neutre tel que $s - s' \in V$ entraîne $|f(s) - f(s')| \leq \varepsilon$.

Introduisons la famille de $\mathscr{C}(\mathbb{T})$

$$S_N \equiv T_N[f\circ\varphi] - T_N f.$$

S_N peut se décomposer de la façon suivante par rapport à la permutation π_V d'une famille réordonnante de (s_m) pour φ :

$$\begin{aligned} S_N(\cdot) &= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left[f\circ\varphi(s+s_m) - f(s+s_n)\right] \\ &= \frac{1}{N}\sum_{\substack{n=1 \\ n\notin E_N^{\pi_V}}}^{N}\left[f\circ\varphi(s+s_{\pi_V(n)}) - f(s+s_n)\right] \\ &\quad + \frac{1}{N}\sum_{\substack{n\in E_N^{\pi_V} \\ n'\in E_N'^{\pi_V}}}\left[f\circ\varphi(s+s_{n'}) - f(s+s_n)\right]. \end{aligned}$$

Il vient, par conséquent, la majoration suivante:

$$\|S_N\|_\infty \leq \varepsilon + |f|\,\frac{1}{N}\operatorname{card}\left(E_N^{\pi_V}\right), \text{ avec } |f| \equiv \sup_{s,s'\in\mathbb{T}}|f(s) - f(s')|.$$

Remarquons que φ peut n'être continue que par morceaux. L'autre propriété se montre d'une façon analogue.

I.4.4 - Nouveaux critères ergodiques d'équirépartition -

A partir du théorème I.2.2 et de la notion de famille réordonnante, énonçons le critère d'équirépartition suivant :

Théorème I -

Soient un groupe compact abélien $\mathbb{T}$ et une suite (s_n) de $\mathbb{T}$. Une condition nécessaire et suffisante pour que (s_n) soit équirépartie est que, pour chaque τ de $\mathbb{T}$, il existe une famille réordonnante de (s_n).

La condition est suffisante : d'après le paragraphe précédent, le système $T_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T_{s_n}$, $N = 1, 2, \ldots$ est un système d'intégrales presque invariantes pour le groupe des translations sur $\mathscr{C}(\mathbb{T})$.

La démonstration de la condition nécessaire va nous montrer en passant l'existence de familles réordonnantes pour les translations.

Pour cela, soit un voisinage ouvert V de l'élément neutre de $\mathbb{T}$. On sait qu'il existe un voisinage ouvert W du neutre tel que $W + W \subset V$. La compacité de $\mathbb{T}$ entraîne l'existence d'un recouvrement fini de $\mathbb{T}$ à l'aide de translatés de W. De plus, on pourra construire une partition de $\mathbb{T}$, soit $(C_i)_{1 \leq i \leq I}$, telle qu'il existe un translaté de W recouvrant chaque C_i et telle que la frontière des C_i soit de mesure de Haar nulle (pour cela, il suffirait de choisir W ayant cette dernière propriété).

Maintenant, à τ de $\mathbb{T}$ et (C_i) donnés, on associe les parties suivantes de $\mathbb{N}$:

$$\{n ; s_n \in C_i\} \quad \text{et} \quad \{n ; s_n - \tau \in C_i\}.$$

L'équirépartition de (s_n) entraîne que ces deux ensembles ont même densité asymptotique (la mesure de Haar de C_i). On construit alors entre eux la correspondance biunivoque qui associe les éléments de même rang ; ainsi, avec les sous suites $(s_{n'_k}) \subset C_i$ et $(s_{n_k}) \subset \tau + C_i$, on pose :

$$p_i(n_k) = n'_k \ , \ k = 1, 2, \ldots$$

On construit une permutation π_V de $\mathbb{N}$ en recollant les correspondances p_i, $i=1,2,\dots,I$. Ainsi, $n\in\mathbb{N}$ étant donné, il existe un $i\leqslant I$, tel que $s_n\in C_i+\tau$; on pose :

$$\pi_V(n)\equiv p_i(n).$$

Comme $s_{\pi_V(n)}\in C_i$, pour $s_n\in C_i+\tau$, il vient :

$$s_n-\tau-s_{\pi_V(n)}\in C_i-C_i.$$

Par construction des (C_i) , il existe des $\tau_i\in\mathbb{T}$, $1\leqslant i\leqslant I$, tels que $\tau_i+W\supset C_i$. En conséquence, on a :

$$C_i-C_i\subset W+W\subset V.$$

π_V vérifie donc, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$s_n-\tau-s_{\pi_V(n)}\in V.$$

Il reste à vérifier que cette permutation π_V est presque-finie. Soient donc les ensembles :

$$E_{N,i}=\{n;\ 1\leqslant n\leqslant N,\ s_n\in C_i+\tau,\ p_i(n)>N\}.$$

On vérifie que

$$E_N^{\pi_V}=\bigcup_{i=1}^{I}E_{N,i}.$$

Si $E_{N,i}$ est non vide, on a

$$E_{N,i}=\{n;\ 1\leqslant n\leqslant N,\ s_n\in C_i+\tau\}\setminus\{n;\ 1\leqslant n\leqslant N,\ p_i(n)\leqslant N\};$$

il vient : $\operatorname{card}(E_{N,i})=\sum_{n=1}^{N}\mathbb{1}(s_n\in C_i+\tau)-\sum_{n'=1}^{N}\mathbb{1}[s_{n'}\in C_i]$.

On a déjà vu que les ensembles de $\mathbb{N}$, $\{s_n\in C_i+\tau\}$ et $\{s_n\in C_i\}$, ont même densité asymptotique ; par conséquent :

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\operatorname{card}(E_{N,i})=0\quad\text{et}\quad\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\operatorname{card}\left(E_N^{\pi_V}\right)=0.$$

Dans le cas où $\mathbb{T}$ est monogène, c'est-à-dire engendré par un seul élément, soit $\theta\in\mathbb{T}$, (cas de $\mathbb{T}^d\equiv\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$), on peut simplifier le critère précédent:

Théorème 2 -

Sur un groupe abélien compact $\mathbb{T}$ possédant un élément générateur θ , pour qu'une suite (s_n) soit équirépartie, il faut et il suffit qu'il existe une famille réordonnante de (s_n) pour la translation θ .

D'après le théorème 1, la condition est nécessaire.

Comme $\mathbb{Z}\theta$ est dense dans $\mathbb{T}$, il est aisé de montrer que les trois lemmes suivants entraînent que la condition est suffisante : elle résultera, en effet, d'une proposition corollaire intéressante en elle-même.

Lemme 1 -

La famille d'intégrales associées à une suite (s_n) sur un groupe abélien compact $\mathbb{T}$ est presqu'invariante si, pour chaque τ d'une partie dense de $\mathbb{T}$, il existe une famille réordonnante de (s_n) .

Soit $\mathbb{P}$ dense dans $\mathbb{T}$; pour un voisinage V de l'élément neutre de $\mathbb{T}$, on considère $\tau' \in \mathbb{T}$ et $\tau \in \mathbb{P}$ tels que $\tau - \tau' \in V$. Pour $f \in \mathcal{C}(T)$, on peut écrire :

$$T_N T_{\tau'} f - T_N f = (T_N T_{\tau'} f - T_N T_\tau f) + T_N (T_\tau f - f).$$

Si V est, de plus, choisi de telle sorte que $s - s' \in V$ entraîne $|f(s) - f(s')| \leqslant \varepsilon$, au second membre, la première différence est majorée en norme par $\varepsilon > 0$.

La seconde différence tend vers 0 , lorsque N croît, par hypothèse sur $\mathbb{P}$ et en vertu du théorème 1, I.4.4.

Précisons ce lemme sous une autre forme :

Lemme 2 -

Soit (s_n) une suite sur un groupe abélien compact $\mathbb{T}$.

Soit $\mathbb{P}$ une partie de $\mathbb{T}$ telle que toute translation associée à un élément de $\mathbb{P}$ possède la famille réordonnante de $\mathcal{T}$. Alors $\mathcal{T}$ est famille réordonnante pour la fermeture de P.

Dans la définition 2 du paragraphe I.4.2, considérons des voisinages du neutre de $\mathbb{T}$ tels que $W \subset V$; une permutation π_V associée à une translation de $\tau \in \mathbb{T}$ peut être remplacée par une permutation π_W :

$$s_n - \tau - s_{\pi_W(n)} \in W \subset V.$$

Pour un τ' de $\overline{P}$ et un W tel que $W+W \subset V$, introduisons τ de P tel que $\tau - \tau' \in W$. Il vient immédiatement :

$$s_n - \tau' - s_{\pi_W(n)} \in W + W \subset V.$$

Lemme 3 -

Soit (s_n) une suite sur un groupe abélien compact $\mathbb{T}$.

Si Π est une famille réordonnante de (s_n) pour la translation associée à un élément τ de $\mathbb{T}$, la famille des permutations inverses est réordonnante de (s_n) pour la translation inverse.

Soit $s_n - \tau - s_{\pi_V(n)} \in V$, pour tout n ; en posant $n = \pi_V^{-1}(n')$, il vient :

$$s_{\pi_V^{-1}(n')} - \tau - s_{n'} \in V \qquad \text{; soit encore pour tout } n'$$

$$s_{n'} + \tau - s_{\pi_V^{-1}(n')} \in V.$$

La permutation π_V^{-1} est presque-finie, d'après le théorème I.4.2

Lemme corollaire -

Soit (s_n) une suite sur un groupe abélien compact $\mathbb{T}$.

Soit P une partie de $\mathbb{T}$ telle que toute translation associée à un de ses éléments possède la famille réordonnante Π. Alors, le groupe compact engendré par P possède pour famille réordonnante de (s_n) le groupe de permutations engendré par Π .

Il suffit d'étudier la composition de deux translations.

Soient τ et τ' dans P et deux permutations π_W^τ et $\pi_W^{\tau'}$ de Π associées à un W tel que $W + W \subset V$:

$$s_n - \tau - s_{\pi_W^\tau(n)} \in W \quad , \quad s_{n'} - \tau' - s_{\pi_W^{\tau'}(n')} \in W.$$

Ajoutons les deux relations, en posant $n' = \pi_W^\tau(n)$:

$$s_n - (\tau + \tau') - s_{\pi_W^{\tau'} \circ \pi_W^\tau(n)} \in W + W \subset V.$$

Enfin, on sait déjà que $\pi_W^{\tau'} \circ \pi_W^\tau$ est presque finie, d'après la proposition 1.4.2.

<u>1.4.5 - Exemples.</u>

Revenons à la suite $(n\theta)$ sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, θ étant irrationnel ou non. La suite $(n\theta)$ possède une famille réordonnante évidente pour la translation de θ ; soit $\pi : n \rightsquigarrow \pi(n) = n-1$. Pour $n > 1$, en effet, on a

$$n\theta - \theta - \pi(n)\theta = 0 \quad \text{et} \quad E_N^\pi = \{N\}.$$

D'après le théorème 2 du paragraphe 1.4.4, la suite $(n\theta)$ est équirépartie sur le groupe compact engendré par θ dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

La conclusion est la même sur $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$, sans complication supplémentaire pour les suites $(n\Theta)$, $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)$.

Les critères introduits, on le constate, sont particulièrement bien adaptés à ces suites.

I.5 - ERGODICITE DES SUITES SUR UN GROUPE COMPACT ABELIEN - FORMULE D'ERREUR -

I.5.1 - Famille réordonnante et ergodicité des sous groupes -

Prenons maintenant une transformation continue φ et supposons que la suite (s_n) possède une famille réordonnante pour φ. D'après la définition 3, on constate que nécessairement la translation T_{s_n} doit appartenir à la fermeture de l'ensemble des transformations $(\varphi \circ T_{s_m})_{m \in \mathbb{N}}$. La compacité de $\mathbb{T}$ entraîne l'existence d'un $\tau_n \in \mathbb{T}$ tel que $s + s_n = \varphi(s + \tau_n)$, pour tout $s \in \mathbb{T}$. D'une part, il vient $s_n = \varphi(\tau_n)$ et d'autre part, on a $\varphi = T_{s_n - \tau_n}$: φ est donc nécessairement une translation associée à $s_n - \tau_n$, où $\tau_n \in \overline{(s_n)_{n \in \mathbb{N}}}$. D'après les résultats précédents, la famille d'intégrales associée à la suite (s_n) est un s.i.p.i pour le groupe engendré par τ_n.

Théorème -

Les seuls semi-groupes de transformations continues pour lesquelles une suite (s_n), sur un groupe compact abélien $\mathbb{T}$, permet d'associer le s.i.p.i $T_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} T_{s_n}$ sont les groupes de translations.

Les exemples pris au paragraphe I.3 sont donc caractéristiques de la situation. Bien entendu, la suite (s_n) n'est pas forcément de la forme $(n\theta)$; si ε_n est une suite d'élément de $\mathbb{T}$ convergeant vers le neutre de $\mathbb{T}$, $s_n = n\theta + \varepsilon_n$, $n = 1, 2, \ldots$ est une suite pour laquelle le système d'intégrales (T_N) est presque invariant pour le groupe engendré par θ dans $\mathbb{T}$.

I.5.2 - Une majoration de l'erreur -

Soit (s_n) une suite équirépartie sur un sous-groupe $\mathbb{T}_0$ du groupe compact abélien $\mathbb{T}$.

Soit S_∞ la projection sur le sous-espace $\mathcal{C}(\mathbb{T}/\mathbb{T}_0) \subset \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Il s'agit ici de donner une majoration de "l'erreur" $\|T_N f - S_\infty f\|_\infty$ à l'aide d'une caractéristique associée à une famille réordonnante $\mathcal{T}$ de (s_n) pour les translations de $\mathbb{T}_0$.

Soit V un voisinage du neutre et W tel que $W + W \subset V$. Avec

$s_n - \tau - s_{\pi_W^\tau(n)} \in W$, on a $s_n - \tau' - s_{\pi_W^\tau(n)} \in V$, pour $\tau' \in \tau + W$.

La compacité de $\mathbb{T}_o$ permet d'introduire une famille finie de permutations $s_{\pi_W^{\tau_i}(n)}$, $i = 1, \dots, I$. Posons $e(N,V) \equiv \sup_{1 \leq i \leq I} \frac{1}{N} \operatorname{card}(E_N^{\pi_W^{\tau_i}})$; on a : $\lim_{N \to \infty} e(N,V) = 0$.

Pour $\tau \in \mathbb{T}_o$, il existe une permutation presque-finie π de $\mathcal{T}$ telle que $\frac{1}{N} \operatorname{card}(E_N^\pi) \leq e(N,V)$.

Pour $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, introduisons les nombres $|f|_V \equiv \sup_{s, s' \in V} |f(s) - f(s')|$ et $|f| = |f|_{\mathbb{T}} \leq 2 \|f\|_\infty$.

D'après un calcul déjà fait au paragraphe 5.4.3, pour chaque $\tau \in \mathbb{T}_o$, on a :

$$\| T_N f - T_N T_\tau f \|_\infty \leq |f|_V + |f| \, e(N,V).$$

Avec $S_\infty f = \int_{\mathbb{T}_o} f(\cdot + \tau) \, d\mu_o(\tau)$, il vient :

$$\boxed{\| T_N f - S_\infty f \|_\infty \leq |f|_V + |f| \, e(N,V).}$$

L'intérêt bien sûr est de trouver une borne inférieure $e^*(N,V)$. A N et V donnés, elle vaut $\sup_{\tau \in \mathbb{T}_o} \inf_{\pi_V^\tau \in \mathcal{T}} \frac{1}{N} \operatorname{card}(E_N^{\pi_V^\tau})$. Elle peut être nulle pour V assez grand. On a

$$\| T_N f - S_\infty f \|_\infty \leq \inf_V \left[|f|_V + |f| \, e^*(N,V) \right].$$

On remarque que $|f|_V$ et $e^*(N,V)$ sont monotones par rapport à V et, respectivement, non croissante et non décroissante : il y a un compromis à trouver!

Une autre façon de majorer l'erreur est, à N donné, de rechercher un voisinage du neutre V_N tel que, pour tout $\tau \in \mathbb{T}_o$, il existe une permutation π des N premiers entiers avec $s_n - \tau - s_{\pi(n)} \in V_N$, $1 \leq n \leq N$. On a, alors :

$$\| T_N f - S_\infty f \|_\infty \leq |f|_{V_N}.$$

Cette dernière majoration, plus fine, nous a conduit antérieurement à des résultats intéressants de majoration d'erreur pour le calcul des intégrales de Haar à l'aide des suites $(n\Theta)$ (Cf. [2]) ; elle exige une étude précise de la répartition des points de la suite $(n\Theta)$ sur le tore (que l'on peut mener à l'aide d'algorithmes de décomposition en fraction continue des nombres Θ .

De façon plus générale, on peut observer que la convergence de T_N vers S_m est une convergence compacte. L'erreur est d'autant plus faible que les oscillations $|f|_V$ de f sont faibles ; on aura donc intérêt dans certains cas à modifier f pour en diminuer les oscillations.

L'effet de la suite (λ_m) sur cette erreur est contenu entièrement dans V_N . Si $\mathbb{T}$ est de dimension finie, V_N pourra être mesuré par

$$e_N^* = \sup_{\tau\in\mathbb{T}} \inf_{\pi} \sup_{1\leq m\leq N} \|\lambda_m - \tau - \lambda_{\pi(n)}\|.$$

Si f est lipschitzienne de rapport K, l'erreur est alors majorée par Ke_N^*.

1.5.3 - Introduction à l'étude des erreurs pour les suites $(n\theta)$ et $(n\Theta)$.

(Cf. Bass, Bertrandias, Lesca, Couot [1] et [2]).

Nous renvoyons aux études plus précises déjà faites pour les suites $(n\theta)$ $(m\theta)$ et $(n\Theta)$ et à une méthode d'extrapolation d'erreur (Couot [1]) permettant de tenir compte de la presque-périodicité de celle-ci pour la diminuer. Le but de ce paragraphe est de faire constater que l'étude de e_N^* fait nécessairement appel à la théorie des approximations diophantiennes (Cassels) non homogènes, d'une part, et que, par suite, cette fonction erreur e_N^* dépend des nombres θ et Θ de façon fondamentale, d'autre part. En particulier, nous allons montrer également comment on peut construire des permutations réordonnantes pour une suite $(n\theta)$.

Soit θ un nombre et la suite $q_1, q_2, \cdots q_n$ des dénominateurs de ses réduites successives. On sait que $\|q_1\theta\|, \|q_2\theta\|, \dots, \|q_n\theta\|$ sont les minimum successifs de $\|m\theta\|$: pour $1\leq m < q_n$, $\|m\theta\| > \|q_n\theta\|$.

Pour $m < q_{n+1}$, tout point $m\theta$ du tore (modulo 1) est suivi ou précédé par un autre point $n\theta$, tel que $m-n = q_n$, ou q_{n-1} . Ainsi, les points

$(m\theta)$, $1 \leqslant m \leqslant q_{n+1}$ " ne laissent pas d'intervalles libres " supérieurs en longueur à $\|q_{n-1}\theta\|$. Ainsi, pour tout τ, il existe un entier $m(\tau) < q_{n+1}$ tel que $\| m(\tau)\theta + \tau \| \leqslant \frac{\|q_{n-1}\theta\|}{2}$.

Introduisons la permutation $\pi(n) = n + m(\tau)$; on a

$$n\theta - \tau - \pi(n)\theta = -(\tau + m(\tau)\theta) .$$

π est réordonnante de $(n\theta)$ pour τ à $\frac{\|q_{n-1}\theta\|}{2}$ près : π , en particulier, est presque-finie car: $\frac{1}{N} \operatorname{card}(E_N^\pi) = \frac{m(\tau)}{N} \leqslant \frac{q_{n+1}}{N}$.

Cette majoration est uniforme en τ , il vient donc :

$$\| T_N f - S_\infty f \|_\infty \leqslant |f|_{\frac{\|q_{n-1}\theta\|}{2}} + |f| \frac{q_{n+1}}{N} .$$

T_N ne converge vers $\int f d\mu$ que si θ est irrationnel, c'est-à-dire si q_n tend vers l'infini. Si θ est rationnel au contraire, $S_\infty f$ n'est pas constant et vaut $\int f d\mu_0$, où μ_0 est la mesure de Haar sur le groupe discret engendré par θ. Dans ce dernier cas, il existe un n tel que $\|q_n\theta\| = 0$: $\theta = \frac{p_n}{q_n}$. La suite est réordonnée pour les translations $m\theta$, avec: $\frac{1}{N} \operatorname{card}(E_N^\pi) \leqslant \frac{q_n}{N}$.

L'erreur est au maximum $|f| \frac{q_n}{N}$. Cette borne est trop forte, en général, si q_n est grand et on a avantage à introduire de moins bonnes approximations diophantiennes de θ : tout se passe alors comme si θ était considéré comme une approximation d'un irrationnel pour lequel on mènerait l'étude. Ainsi, <u>les formules de majorations données sont valables que θ soit rationnel ou irrationnel.</u>

Dans le cas où $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ est lipschitzienne, une borne telle que $\frac{K}{2}\|q_{n-1}\theta\| + |f| \frac{q_{n+1}}{N}$ est minimum en θ si le produit $q_{n+1}\|q_{n-1}\theta\|$ est minimum.

Avec $q_{n+1} = a_n q_n + q_{n-1}$, une majoration de ce produit est encore $a_n + q_{n-1}\|q_{n-1}\theta\|$, ou $a_n + a_{n-1} + 1$. Cette majoration quoique grossière indique que les nombres quadratiques (pour lesquels a_n est une suite périodique) ou encore les nombres θ à coefficients a_n bornés sont priviligiés. Le "meilleur" d'entre eux, le nombre d'or, est caractérisé par $a_n = 1$, il donne en fait l'erreur minimum. Pour une étude plus fine de ces propriétés, nous renvoyons à [1] et à la généralisation sur le tore à d dimensions [2].

II - DIVERS EXEMPLES DU CARACTERE ERGODIQUE EN EQUIREPARTITION ET CARACTERE PSEUDO-ALEATOIRE.

II.0 - INTRODUCTION.

Nous développons ici notre point de vue au sujet de problèmes classiques.

Nous donnons deux exemples intéressants de constructions de familles réordonnantes de permutations de $\mathbb{N}$ (Cf. Chapitre I) : l'un, relatif au critère de Fejer, l'autre, relatif à un des aspects du critère de Van der Corput.

Elles permettent de contrôler les erreurs lors de l'utilisation de ces suites.

Nous relions ensuite le problème de la recherche d'existence de moyennes pour une suite à celle de l'existence de mesures asymptotiques et dè l'ergodicité sur un compactifié de $\mathbb{N}$ (Cf.II .2). Nous dégageons ainsi un point de vue topologique très général pour la recherche des m.a. d'une suite.

Ceci nous permet, à titre d'exemple, de discuter certains aspects ergodiques du critère de Van der Corput, d'une part; d'autre part, le caractère pseudo-aléatoire est envisagé ici en tant que critère d'ergodicité (Cf. J.P. Bertrandias).

Enfin, l'étude des polynômes de Weyl est entreprise en considérant un semi-groupe ergodique de transformations de $\mathcal{C}(\mathbb{T}^d)$ spécialement adapté. Ces transformations ne sont pas des translations : elles sont cépendant biunivoque, bicontinues et elles conservent la mesure de Haar. Il leur sera attaché un système d'intégrales presque invariantes qui permettra d'expliquer et de compléter les propriétés connues des sommes de Weyl.

En outre, nous introduirons la notion de familles pseudo-aléatoires de fonctions continues sur $\mathbb{T}^d$ et nous caractériserons celles qui sont attachées aux polynômes de Weyl.

II.1 - EXEMPLES DE FAMILLES REORDONNANTES DE $\mathbb{N}$ -

II.1.1 - Famille réordonnante associée à la condition de Fejer.

Les suites équiréparties modulo 1 et définies par la restriction à $\mathbb{N}$ d'une fonction f peuvent s'étudier à l'aide de la condition suffisante de Fejer, dans le cas d'une croissance lente de f à l'infini. Nous montrons ici que, dans ce cas, il existe une famille de permutations réordonnant $[f(n)]_{n\in\mathbb{N}}$ de façon assez naturelle (Cf. chapitre I) . Nous rappelons d'abord le théorème de Fejer et nous en donnons une démonstration nouvelle dans le cas où une condition complémentaire est satisfaite (cas usuel des utilisations du théorème) : si $\Delta x, \Delta f, \Delta f'$ sont des accroissements compatibles de $x, f, \frac{df}{dx}$ sur $\mathbb{R}^+$, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} [\Delta x\, \Delta f']\Big|_{\Delta f=1} = 0;$$

cette condition n'apporte pratiquement aucune restriction au théorème classique suivant (Cf. Chauvineau) .

Théorème : (Fejer) -

f est une fonction définie sur $\mathbb{N}^+$ et au voisinage de l'infini de $\mathbb{R}^+$, strictement monotone, dérivable et à dérivée monotone au voisinage de l'infini de $\mathbb{R}^+$ Si $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$ et $\lim_{x\to\infty} x\,|f'(x)|=\infty$, alors la suite $f(n), n=1,2,\dots$ est e.r.1.

C'est le cas de $f(x)=x^\alpha$, $0<\alpha<1$.

On peut supposer que f est strictement croissante sur $[x_0,+\infty[$.
Il est facile de montrer que f n'est pas bornée sur $\mathbb{R}^+$ et que f' ne croit pas.
De plus, introduisant la suite (x_p) telle que $f(x_p)=p$, $p\in\mathbb{N}^+$, on a :

$$\frac{1}{f'(x_p)} < x_{p+1}-x_p < \frac{1}{f'(x_{p+1})};$$

ainsi, les différences $x_{p+1}-x_p$ sont croissantes et non bornées quand p tend vers l'infini.

Soit I_p l'intervalle des entiers compris entre x_p et x_{p+1} ; on a

$$\operatorname{card}(I_p) < \frac{1}{f'(x_{p+1})} \quad \text{et} \quad f(n+1) - f(n) \leqslant f'(x_p) \;,\; n, n+1 \in I_p.$$

Ainsi, sur le tore $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, les points $f(n), n \in I_p$, laissent des intervalles libres de longueur maximum $f'(x_p) + f'(x_{p+1})$: d'après la condition $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, la suite $f(n)$ est dense modulo 1 sur $\mathbb{T}^1$.

Construisons maintenant des permutations réordonnant $[f(n)]$ (Cf. I.4.2).

Pour chaque $\tau \in \mathbb{T}^1$, construisons la permutation π^τ des entiers coïncidant sur chaque I_p avec une permutation circulaire, choisissons cette dernière pour rendre minimum l'écart entre $f(n) - \tau$ et $f[\pi^\tau(n)]$. C'est possible avec un écart uniformément majoré en τ par $(x_{p+1} - x_p)\left[f'(x_p) - f'(x_{p+1})\right]$.

Une condition suffisante pour que cet écart tende vers 0, quand p tend vers l'infini est :

$$\lim_{x\to\infty} \left(\Delta x \; \Delta f'\right)\Big|_{\Delta f = 1} = 0.$$

Compte tenu de ce que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, cette condition peut encore s'écrire :

$$\lim_{x\to+\infty} \left.\frac{f'(x) - f'(x+\Delta x)}{f'(x)}\right|_{\Delta f = 1} = 0, \text{ ou} \qquad \lim_{x\to+\infty} \left.\frac{f'(x+\Delta x)}{f'(x)}\right|_{\Delta f = 1} = 1.$$

Ainsi, la décroissance de f' ne doit pas être trop rapide.

Pour que les permutations π^τ soient réordonnantes pour la suite $[f(n)]$, il suffit qu'à ε positif donné, les ensembles exceptionnels d'entiers $E_N^{\pi^\tau}$ soient de fréquences asymptotiques nulles. Ceux-ci sont constitués des entiers tels que, d'une part, $\left\| f(n) - \tau - f[\pi^\tau(n)] \right\| > \varepsilon$ et, d'autre part, $\pi^\tau(n) > N$.

Les premiers sont en nombre fini $N(\varepsilon)$; on a, plus précisément :

$$\operatorname{card} \left\{ I_{p_N} \cap [1, N] \right\} \leqslant \frac{f(N) - f(x_{p_N})}{f'(N)} \leqslant \frac{1}{f'(N)},$$

avec $\quad x_{p_N} \leqslant N < x_{p_N + 1}.$

Au total : $\frac{1}{N}\,\mathrm{card}(E_N^{\varepsilon}) \leq \frac{N(\varepsilon)}{N} + \frac{1}{Nf'(N)}$; avec la condition $\lim_{x\to\infty} x f'(x) = +\infty$, le second membre de la dernière inégalité tend vers 0. Il indique d'ailleurs, d'après la formule d'erreur donnée au chapitre I, une rapidité de convergence des erreurs associées à la suite $f(n)$, $n \in \mathbb{N}^+$.

Remarque -

La démonstration faite ici s'applique aux suites (n^{α}), $0<\alpha<1$ et plus généralement aux suites $(\lambda n^{\alpha} \log^{\beta} n)$, α, β, $\lambda \neq 0$ réels

avec $0<\alpha<1$, ou $\alpha = 0$ et $\beta > 1$.

La condition de Fejer ne s'applique pas aux suites $(\lambda \log n)$ qui d'ailleurs ne sont pas équiréparties modulo 1. On a remarqué qu'elles sont "asymptotiquement" équiréparties lorsque λ tend vers l'infini (cf. Couot (6)).

II.1.2 - Un exemple de famille réordonnante associé à un critère de Van der Corput.

Soit C un groupe compact abélien à base dénombrable. Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que C est muni d'une métrique que nous représenterons par $\|s-t\|$, ce symbole désignant la distance entre s et t de C.

Soit v de $\mathbb{N}^+$ tel que les suites $n \rightsquigarrow u(n+\ell v) - u(n)$ soient uniformément équiréparties sur C pour un ensemble d'entiers (ℓ) de densité 1. On sait que la suite $m \rightsquigarrow u(\lambda m+\mu)$ est uniformément équirépartie pour tout μ et tout $\lambda \neq 0$ (théorème de H. Delange).

On sait également que les suites $k \rightsquigarrow u(n+kv) \in C$ sont équiréparties uniformément en n ; nous verrons d'ailleurs par la suite qu'elles correspondent à des translatées de trajectoires associées à un semi-groupe de transformations ponctuelles G_v (Cf. paragraphe I.4.3).

A titre d'exemple, montrons ici le résultat suivant :

Théorème -

C est un groupe compact abélien à base dénombrable.

Soit $u(n), n \in \mathbb{N}$, une suite dans C telle que, pour l'entier positif ν, les suites

$$u_\ell : n \rightsquigarrow u(n+\ell\nu) - u(n) \in C$$

soient uniformément équiréparties lorsque ℓ appartient à un ensemble d'entiers de densité 1.

Pour tout $\lambda \neq 0$ et μ entiers, une famille (de permutations) réordonnante associée à la suite $m \rightsquigarrow u(\lambda m+\mu)$ peut être explicitée à l'aide d'une famille (de permutations) réordonnante pour les suites u_ℓ.

Montrons d'abord un lemme technique.

Lemme -

Soit C un groupe compact abélien à base dénombrable. Soit $[u(n)]$ une suite de C.

Soit $\nu > 0$ un entier tel que les suites $k \rightsquigarrow u(n+k\nu)$ soient équiréparties uniformément en n. Alors, pour tout t de C, $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$, il existe $K > 0$ tel que la partie suivante de $\mathbb{N}$:

$$\{n ; n \in \mathbb{N} : k \leqslant K \Longrightarrow \|u(n+k\nu) - u(n) - t\| > \eta\}$$

a une densité supérieure moindre que ε.

Supposons que la condition du lemme soit fausse; il existerait alors t_0 de C, $\varepsilon_0 > 0$ et $\eta_0 > 0$ tels que, pour tout $K > 0$, on ait :

$$\overline{\lim_{N \to \infty}} \frac{1}{N} \operatorname{card}\{n ; 1 \leqslant n \leqslant N : k \leqslant K \Longrightarrow \|u(n+k\nu) - u(n) - t_0\| > \eta_0\} \geqslant \varepsilon_0 .$$

Pour tout $K > 0$, il existerait alors au moins un n tel que la suite $k \rightsquigarrow u(n+k\nu)$ ne possèderait pas de point de rang inférieur à K dans la boule de centre $u(n) + t_0$ et de rayon η_0. La mesure de cette boule étant indépendante de n, il y a contradiction avec l'hypothèse d'équirépartition uniforme en n des suites $k \rightsquigarrow u(n+k\nu)$.

<u>Construction de la famille réordonnante.</u>

$\nu > 0$ est un entier donné; on s'intéresse aux suites $s_m = u(\lambda m+\mu)$, où $\lambda \neq 0$ et μ sont des entiers. On considère alors la famille de suites indicée par $k \in \mathbb{N}$:

$$v_k : n \rightsquigarrow v_k(n) = u(n+k\lambda\nu) - u(n).$$

D'après l'hypothèse du théorème, elles sont uniformément équiréparties sur C pour un ensemble d'entiers k de densité 1.

Pour $\eta > 0$ et $t \in \mathbb{T}^d$, introduisons les parties de $\mathbb{N}$ suivantes :

$$N_k = \{n ; n \in \mathbb{N} , \| u(n+k\lambda\nu) - u(n) - t \| \leq \eta \}.$$

Considérons enfin l'injection sur $\mathbb{N}$:

$$m \rightsquigarrow i(m) = \lambda m + \mu.$$

On construit alors une permutation π de $\mathbb{N}$ de la façon suivante :

- si $i(m) \in N_1$ (on écrit $m \in F_1$), on pose $\pi(m) = m+\nu$;

- si $i(m) \in N_2 \setminus N_1$ (on écrit $m \in F_2$), on pose $\pi(m) = m+2\nu$;

plus généralement:

- si $i(m) \in N_k \setminus \bigcup_{l=1}^{k-1} N_l$ (on écrit $m \in F_k$), on pose $\pi(m) = m+k\nu$.

Remarquons d'abord que la permutation π est bien définie puisque la famille (N_k) recouvre $\mathbb{N}$: c'est une conséquence de l'hypothèse faite sur les suites

Montrons maintenant que la famille des permutations π dépendant ainsi de η est une famille réordonnante de (s_m) pour la translation t , le théorème sera démontré.

Pour cela, évaluons $\| s_m - t - s_{\pi(m)} \|$ (Cf. paragraphe 1.4.2).

L'expression vaut :

$$\|u(\lambda m+\mu) - t - u(\lambda m + k\lambda\nu + \mu)\| \ , \qquad \text{pour} \quad m \in F_k \ ;$$

dans ce cas : $i(m) = \lambda m + \mu \in N_k$; l'expression est majorée par η.

Il reste à montrer que la famille de permutations est presque-finie : considérons alors l'ensemble exceptionnel (Cf. paragraphe I.4.2.):

$$E_N^{\pi} = \{m \ ; \ 1 \leq m \leq N \ , \ \pi(m) > N\}.$$

Il est constitué des entiers $m \in F_k$, avec un k tel que $m + k\nu > N$. D'après le lemme, il existe un entier $K > 0$ tel que l'ensemble des n n'appartenant à aucun des N_k, $k < K$ possède une densité supérieure moindre que ε, $\varepsilon > 0$ quelconque donné à l'avance. Ainsi l'ensemble des entiers m non classés dans un F_k, $k \leq K$, possède lui-même une densité supérieure inférieure à $|\lambda|\varepsilon$.

Au total, il vient:

$$\overline{\lim_{N \to \infty}} \ \frac{\operatorname{Card}(E_N^{\pi})}{N} \leq |\lambda|\varepsilon + \frac{K\nu}{N} \ ,$$ d'où le résultat. ∎

Remarque -

La majoration obtenue ci-dessus permet un contrôle de "l'erreur" (d'après l'étude faite au chap I, I-5-2, à l'aide d'une évaluation de card (E_N^{π}), $\forall t \in \mathbb{T}$.

II.2 - SUITES DENSES : ERGODICITE ET REPARTITION SUR LE COMPACTIFIE DE $\mathbb{N}$. -

Soit C un espace topologique complètement régulier.

On considère une suite $u : n \rightsquigarrow u(n) \in C$ et on suppose que u est dense dans C ; on peut toujours supposer sans restriction que u est injective dans C.

Munissons $\mathbb{N}$ de la topologie $\mathcal{T}$ rendant continues u ainsi que ses translatées $u^p : n \rightsquigarrow u(n+p)$, p étant un entier positif donné. Dans un premier temps, nous allons montrer que $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ est un espace topologique complètement régulier ; nous introduirons alors son compactifié de Stone-Čech , soit S ; toute fonction continue bornée sur $\mathbb{N}$ au sens de $\mathcal{T}$ se prolonge de façon unique en un élément de $\mathcal{C}(S)$. Nous montrerons que le semi-groupe des translations associés à $\mathbb{N}$ sur $\mathcal{C}(S)$ est ergodique : nous donnerons quelques exemples d'éléments ergodiques de $\mathcal{C}(S)$, lorsque u possède des propriétés de répartition (existence d'une mesure asymptotique) ou de répartition uniforme de façon plus particulière ; plus loin, nous appliquerons cela à un des aspects du critère de Van der Corput pour l'équirépartition uniforme des suites. Pour référence relative à la compactification de Stone-Čech nous prenons Dunford-Schwartz t.1.

Remarque - (Cf. Remarque 2 de I.1.4) -

Nous répondons ici en II.2 à une question posée à la remarque 2 de I.1.4.

Ce paragraphe dégage essentiellement un point de vue topologique permettant de mieux comprendre les relations entre diverses mesures asymptotiques associées à une même suite. Il ne nous a pas semblé utile de prendre un semi-groupe G plus général que $\mathbb{N}$ [Cf. Remarque 2 de I.1.4] . Les résultats rencontrés sont énoncés dans le texte même de cette discussion : nous les avons soulignés.

II.2.1 - Compactification de $\mathbb{N}$ pour une suite u.-

Un espace topologique est complètement régulier lorsque, d'une part, tout élément y est fermé et, d'autre part, pour tout élément x et tout fermé F ne contenant pas x, il existe une fonction réelle, continue, de valeurs comprises entre 0 et 1, nulle en x et valant 1 sur F.

On sait qu'un espace complètement régulier peut être plongé dans un espace compact dans lequel il est partout dense : le procédé de compactification de Stone-Čech est une réalisation de cette opération (Cf. Dunford-Schwartz). Utilisons-là à propos des suites.

Lemme -

Soit une suite u injective dans un espace complètement régulier C. On considère les translatées de u pour chaque entier $p \geq 0$, soient u^p: $n \in N \rightsquigarrow u^p(n) = u(n+p) \in C$. La topologie de N rendant continue chaque u^p, $p \in N$, est complètement régulière.

Tout $n_0 \in N$ est fermé, car l'injection de u entraîne que $\{n_0\}$ est image inverse continue d'un point de C.

Si Φ est un fermé de C et p un entier, $(u^p)^{-1}(\Phi)$ est un fermé de N et tout fermé $F \in N$ est intersection de réunions finies de tels fermés.

Soient maintenant F fermé dans N et $n_0 \notin F$. On considère une réunion finie $F_I = \bigcup_{i \in I} (u^{p_i})^{-1}(\Phi_i)$ contenant F sans contenir n_0,

$$u(n_0+p_i) \notin \Phi_i \quad , i \in I.$$

Comme C est comp. rég., il existe des fonctions continues φ_i, $i \in I$, telles que

i) $0 \leq \varphi_i(s) \leq 1$, $s \in C$;

ii) $\varphi_i(s) = 1$, $s \in \Phi_i$;

iii) $\varphi_i(u(n_0+p_i)] = 0.$

Chacune des fonctions $\varphi_i \circ u^{p_i}$ est continue sur N; ainsi $\psi = \sup_{i \in I} (\varphi_i \circ u^{p_i})$ l'est aussi. Il vient donc :

i) $0 \leq \psi(n) \leq 1$, $n \in N$;

ii) $\psi(n) = 1$, $n \in F_I \supset F$;

iii) $\psi(n_0) = 0.$

$\mathbb{N} \xrightarrow{\;u\;} C$, avec $\overline{u(\mathbb{N})} = C$ et u injectif.

$$C \sim S \equiv [\mathbb{N}, \mathscr{C}(u^p ; p \geq 0)]$$

<u>$\mathscr{C}(S) \sim \mathscr{C}(C)$:</u>

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[dr, "u"] & \\
S \arrow[r, "\check{u}"] \arrow[dr, "\check{f}_u \in \mathscr{C}(S)"'] & C \arrow[d, "f \in \mathscr{C}(C)"] \\
& \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

<u>$\mathscr{C}(S) \supset A \sim \mathscr{C}(C')$:</u>

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[dr] & \\
S \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "a \in A"'] & C' \arrow[d, "f \in \mathscr{C}(C')"] \\
& \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

$\mathscr{A}(S) \equiv Sp[f \circ u^p ; f \in \mathscr{C}(C), p \geq 0] \subset \mathscr{C}(S)$: <u>$\mathscr{A}(S) \sim \mathscr{C}(\mathcal{K})$</u>

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{N} \arrow[d, "w"] \arrow[dr, "u"] & \\
S \arrow[r, "\check{w}"] \arrow[rr, bend left, "\check{u}"] \arrow[dr, "\check{f}_u \in \mathscr{A}(S)"'] & \mathcal{K} \arrow[r, "v_u"] \arrow[d, "g \in \mathscr{C}(\mathcal{K})"] & C \arrow[dl, "f \in \mathscr{C}(C)"] \\
& \mathbb{R} &
\end{tikzcd}$$

Cf. p. 6-10

Pour fixer les idées dans la suite, nous considèrerons que u est une suite injective et relativement compacte dans un certain espace topologique C.

S désignera alors un compactifié de Stone-Čech de $\mathbb{N}$ muni de la topologie rendant continue les suites u^p, $p = 0, 1, 2, \ldots$. S est défini à un homéomorphisme près. On sait que toute suite v numérique, bornée et continue sur N se prolonge sur S en une fonction numérique $\check{v}$ continue, bornée et de même norme :

$$\|\check{v}\|_\infty = \sup_{s \in S} |\check{v}(s)| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |v(n)| \ , \quad \check{v} \in \mathcal{C}(S).$$

Par exemple, pour $f \in \mathcal{C}(C)$, la suite $f o u$ est continue et bornée; soit $\check{f}_u$ son prolongement à S : $\check{f}_u \in \mathcal{C}(S)$. La correspondance $f \rightsquigarrow \check{f}_u$ de $\mathcal{C}(C)$ dans $\mathcal{C}(S)$ est un homomorphisme algébrique et une isométrie d'algèbres de Banach.

De façon générale, pour toute sous-algèbre A de $\mathcal{C}(S)$, on peut trouver un compact C' défini à une homéomorphie près et une application continue v de S dans C' tels qu'il y ait un isomorphisme isométrique entre $\mathcal{C}(C')$ et A : tout élément $a \in A$ s'écrit sous la forme $f o v$, où f est un élément de $\mathcal{C}(C')$. Dans notre exemple ci-dessus, le rôle de v est joué par le prolongement continu de u à S, soit $\check{u}$.

Considérons maintenant dans $\mathcal{C}(S)$ l'algèbre $\mathcal{A}(S)$ engendrée par les éléments de la forme $f o u^p$, où $f \in \mathcal{C}(C)$ et p entier non négatif ; il existe alors un compact $\mathcal{K}$ et une application continue de N dans $\mathcal{K}$, soit w , qui permettent de représenter un isomorphisme isométrique entre $\mathcal{C}(\mathcal{K})$ et $\mathcal{A}(S)$: pour $a \in \mathcal{A}(S)$, il existe g de $\mathcal{C}(\mathcal{K})$ tel que $a = g o \check{w}$. Ainsi w est une suite continue de $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathcal{K}$ et $\check{w}$ en est son prolongement à S .

D'après le même principe, il existe une application continue v_u de $\mathcal{K}$ dans C telle que

$$u = v_u \circ w$$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\check{w}"] \arrow[dr, "\check{u}"'] & \mathcal{K} \arrow[d, "v_u"] \\ & C \end{tikzcd}$$

et telle que pour f de $\mathcal{C}(C)$, $\check{f}_u$ de $\mathcal{C}(S)$, prolongement de $f o u$, s'écrive

$$\check{f}_u = f \circ v_u \circ \check{w}.$$

II.2.2 - Semi-groupe ergodique G_T des translations de $\mathbb{N}$. -

On introduit sur $\mathbb{N}$ la translation $T : n \rightsquigarrow n+1$. En particulier, on a : $u^p \equiv T^p u$.

Transportons T sur $\mathcal{A}(S)$ et $\mathcal{C}(\mathcal{K})$.

Pour chaque $\check{a} \in \mathcal{A}(S)$, introduisons $T\check{a}$ comme le prolongement à S de $Ta : n \rightsquigarrow a(n+1)$. On vérifie immédiatement que T est un homomorphisme algébrique et isométrique de $\mathcal{A}(S)$ dans lui-même : $\|T\check{a}\|_\infty = \|\check{a}\|_\infty$. T engendre un semi-groupe G_T d'opérateurs linéaires continus de norme unité sur $\mathcal{A}(S)$.

De la même façon, l'isométrie entre $\mathcal{A}(S)$ et $\mathcal{C}(\mathcal{K})$ permet d'introduire pour chaque g de $\mathcal{C}(\mathcal{K})$ l'image inverse dans $\mathcal{C}(\mathcal{K})$ de $T(g \circ \check{w}) \in \mathcal{A}(S)$: nous la noterons $\perp g$. $\perp$ est ainsi un homomorphisme isométrique de $\mathcal{C}(\mathcal{K})$ dans lui-même. $G_\perp$ désignera sur $\mathcal{C}(\mathcal{K})$ le semi-groupe d'opérateurs linéaires engendré par $\perp$.

G_T (resp. $G_\perp$) est ergodique sur $\mathcal{A}(S)$ (resp. $\mathcal{C}(\mathcal{K})$).

$$T_N = \frac{1}{N}\sum_{p=1}^{N} T^p , \; N = 1,2,\dots \qquad \left(\text{resp. } \perp_N = \frac{1}{N}\sum_{p=1}^{N} \perp^p\right)$$

forment un système d'intégrales presque invariantes sur $\mathcal{A}(S)$ (resp. $\mathcal{C}(\mathcal{K})$).

Ainsi, pour $\check{a}$ de $\mathcal{A}(S)$ tel que $\check{a} = g \circ \check{w}$, où $g \in \mathcal{C}(\mathcal{K})$, on a :

$$T_N a : n \rightsquigarrow \frac{1}{N}\sum_{p=1}^{N} a(n+p) = \frac{1}{N}\sum_{p=1}^{N} g \circ w(n+p).$$

II.2.3 - Recherche des éléments G_T-ergodiques et mesure asymptotique -

Si ces sommes convergent uniformément en n, $\check{a} \in \mathcal{A}(S)$ est élément ergodique pour le semi-groupe G_T . g est alors élément ergodique pour $G_\perp$ sur $\mathcal{C}(\mathcal{K})$.

Soit $\Gamma(S)$ (resp. $\Gamma(\mathcal{K})$) le sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{A}(S)$ (resp. de $\mathcal{C}(\mathcal{K})$) de ces éléments ergodiques. On sait que l'application $T_\infty = \lim_N T_N$ associe à $\check{a} \in \Gamma(S)$ (resp. $\perp_\infty = \lim_N \perp_N$ associe à $g \in \Gamma(\mathcal{K})$) un élément de $\Gamma(S)$ (resp. de $\Gamma(\mathcal{K})$) invariant par G_T (resp. $G_{\perp}$) et que T_∞ (resp. $\perp_\infty$) est une projection (Cf. W. F Eberlein et chap. 5).

Dans le cas où T_∞ projette $\Gamma(S)$ dans l'ensemble des applications constantes, cette ergodicité s'identifie à la notion d'existence d'une mesure asymptotique. Plus précisément, supposons qu'il existe une algèbre A de $\Gamma(S)$ sur laquelle T_∞ est à valeurs dans les applications constantes ; il existe un compact C et une application continue v de $\mathbb{N}$ dans C telle que tout $\check{a}$ de A est de la forme $f \circ v$, où $f \in \mathcal{C}(C)$. On sait que $T_\infty \check{a}$ est constante, en fait T_∞ définit sur $\mathcal{C}(S)$ une mesure μ non négative bornée, d'après le théorème de représentation de Riesz :

$$T_\infty \check{a} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{p=1}^{N} f \circ v(n+p) = \int_C f \, d\mu ;$$

on constate que la suite v possède la mesure asymptotique μ sur C et on a l'habitude de dire que la suite v est uniformément répartie selon la mesure μ sur C : v est de forme $h \circ w$, où h est continue de $\mathcal{K}$ dans C.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{K} \arrow[d, "h"] \\ S \arrow[ur, "w"] \arrow[r, "v"'] & C \end{tikzcd}$$

La question naturelle qui se pose est celle de la recherche d'une algèbre maximale dans $\Gamma(S)$: dans certains cas, celle-ci est unique et coïncide avec $\mathcal{A}(S)$.

C'est le cas, par exemple, que l'on rencontre pour les suites $\theta^k (\mathrm{mod}\, 1)$ puisque, pour presque tout $\theta > 1$, ces suites sont uniformément équiréparties sur $\mathcal{K} \equiv \mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ (Franklin).

Nous avons étudié, au chapitre 1, les problèmes relatifs au prolongement hors $\mathcal{C}(C)$ de cette mesure asymptotique μ. Remarquons ici que ces développements coïncident avec la recherche de nouveaux éléments ergodiques dans des espaces topologiques moins restrictifs que $\mathcal{C}(S)$.

De plus, le prolongement purement classique de μ au sens de la théorie de l'intégration ne pose aucun problème puisque le théorème de Dini est valable dans $\mathcal{C}(C)$; ainsi $\perp_\infty$ est une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}(C)$ possédant la propriété de σ-continuité :

$$g_n \downarrow 0 \text{ sur } \mathcal{C}(C) \Longrightarrow \perp_\infty g_n \downarrow 0 ;$$

la théorie du prolongement de Daniell s'applique à μ (Cf. Tortrat).

II.2.4 - Autre type d'invariance : répartition sur un groupe -

Dans le cas où μ est invariante sur C pour un autre semi-groupe de transformations ponctuelles, il est intéressant d'introduire sur $\mathcal{C}(S)$ des transformations linéaires associées. Les démarches du chapitre I se rattachent à ces préoccupations. Par exemple, si C est un groupe topologique abélien, les translations forment un groupe abélien de transformations sur $\mathcal{C}(C)$: soit U_τ, $\tau \in C$, la translation $U_\tau f(\cdot) \equiv f(\cdot + \tau)$, $f \in \mathcal{C}(C)$. Soit maintenant un $\check{a}$ de $\mathcal{C}(S)$ tel que $a(n) \equiv f[v(n+p)]$; on posera

$$\mathcal{U}_\tau \check{a} \quad \text{le prolongement à } S \text{ de}$$

$$U_\tau a \,:\, U_\tau a(n) = f[v(n+p)+\tau].$$

On constate que les transformations $\mathcal{U}_\tau$ commutent avec T^p, $p \geq 0$ et se prolongent à tous les éléments de $\mathcal{C}(S)$ qui appartiennent à la fermeture $\mathcal{V}$ de l'algèbre engendrée par $\{f \circ v^p ; f \in \mathcal{C}(C), p \geq 0 \text{ entier}\}$:

$$\mathcal{V} \subset \mathcal{C}(S).$$

(T_N) est un s.i.p.i. pour ce groupe de transformations si et seulement si v est équirépartie complètement, c'est-dire uniformément répartie selon la mesure de Haar m de C^N. Dans ce cas, tous les éléments de $\mathcal{V}$ sont ergodiques et $\mathcal{V}$ est en isomorphisme isométrique avec $\mathcal{C}(C^N)$ à l'aide de la suite c à valeurs dans C^N :

$$n \rightsquigarrow c(n) \equiv [v(n), v(n+1), \ldots, v(n+p), \ldots] :$$

$$\forall a \in \mathcal{V},\ \exists f \in \mathcal{C}(C^N) : \quad a = f \circ c$$

$$\lim_{N \to \infty} T_N a = \int_{C^N} f(s)\, dm.$$

Remarque -

A la suite $u : \mathbb{N} \to C$, nous attachons donc les quadruplets $[\mathbb{N}, (\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}), C, v]$ et $[\mathbb{N}, (\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}), C^N, c]$ pour lesquelles v et c respectivement possèdent les mesures asymptotiques μ et m.

II.3 - CARACTERE ERGODIQUE DES CRITERES DE VAN DER CORPUT -

On connait le critère classique d'équirépartition de Van der Corput (Cf. Cassels). Nous désirons, ici, indiquer le caractère ergodique des critères de ce type; nous verrons ensuite comment il peut être rattaché à la notion d'"élément pseudo-aléatoire" (Cf. Bass, Bertrandias).

Nous travaillons ici plus précisément sur le critère du à H. Delange et généralisé par les travaux de E. Hlawka. J.P Bertrandias et J. Cigler.

(D) Soit une suite u à valeurs dans un groupe compact C à base dénombrable et la suite associée:

$$v : \ell, n \in \mathbb{N} \rightsquigarrow v(\ell,n) = u(n+\ell\nu) - u(n)$$

, où ν est un entier positif. μ et $\lambda \neq 0$ étant des entiers quelconques, pour que la suite $m \rightsquigarrow u(\lambda m+\mu)$ soit équirépartie sur C, il suffit que les suites $v(\ell,\cdot)$ soient équiréparties pour un ensemble de valeurs de ℓ de densité 1.

Remarque. Dans l'analyse qui suit nous allons constater que des suites telles que $m \rightsquigarrow u(\lambda m+\mu)$ sont des trajectoires de systèmes dynamiques construits à l'aide des mesures asymptotiques associées aux suites $v(\ell,\cdot)$.

II.3.1 - Compactification de $\mathbb{N}$ -

On munit $\mathbb{N}$ de la topologie qui rend continue chacune des suites

$$u^p = T^p u : n \in \mathbb{N} \rightsquigarrow u(n+p) \;,\; p \in \mathbb{N}.$$

Les suites

$$v(\ell,\cdot) = u(\ell\nu+\cdot) - u(\cdot) \quad \left(\in C^{\mathbb{N}}\right)$$

sont ainsi continues sur $\mathbb{N}$. Remarquons qu'elles sont construites à l'aide des translatées de $v(1,\cdot)$; soient $v^{\ell\nu}(1,\cdot) = v(1,\ell\nu+\cdot)$, $\ell = 0,1,2,\ldots$

$$\begin{aligned} v(\ell,\cdot) &= v(1,\cdot) + v^{\nu}(\ell-1,\cdot) \\ &= v(1,\cdot) + v^{\nu}(1,\cdot) + \cdots + v^{(\ell-1)\nu}(1,\cdot) \\ &= v(\ell-1,\cdot) + v^{(\ell-1)\nu}(1,\cdot). \end{aligned}$$

Pour certaines valeurs de ℓ, les suites $v(\ell,\cdot)$ sont équiréparties sur C ; (ℓ_k), $k=1,2,\ldots$ désignera la suite croissante de ces valeurs
$v_k \equiv v(\ell_k,\cdot)$ désignera la suite équirépartie correspondant à l'ehtier ℓ_k

On peut considérer sans restriction fondamentale (Cf. paragraphe II.2.1) que $\mathbb{N}$ est complètement régulier; on introduit alors un compactifié de Stone-Čech de $\mathbb{N}$ que l'on note par S.

Parmi les éléments de $\mathcal{C}(S)$, on trouve naturellement les prolongements à S des suites définies sur $\mathbb{N}$ par $f\circ v_k^p$, où $f\in\mathcal{C}(C)$, $k\in\mathbb{N}^+$ et $p\in\mathbb{N}$. $\mathcal{V}(S)$ désignera le sous-espace de Banach engendré par ces éléments. Remarquons dès maintenant que $\mathcal{V}(S)$ ainsi défini, n'est pas en général une algèbre de $\mathcal{C}(S)$

II.3.2 - Introduction de problèmes ergodiques -

Considérons l'ensemble des couples $(k,p)\in\mathbb{N}^+\times\mathbb{N}$ et le prolongement $\check{v}$ de v à S de la suite

$$n \rightsquigarrow v_k^p(n) \equiv u(\ell_k\nu+p+n)-u(p+n)$$

dont les valeurs sont dans $C^{\mathbb{N}^+\times\mathbb{N}}$.

Pour $(k,p)\in\mathbb{N}^+\times\mathbb{N}$, on a $v_k^p\equiv \mathrm{proj}_k^p\circ v$: chacune de ces suites est à valeurs dans C.

Pour tout g de $\mathcal{C}(C^{\mathbb{N}^+\times\mathbb{N}})$; $g\circ\check{v}$ est dans $\mathcal{C}(S)$.

Plus précisément, l'image de $\check{v}$ dans $C^{\mathbb{N}^+\times\mathbb{N}}$ est un compact Ω et $\mathcal{C}(\Omega)$ est isomorphe et isométrique à une sous-algèbre de $\mathcal{C}(S)$. Les éléments de la forme $f\circ\mathrm{proj}_k^p\circ\check{v}$, où $f\in\mathcal{C}(C)$, engendrent eux-mêmes le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(S)$ qu'on a noté $\mathcal{V}(S)$.

Dans le même esprit, notons par $\mathcal{P}(C^{\mathbb{N}^+\times\mathbb{N}})$ le sous-espace de $\mathcal{C}(C^{\mathbb{N}^+\times\mathbb{N}})$ qui est engendré par la famille

$$\left\{f\circ\mathrm{proj}_k^p\ ;\ (k,p)\in\mathbb{N}^+\times\mathbb{N},\ f\in\mathcal{C}(C)\right\}.$$

Sur cet espace, sont définis les deux applications linéaires suivantes T et V qui y commutent :

$$T(f \circ \mathrm{proj}_k^p) \equiv f \circ \mathrm{proj}_k^{p+1},$$

$$V(f \circ \mathrm{proj}_k^p) \equiv f \circ \mathrm{proj}_{k+1}^p.$$

Soit $G_{V,T}$ le semi-groupe ergodique engendré par l'identité et les transformations T et V (semi-groupe abélien).

Pour tout g de $\mathcal{S}(C^{N^+ \times N}) \subset \mathcal{C}(C^{N^+ \times N})$, on peut associer la famille d'éléments de $\mathcal{V}(S)$:

$$T^q V^h g \circ \check{v}, \quad \text{où} \quad q \in N,\ h \in N.$$

Avec $g = \sum_{i \in I} f_i \circ \mathrm{proj}_{k_i}^{p_i}$, I ensemble fini d'indices, $f_i \in \mathcal{C}(C)$ $(k_i, p_i) \in N^+ \times N$, on a :

$$T^q V^h g \circ \check{v} \equiv \sum_{i \in I} f_i \circ \check{v}_{k_i + k}^{p_i + q} \quad \in \mathcal{V}(S).$$

<u>L'hypothèse du théorème (D)</u> indique que pour chaque n et chaque h :

$$\lim_{Q \to \infty} \frac{1}{Q} \sum_{q=1}^{Q} T^q V^h g \circ v(n) = \sum_{i \in I} \int_C f_i \, d\mu$$

, où μ est la mesure de Haar normalisée sur C.

<u>Une conséquence du théorème (D)</u> est que pour chaque n et chaque q, on ait :

$$\lim_{H \to \infty} \frac{1}{H} \sum_{h=1}^{H} T^q V^h g \circ v(n) = \sum_{i \in I} \int_C f_i \, d\mu.$$

<u>II.3.3 - Discussion du caractère ergodique du théorème (D)</u>-

De façon générale, la translation sur N, $n \rightsquigarrow n+1$, introduit sur $\mathcal{C}(S)$ un semi-groupe abélien de transformations linéaires continues et de norme unité: soit G_T ; on lui adjoint l'identité.

G_T est ergodique et possède, en particulier, le système d'intégrales presque invariantes

$$(T_N) : \quad T_N \equiv \frac{1}{N} \sum_{q=1}^{N} T^q, \quad N = 1, 2, \ldots$$

Un problème plus général est la recherche des éléments ergodiques (ou moyennables) de $\mathcal{C}(S)$ pour G_T.

L'hypothèse du théorème (D) donne l'existence d'éléments ergodiques; quitte à modifier la topologie de $\mathcal{C}(S)$ (si l'équi-répartition n'est pas uniforme) en l'affaiblissant à la topologie de la convergence ponctuelle sur $\mathbb{N}$, ce que nous ferons dans la suite.

On constate que tous les éléments de $\mathcal{V}(S)$ sont G_T-ergodiques, leurs moyennes sont des constantes qui coïncident avec la mesure de Haar des éléments de $g \in \mathcal{S}(C^{\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}})$ qui ont servi à les définir.

Ainsi, à tout g de $\mathcal{S}(C^{\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}})$ la suite v (prolongée à S) associe une suite double $T^q V^k g \circ \check{v}$ d'éléments de $\mathcal{V}(S)$ possèdant la même moyenne pour le semi-groupe G_T. Cette moyenne est aussi celle de g pour le semi-groupe ergodique $G_{V,T}$ sur $\mathcal{S}(C^{\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}})$.

V engendre un semi-groupe G_V sur $\mathcal{S}(C^{\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}})$ qui est ergodique et qui possède comme système d'intégrales presque invariantes

$$(V_N): \quad V_N \equiv \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} V^k.$$

Une conséquence du théorème (D) est que dans $\mathcal{C}(S)$ la suite $(V_N\, g \circ \check{v})$ converge vers la moyenne commune de g pour $G_{V,T}$ et de $g \circ \check{v}$ pour G_T.

Ainsi, $(V_N\, g)$ converge vers une constante sur $\Omega \equiv \mathrm{Im}(\check{v})$. D'une façon analogue, $(V_N T g)$ converge vers la même constante sur $T\Omega \equiv \mathrm{Im}(T\check{v})$.

De façon plus générale, si $\Omega \equiv \bigcap_{(k,q)\in \mathbb{N}^2} T^q V^k \Omega$ est un compact non vide, $V_N g - V_N T g$ converge vers 0 sur Ω ; (V_N) apparait alors comme un système d'intégrales presque invariantes pour le semi-groupe $G_{V,T}$ défini sur l'espace vectoriel des restrictions des g de $\mathcal{S}(C^{\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}})$ à Ω, on pourra le noter $\mathcal{S}(\Omega)$.

La limite de $(V_N g)$ en un point de Ω est la moyenne de g le long de la trajectoire de ce point pour les itérées de la transformation V, considérée comme transformation ponctuelle sur Ω.

Exemple des suites θ^n.

Quoique l'existence même de Ω non vide ne semble pas fondamentale, on peut citer des cas où Ω coïndice avec $C^{\mathbb{N}^+\times\mathbb{N}}$. Prenons un nombre $\theta > 1$ et supposons que tout élément du module (algébrique) sur $\mathbb{Z}$ engendré par θ soit normal pour la suite θ^n (Pour la notion de nombre normal pour une suite : Cf. Rauzy). Alors la suite $n \rightsquigarrow \theta^n \ (mod 1)$ satisfait l'hypothèse du théorème (D) avec $\gamma = 1$; $n \rightsquigarrow v_k^r(n) = \theta^{n+r}(\theta^k - 1), (mod 1)$, est complètement équirépartie sur $(\mathbb{T}^1)^{\mathbb{N}^+\times\mathbb{N}}$, où $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$; dans ce cas, $\Omega = (\mathbb{T}^1)^{\mathbb{N}^+\times\mathbb{N}}$.

II.4 - ANALYSE ERGODIQUE DU CARACTERE PSEUDO-ALEATOIRE -

Les fonctions pseudo-aléatoires ont été introduites par J. Bass ; J.P. Bertrandias a montré les rapports entre les critères de Van der Corput-Delange et le caractère pseudo-aléatoire afin de dégager de nouveaux critères d'équirépartition : sous le même aspect, nous retenons le caractère pseudo-aléatoire comme critère ergodique basé sur le fait suivant : une fonction pseudo-aléatoire est de moyenne nulle.

Ce caractère pseudo-aléatoire peut être défini sur tout espace vectoriel topologique localement convexe pour un semi-groupe ergodique; nous l'introduisons ici sur $\mathcal{C}(S)$ pour le semi-groupe G_T, par exemple, (Cf. paragraphe II.3.1). Plus loin, à l'occasion de l'étude des polynômes de Weyl nous verrons que ce semi-groupe G_T est rattaché à un semi groupe de transformations ponctuelles affines sur le tore de dimension finie.

$\mathcal{C}(S)$ est muni de la topologie de la convergence ponctuelle sur $\mathbb{N}$.

La définition de J.P. Bertrandias devient :

Définition 1. On dit que g de $\mathcal{C}(S)$ est pseudo-aléatoire pour le semi-groupe G_T si :

i) pour tout entier k, sauf peut être sur un ensemble de densité nulle, l'élément $\bar{g}\, T^k g$ est G_T-ergodique; soit $\gamma(k) = T_\infty(\bar{g}\cdot T^k g)$, $\gamma(k)$ est alors constant;

ii) la "suite d'autocorrélation" γ est telle que

$$\lim_{H\to\infty} \frac{1}{H}\sum_{k=1}^{H} |\gamma(k)|^2 = 0.$$

Lorsque $\mathcal{C}(S)$ est muni de la topologie de la convergence uniforme, on pourra introduire une définition analogue pour des éléments uniformément pseudo-aléatoires.

Montrons maintenant que le caractère pseudo-aléatoire mène à un critère ergodique. Dans ces questions, l'inégalité de Van der Corput joue le rôle prédominant (elle avait conduit J.P. Bertrandias à étendre le caractère pseudo-aléatoire à des éléments appelés quasi-pseudo-aléatoires).

Les valeurs d'adhérence de la suite $(T_N g)$ dans $\mathcal{C}(S)$ sont nécessairement des constantes ; nous les majorerons à l'aide des suites $T_N(\bar{g}\,T^k g)$.

Rappelons l'inégalité de Van der Corput pour une suite (c_q) de nombres complexes; H et N étant entiers, on a :

$$H^2\left|\sum_{q=1}^{N} c_q\right|^2 \leqslant H(H+N+1)\sum_{1\leqslant q\leqslant N}|c_q|^2 + (H+N+1)\sum_{0<k<H}(H-k)\sum_{1\leqslant q\leqslant N-k}\mathcal{R}e\left[\bar{c}_q\, c_{q+k}\right].$$

Posons $\overline{M}_q(c_q) = \overline{\lim_{N\to\infty}}\ \dfrac{1}{N}\sum_{q=1}^{N} c_q$ et $\underline{M}_q(c_q) = \underline{\lim_{N\to\infty}}\ \dfrac{1}{N}\sum_{q=1}^{N} c_q$.

Avec l'inégalité précédente, on a :

$$(1)\qquad \left|\overline{M}_q(c_q)\right|^2 \leqslant 2\ \underline{M}_k\ \overline{M}_q\left[\mathcal{R}e\left(\bar{c}_q\ c_{q+k}\right)\right].$$

Une autre majoration peut s'obtenir avec la décomposition suivante, où $\nu \in \mathbb{N}^*$: posons $N \equiv [N]\,\nu$, $[N] \in \mathbb{N}$ et $q = [q]\nu + (q)$, $[q] \in \mathbb{N}$

$0 \leqslant (q) < \nu$; il vient:

$$\frac{1}{N}\sum_{q=0}^{N-1} c_q = \frac{1}{\nu}\sum_{(q)=0}^{\nu-1}\frac{1}{[N]}\sum_{[q]=0}^{[N]-1} c_{[q]\nu+(q)}$$

et par conséquent :

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{q=0}^{N-1} c_q\right|^2 \leqslant \frac{1}{\nu}\sum_{(q)=0}^{\nu-1}\left|\frac{1}{[N]}\sum_{(q)=0}^{[N]-1} c_{[q]\nu+(q)}\right|^2.$$

On a donc:

$$\left|\overline{M}_q(c_q)\right|^2 \leqslant \overline{\lim_{N\to\infty}}\ \frac{1}{\nu}\sum_{(q)=0}^{\nu-1}\left|\frac{1}{[N]}\sum_{[q]=0}^{[N]-1} c_{[q]\nu+(q)}\right|^2.$$

Avec $\left|\overline{M_{[q]}}\left(c_{[q]\nu+(q)}\right)\right|^2 \leqslant 2\ \underline{M_k}\ \overline{M_{[q]}}\left\{\mathcal{R}e\left[\overline{c_{[q]\nu+(q)}}\ c_{([q]+k)\nu+(q)}\right]\right\},$

on retient l'inégalité:

(2) $$\left|\overline{M_q}(c_q)\right|^2 \leqslant 2\ \underline{M_k}\ \overline{M_q}\left[\mathcal{R}e\left(\overline{c_q}\ c_{q+k\nu}\right)\right].$$

Définition 2. On dit que g de $\mathcal{C}(S)$ est de type pseudo-aléatoire pour le groupe G_T, s'il existe un ν de $\mathbb{N}^+$ tel que :

i) pour tout entier k, sauf peut être pour un ensemble de densité nulle, l'élément $\bar{g}\cdot T^{k\nu}g$ est G_T-ergodique : soit $\gamma_\nu(k) \equiv T_\infty(\bar{g}.T^{k\nu}g)$, $\gamma_\nu(k)$ est alors indépendant de n sur S.

ii) la famille γ_ν est telle que $\underline{M_k}\left\{\mathcal{R}e\left[\gamma_\nu(k)\right]\right\} = 0.$

Lorsque $\mathcal{C}(S)$ est muni de la topologie de la convergence uniforme, on pourra introduire une définition analogue pour les éléments de type uniformément pseudo-aléatoires.

L'inégalité de Schwarz permet de montrer qu'un élément (uniformément) pseudo-aléatoire est de type (uniformément) pseudo-aléatoire.

Théorème. Tout élément g de $\mathcal{C}(S)$ de type pseudo-aléatoire (resp. uniformément pseudo-aléatoire) pour le semi groupe G_T est G_T-ergodique pour la topologie de la convergence ponctuelle (resp. uniforme) sur $\mathbb{N}$ pour $\mathcal{C}(S)$. De plus, la moyenne de g est nulle.

Cela résulte immédiatement des inégalités introduites et des définitior retenues.

Exemple 1. Plus particulièrement maintenant, supposons que C soit un groupe abélien. Le critère de Van der Corput est relatif au cas $\nu = 1$, pour χ caractère non constant du groupe compact abélien C, on pose $c_q = \chi \circ u^q$;
alors $\overline{c_q}\cdot c_{q+k} = \chi(u^{q+k} - u^q)$ et par hypothèse :

$$\forall k \neq 0,\quad M_q\left[\chi(u^{q+k} - u^q)\right] = \int_C \chi\, ds = 0 \ ;$$

$(\chi \circ u^p)$, $p \in \mathbb{N}$, χ caractère non constant de C, est une famille d'éléments pseudo-aléatoires de $\mathcal{C}(S)$. Ces éléments sont ergodiques ainsi que toute limite dans $\mathcal{C}(S)$ de combinaisons linéaires de tels éléments; en particulier, pour tout f de $\mathcal{C}(C)$, on a l'élément ergodique $f \circ u^p$, avec $T_\infty(f \circ u^p) = \int_C f\,ds$. On trouve ainsi que u est é.r. sur C.

Exemple 2. On tire les mêmes conclusions pour $\nu \in \mathbb{N}^+$; c'est le critère de H. Delange (Cf. J.P. Bertrandias) : avec $c_q \equiv \chi \circ u^q$ et $\overline{c_q} \cdot c_{q+k\nu}$ $= \chi(u^{q+k\nu} - u^q) = \chi \circ v_k^q$, l'équirépartition des suites v_k^q indique que $\chi \circ u^p$ est de type pseudo-aléatoire pour tout p de $\mathbb{N}$ et χ caractère non constant de C.

Remarque. L'hypothèse de H. Delange indique que pour tout caractère non constant χ du groupe abélien compact C et pour tout $(k,p) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}$, l'élément $\chi \circ v_k^p$ de $\mathcal{V}(S)$ est ergodique; pour le semi-groupe $G_{V,T}$, $\chi \circ proj_k^p$ est ergodique.

Exemple 3. (En liaison avec l'étude du paragraphe II.3.3).

Puisque (V_N) est un s.i.p.i. pour $G_{V,T}$ sur $\mathcal{S}(\Omega)$, il est intéressant de remarquer que $\chi \circ proj_k^p$ est pseudo-aléatoire pour le semi-groupe G_V opérant sur $\mathcal{S}(\Omega)$.

En effet, posons $g \equiv \chi \circ v_k^p$; on a

$$\bar{g} \cdot V^h g = \overline{\chi \circ v_k^p} \cdot \chi \circ v_{k+h}^p = \chi[v_{k+h}^p - v_k^p] = \chi \circ v_k^{p+h\nu};$$

$\chi \circ proj_k^{p+h\nu}$ est G_V-ergodique puisque

$$\lim_{N\to\infty} V_N(\chi \circ v_k^{p+h\nu}) = \lim_{N\to\infty} T_N(\chi \circ v_k^{p+h\nu}) = \int_C \chi\,ds = 0.$$

On a donc $\gamma(h) = V_\infty(\bar{g}\, V^h g) = 0$, pour $h \in \mathbb{N}^+$.

Alors $\lim_{H\to\infty} \frac{1}{H} \sum_{h=1}^{H-1} |\gamma(h)|^2 = 0$; d'où le résultat.

II.5 - REPARTITION UNIFORME SUR $\mathbb{T}^d$ ASSOCIEE A UNE FAMILLE DE FORMES -

On considère d formes homogènes L_i, $i=1,d$, définies sur $\mathbb{R}^m$, $m>0$.
Pour $x \equiv (x_j) \in \mathbb{N}^m$, on a $Lx \equiv [L_i(x)]_{i=1,d}$ où :

$$L_i(x) = \sum_{j=1}^{m} \theta_i^j x_j \ , \ i=1,d, \ \theta_i^j \in \mathbb{R}.$$

Sur $\mathbb{T}^d$, considérons le semi-groupe, indicé par $\mathbb{N}^m$, des translations Lx définies par.

$$Lx : \quad s \equiv (s_i)_{i=1,d} \in \mathbb{T}^d \rightsquigarrow s + Lx \equiv [s_i + L_i(x)]_{i=1,d} \in \mathbb{T}^d$$

Sur $\mathcal{C}(\mathbb{T}^d)$, G désignera le semi-groupe des U_{Lx} tels que $U_{Lx} f \equiv f(\cdot + Lx)$. G est borné et abélien, donc ergodique.

Comme pour $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^d)$, l'ensemble $(U_{Lx} f \, ; \, x \in \mathbb{N}^m)$ est borné dans son ensemble et équicontinu, f est presque-périodique; ainsi dans ce cas tout élément f de $\mathcal{C}(\mathbb{T}^d)$ est ergodique : $\mathcal{U} = \mathcal{C}(\mathbb{T}^d)$.

On peut construire un système d'intégrales presque invariantes pour G à l'aide des transformations suivantes :

pour $X \in \mathbb{N}^m$, considérons

$$A(X) \equiv \frac{1}{X_1 X_2 \cdots X_m} \sum_{x \leq X} U_{Lx} \ ,$$

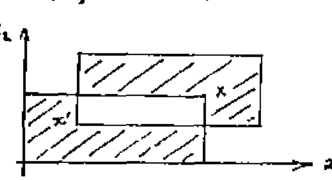
où $x \leq X$ veut dire $x_j \leq X_j$, $1 \leq j \leq m$.

La famille $A(X)$ est un s.i.p.i pour G, si pour tout $x' \in \mathbb{N}^m$ on a

$$\lim_{X \to \infty} [A(X) U_{Lx'} - A(X)] f = 0 \ , \ f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^d).$$

Or le crochet ci-dessus est majoré uniformément sur $\mathcal{C}(\mathbb{T}^d)$ par

$$2 \sum_{j=1}^{m} \frac{x'_j}{X_j} \ ,$$



expression qui tend vers 0 lorsque chacun des X_j tend vers l'infini.

$(A(X) f)$ converge alors vers un élément $\bar{f}$ de $\mathcal{C}(\mathbb{T}^d)$, appartenant à l'orbite $\overline{G^* f}$ et cet élément est invariant par G (Cf. théorème ergodique abstrait d'Eberlein.) :

$$Lx(\bar{f}) = \bar{f} \quad , \forall x \in \mathbb{N}^m.$$

$\bar{f}$ apparait constante sur les ensembles de points de $\mathbb{T}^d$ invariants par G . On introduit alors la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{T}^d$: $s \equiv s' \pmod{\mathcal{R}}$, s'il existe x de $\mathbb{Z}^m$ tel que $s - s' = Lx$.

Soit g_0 le sous-groupe fermé engendré par les éléments $(Lx)_{x \in \mathbb{Z}^m}$ dans $\mathbb{T}^d$. $\bar{f}$ est constante sur les classes de $\mathbb{T}^d$ modulo g_0. $\bar{f}$ apparait donc essentiellement comme un élément de $\mathcal{C}[\mathbb{T}^d/g_0]$.

On connait le théorème de Kronecker (Cf. Cassels) :

Pour $\alpha \in g_0$ et $u \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\sum_{i=1}^{d} u^i L_i = 0$, on a $\sum_{i=1}^{d} \alpha_i u^i = 0 \pmod 1$. Inversement, soit α tel que pour tout u de $\mathbb{Z}^d$ avec $\sum_{i=1}^{d} u^i L_i$ on ait $\sum_{i=1}^{d} \alpha_i u^i = 0$, alors α appartient à g_0 .

Ainsi, si (L_i) est une famille linéairement indépendante, $\bar{f}$ est constante et vaut $\int_{\mathbb{T}^d} f d\mu$, où μ est la mesure de Haar normalisée de $\mathbb{T}^d$.

De façon générale, le groupe compact g_0 est déterminé également comme intersection des variétés $\sum_{i=1}^{d} u^i \alpha_i = 0$, où $\sum_{i=1}^{d} u^i L_i = 0$. Soit μ_0 la mesure de Haar de g_0 supposée normalisée.

Pour $s \in \mathbb{T}^d$, la classe d'équivalence $s+g_0$ est munie également d'une mesure notée μ_{s+g_0} , transportée par la translation : on a $\bar{f}(s) = \int_{\mathbb{T}^d} f \, d\mu_{s+g_0}$

Le groupe quotient $\mathbb{T}^d/g_0$ est lui-même muni d'une mesure de Haar normalisée ν et on a :

$$\int f d\mu = \int \bar{f} d\nu.$$

Si g_0 est discret la mesure μ_0 sera discrète et $\bar{f}(s)$ sera la moyenne arithmétique de f sur l'ensemble discret $s+g_0$. C'est essentiellement ce dernier aspect qui intervient dans l'utilisation d'un ordinateur, par exemple, pour la représentation des (L_i).

Bien entendu, enfin, nous retrouvons le fait suivant pour $m=1$, où chacune des formes L_i est représentée par un nombre θ_i , $i = 1, d$: une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(n\theta_i) \subset \mathbb{T}^d$ soit répartie uniformément est que les nombres (θ_i) soient linéairement indépendants.

II.6 - ASPECTS ERGODIQUES DES POLYNOMES DE WEYL -

II.6.1 - Transformations ponctuelles associées à un polynôme de Weyl -

Définitions -

Soit $\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$ un polynôme à coefficients réels. Si l'un des coefficients α_d, $d \leqslant n$, est irrationnel, on dit qu'il est polynôme de Weyl. Si $\alpha_{d+1}, \cdots, \alpha_n$ sont rationnels, α_d sera appelé coefficient directeur. Le polynôme sera dit réduit si $d = n$. On le notera par la suite à l'aide du couple (d, α_d).

On sait que la suite des valeurs d'un polynôme de Weyl réduit P prises sur les entiers naturels est d-équirépartie modulo 1 ; c'est-à-dire : la suite $\boxed{s_n = [P(n), P(n+1), \cdots, P(n+d-1)],\ n = 1, 2, \ldots}$ est équirépartie sur $\mathbb{T}^d$ (Cf. Franklin).

Soit donc $P(x) = \alpha_d x^d + \cdots + \alpha_0$, $\alpha_d \notin \mathbb{Q}$.

Etudions les relations de récurrence entre les valeurs $P(n)$, $n = 1, 2, \cdots$

Posant $\Delta P(n) = P(n+1) - P(n)$, on a $P(n+1) = (I + \Delta) P(n)$, où I est la transformation identité. De la même façon, $P(n+r) = (I + \Delta)^r P(n)$.

On a $\Delta^d P(n) = d!\, \alpha_d$, pour tout n.

L'identité $\Delta^d = (I + \Delta - I)^d = (I + \Delta)^d - d(I + \Delta)^{d-1} + \cdots$ donne :

$$d!\,\alpha_d = P(n+d) - d\,P(n+d-1) + C_d^2\, P(n+d-2) - \cdots + (-1)^d P(n).$$

On a donc une relation linéaire entre $P(n+d)$ et les composantes de s_n ; on écrit :

$$\boxed{s_{n+1} = A s_n + \tau,}$$

où A est la matrice à coefficients entiers :

$$A \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & & & \\ \dots & \dots & & 0 & 1 \\ (-1)^{d-1} & (-1)^{d} d & \dots & & d \end{bmatrix} \in \mathcal{H}om(\mathbb{T}^d ; \mathbb{T}^d).$$

On remarque que A est la matrice compagnon du polynôme $(1-\lambda)^d$. Sa forme réduite de Jordan est $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$

De plus, on a : $\tau \equiv (0, 0, \dots, d!\alpha_d) \in \mathbb{T}^d$.

La seule direction propre associée à A est $(1, 1, \dots, 1)$.

On a $\det(A) = 1$.

On associe à $P_a(d, \alpha_d)$ la transformation ponctuelle de $\mathbb{T}^d$, définie par

$$\varphi : s \longmapsto As + \tau . \qquad \text{On a} \qquad \varphi^n(s) = A^n s + A^{n-1}\tau + \dots + \tau.$$

Lemme 1 -

φ laisse invariante la suite (s_n) qui peut être considérée comme la trajectoire du point s_0 par le semi-groupe G engendré par φ.

De la même façon, prenons un point quelconque s de $\mathbb{T}^d$ et associons lui la suite $[\varphi^n(s)]_{n=0,1,2,\dots}$. Il existe un polynôme de Weyl réduit de degré directeur d, de coefficient directeur α_d : soit Q tel que $\varphi^n(s) = [Q(n), Q(n+1), \dots, Q(n+d-1)]$; ses coefficients des termes de degré inférieur à d sont entièrement déterminés par les valeurs $Q(n)$, $0 \leq n \leq d-1$: $s_0 = [Q(0), Q(1), \dots Q(d-1)]$.

Définition 4 -

On dira que deux <u>polynômes réduits de Weyl</u> sont <u>équivalents</u> s'ils ont même couple (d, α_d).

On peut les considérer, en effet, comme associés à deux points différents de $\mathbb{T}^d$, pour une même transformation affine φ ; les suites de Weyl correspondantes sont obtenues comme trajectoires de ces deux points par le semi-groupe G associé à φ.

Exemple -

Au polynôme θx^2, $\theta \notin Q$, est associé le couple $(2, \theta)$ et la transformation ponctuelle de $\mathbb{T}^2$:

$$s \rightsquigarrow \varphi(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 2\theta \end{bmatrix}.$$

La trajectoire du point $(\theta, 0)$ est la suite $\left[n^2\theta, (n+1)^2\theta\right]_{n \in \mathbb{N}}$.

II.6.2 - Ergodicité du semi-groupe associé à un polynôme de Weyl réduit -

Soit un polynôme de Weyl réduit (d, α_d) et G le semi-groupe correspondant.

Le semi-groupe G engendré sur $\mathcal{C}(\mathbb{T}^d)$ par $T : f \rightsquigarrow f \circ \varphi$ est abélien et borné donc ergodique.

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} T^n, \; N = 1, 2, \ldots \quad \text{est un s.i.p.i.}$$

Recherchons les éléments ergodiques de $\mathcal{C}(\mathbb{T}^d)$ par rapport à G.

Pour chaque s de $\mathbb{T}^d$, $T_N f(s)$ tend vers $\int f d\mu$, $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^d)$, lorsque N croît : ceci est une conséquence des propriétés des polynômes de Weyl et de leur équirépartition.

Comme la famille $(T_N f)_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, on a convergence faible de la suite $(T_N f)$ vers la constante $\int f d\mu$. Le théorème ergodique d'Eberlein indique que la convergence est forte et que tout élément de $\mathcal{C}(\mathbb{T}^d)$ est ergodique.

Théorème -

Sur les polynômes de Weyl réduits de la classe (d, α_d) les sommes de Weyl

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(s_n) \qquad \text{convergent uniformément vers} \quad \int f d\mu.$$

Cette propriété est équivalente **à la suivante :**

Le semi-groupe G associé à la classe (d, d_d) **est ergodique et tout** $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^d)$ est ergodique.

Remarque .

Il ne faut pas confondre l'ergodicité par rapport à G et celle relative au groupe des translations : ce sont deux notions distinctes.

Cependant la famille T_N est également un s.i.p.i. pour le semi-groupe engendré par T et les translations. On sait de plus que $\int f d\mu \in \overline{G^* f}$ et est invariant pour ce semi-groupe non commutatif.

Ces faits semblent expliquer très naturellement les propriétés des polynômes de Weyl.

II.6.3 - Caractéristiques pseudo-aléatoires des polynômes de Weyl.

Théorème -

La famille $(T^n f)$ n'est pas, en général, conditionnellement faiblement compact ; $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^d)$ n'est donc pas en général faiblement presque-périodique pour le semi-groupe G .

$T^n f \equiv f \circ \varphi^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ **serait une famille quasi-équicontinue (Cf. Dunford-Schwartz).**

Considérons une transformation semblable à celle qui est associée à une classe de polynômes de Weyl réduites sur $\mathbb{T}^d$. Soit

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **; considérons $p_1 \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^1)$, la première projection. Il vient :**

$p_1[\varphi^n(s)] = p_1[A^n s + A^{n-1}\tau + \cdots + \tau]$. Comme on a $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

avec $s \equiv (s_1, s_2)$, $\tau \equiv (\tau_1, \tau_2)$, il vient :

$$p_1\left[\varphi^n(s)\right] = s_1 + n s_2 + n\tau_1 + (n-1+n-2+\cdots+1)\tau_2 ,$$
$$= s_1 + n s_2 + n\tau_1 + \frac{n(n-1)}{2}\tau_2 .$$

La quasi-équicontinuité s'énoncerait de la façon suivante : pour toute suite (s_α) de points de $\mathbb{T}^2$ convergeant vers s, tout $\varepsilon > 0$ donné et tout α_0, il existerait un nombre fini d'indices $\alpha_1, \ldots, \alpha_m > \alpha_0$ tels que, pour tout n, pour au moins un indice α_i, $1 \leq i \leq m$: $\left|p_1\left[\varphi^n(s_{\alpha_i})\right] - p_1\left[\varphi^n(s)\right]\right| < \varepsilon$.

Cette dernière différence vaut $\| n(s_{\alpha_{i,2}} - s_2)\|$. La quasi-équicontinuité de $p_1 \circ \varphi^n$ entraînerait celle des fonctions $x \rightsquigarrow nx$ définies sur $[0,1[$. La famille $x \rightsquigarrow f(nx), f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^1)$ serait elle-même quasi-équicontinue et on aurait convergence uniforme des sommes $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(nx)$; ce dernier point n'est pas exact : on connaît la limite $\int f d\mu$, pour $x \notin \mathbb{Q}$, pour x rationnel, la limite n'est pas en général égal à $\int f d\mu$ (pour $x = \frac{1}{2}$, elle vaut, par exemple, $\frac{1}{2}\left[f(0) + f(\frac{1}{2})\right]$; la convergence ne peut pas être uniforme.

Pour f de $\mathcal{C}(\mathbb{T}^d)$, il est intéressant d'introduire les corrélations :

$$\gamma(k) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f\left[\varphi^{n+k}(s)\right]\cdot\bar{f}\left[\varphi^n(s)\right] = \int_{\mathbb{T}^d} f \circ \varphi^k \cdot \bar{f}\, d\mu .$$

<u>Définition -</u>

On dit que $f \circ \varphi^n$ est une <u>suite pseudo-aléatoire</u> si

$$M|\gamma|^2 = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} |\gamma(k)|^2 = 0 .$$

On sait qu'alors f est pseudo-aléatoire pour le semi-groupe engendré par φ .

Etudions ces corrélations pour les caractères de $\mathbb{T}^d$:

$$s \rightsquigarrow \langle K, s\rangle \ , \quad K \in \mathbb{T}^{d\wedge} \equiv \mathbb{Z}^d \ \ (\text{dual de } \mathbb{T}^d).$$

Plus précisément, évaluons les nombres

$$\gamma_k(K,L) = \int_{\mathbb{T}^d} \langle K, \varphi^k(s)\rangle \overline{\langle L, s\rangle}\, d\mu(s) \qquad (\mu \text{ est la mesure de Haar}).$$

Comme $\varphi^k(s) = A^k s + A^{k-1}\tau + \dots + \tau$, à un coefficient près ces nombres valent

$$\gamma'_k(K,L) = \int_{\mathbb{T}^d} \langle K, A^k s\rangle \overline{\langle L, s\rangle}\, d\mu(s) = \int_{\mathbb{T}^d} \langle A'^k K - L, s\rangle\, d\mu(s),$$ où A' est

la transposition de A. On a comme valeurs d'intégrales 1 ou 0, selon que $A'^k K - L$ est nul ou non.

Soient K et L fixés tels que, pour un k, $A'^k K = L$; alors $A'^{k'} K = L$ pour $k' \neq k$, si et seulement si

$K \in \operatorname{Ker}(A'^{k'-k} - I)$

; or ce noyau est celui de $A' - I$ qui est réduit à l'unique direction propre de A' : $\underline{K_0 = (1, 1, \dots, 1)}$.

si $K \in \mathbb{Z} K_0$ et si $L = K$, alors $\gamma'_k(K,K) = 1$, $\forall k$.

si $K \in \mathbb{Z} K_0$ et si $L \neq K$, alors $\gamma'_k(K,L) = 0$, $\forall k$.

si $K \notin \mathbb{Z} K_0$ $\gamma'_k(K,L) = 0$, sauf si $L = A'^k K$, mais

K et L étant fixés, ceci n'a lieu que pour une seule valeur de k.

<u>Théorème 2 -</u>

Tous les caractères sauf ceux qui sont associés au sous-groupe $\mathbb{Z} K_0$ de $\mathbb{Z}^d$ conduisent à des suites pseudo-aléatoires.

Pour $K \in \mathbb{Z}^d$, on a $\gamma(k) = \gamma'_k(K,K) \langle K, A^{k-1}\tau + \dots + \tau\rangle$; donc

$$|\gamma(k)|^2 = 1, \text{ si } K \in \mathbb{Z} K_0,$$
$$= 0, \text{ si } K \notin \mathbb{Z} K_0.$$

On a, soit $M|\gamma|^2 = 1$, soit $M|\gamma|^2 = 0$.

Théorème 3 -

Les éléments f de $\mathcal{C}(\mathbb{T}^d)$ conduisant à une suite $(f\circ\varphi^n)$ pseudo-aléatoire forment le sous-espace vectoriel fermé engendré par les caractères non associés au sous-groupe $\mathbb{Z}K_0$ de $\mathbb{Z}^d$.

Remarquons d'abord l'inégalité $M|\gamma|^2 \leq \|f\|^4$. Plus généralement, si $\gamma_{f,g}$ est la suite de corrélation associée à f et g de $\mathcal{C}(\mathbb{T}^d)$, on a avec

$$\gamma_{f,g}(k) = \int_{\mathbb{T}^d} f\circ\varphi^k \, \bar{g} \, d\mu \; : \qquad M|\gamma_{f,g}|^2 \leq \|f\|^2\|g\|^2.$$

Il suffit, par conséquent, de s'intéresser aux polynômes trigonométriques $f(s) = \sum_K c_K \langle K, s\rangle$, où K parcourt un ensemble fini de $\mathbb{Z}^d$, $\mathcal{K}$, et $g(s) = \sum_H d_H \langle H, s\rangle$, où H parcourt un ensemble fini de $\mathbb{Z}^d$, $\mathcal{H}$.

On a :

$$f\circ\varphi^k \cdot \bar{g} = \Big(\sum_{K\in\mathcal{K}} c_K \langle A'^k K, \cdot\rangle \langle K, A^{k-1}\tau + \cdots + \tau\rangle\Big)\Big(\sum_{H\in\mathcal{H}} \bar{d}_H \langle -H, \cdot\rangle\Big)$$

$$= \sum_{K,H} c_K \bar{d}_H \langle A'^k K - H, \cdot\rangle \langle K, A^{k-1}\tau + \cdots + \tau\rangle \;, \; (K,H) \in \mathcal{K}\times\mathcal{H}.$$

L'intégration sur $\mathbb{T}^d$ ne retient dans la somme que les couples (K,H) tels que $A'^k K = H$. Pour k assez grand, il n'y a que les couples (K,H) tels que $K = H \in \mathbb{Z}K_0$. On a, dans ce cas : $\langle (A^{k-1} + \cdots + I)K, \tau\rangle = \langle K, k\tau\rangle$, donc :

$$|\gamma_{f,g}(k)|^2 = \Big|\sum_{K\in\mathbb{Z}K_0} c_K \; \bar{d}_K \; \langle K, k\tau\rangle\Big|^2$$

$$= \sum_{\substack{K,K' \\ \in \mathbb{Z}K_0}} c_K \bar{c}_{K'} \bar{d}_K d_{K'} \langle K - K', k\tau\rangle \;, \; K, K' \in \mathcal{K}\cap\mathcal{H}.$$

Dans la sommation sur k : $\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \langle L, k\tau\rangle \longrightarrow$ 1 ou 0, quand N tend vers l'infini selon que $L \in \mathbb{Z}K_0$ est nul ou non nul.

Au total, on a : $M|\gamma|^2 = \sum_{K\in\mathbb{Z}K_0} |c_K|^2 |d_K|^2 \;, \; K \in \mathcal{K}\cap\mathcal{H}.$

Le résultat tient même si $\mathcal{K}$ et $\mathcal{H}$ ne sont pas finis.

Ainsi, si f est tel que $M|\gamma|^2 = 0$, on a $\sum_{K\in\mathbb{Z}K_0} |c_K|^4 = 0$, il vient $c_K = 0$, pour tout K appartenant à $\mathbb{Z}K_0$, d'où le théorème.

References :

[1] N. ARONSZAJN : Theory of reproducing kernels. Trans. Amer. Math. Soc. 68, 337-404 (1950).

[2] A. AVEZ Une généralisation du théorème d'équiréparititon de Weyl. Bull. Cl. Sc. 5me série t. 1 III, Ac. Royale Belg. (1967).

[3] J. BASS et J. COUOT Un théorème d'arithmétique et son application à la théorie des moyennes dans l'espace de Hilbert. C. R. Acad. Sc. Paris 269, 1194-1197 (1969).

[4] J. BASS - Publ. de l'Inst. de Stat. de l'Univ. de Paris 9, n° 3, 289-325 (1960).

- Les fonctions pseudo-aléatoires, - Paris, Mémorial des sciences mathématiques, 153, Gauthier-Villars 1962.
- Suites uniformément denses, moyennes trigonométriques, fonctions pseudo-aléatoires. Bull. Soc. Math. France 87, 1-64 (1959).
- Méthodes mathématiques de la turbulence.

[5] J. P. BERTRANDIAS :

- Publ. de l'Inst. de Stat. de l'Univ. de Paris, 9, n° 4, 335-357 (1960).
- Espaces de fonctions bornées et continues en moyenne asymptotique d'ordre p (thèse). Bull. Soc. Math. France, Mémoire n° 5 (1966).
- Suites pseudo-aléatoires et critères d'équirépartition modulo 1. Comp. Math. 16 , 23-28 (1964).
- Espaces L^p relatifs à une famille de mesures. Annales de l'Inst. Fourier. Tome XXI fasc. 4 (1971).
- Opérateurs subordinatifs sur des espaces de fonctions bornées en moyenne quadratique. J. Math. pures et appl. 52, 27-63 (1973).

[6] J. P. BERTRANDIAS et G. MURAZ

- Espaces à accouplements et représentations de groupes. C. R. Acad. Sc. Paris 275 (nov. 1972).
- Opérateurs subordinatifs dans un espace à accouplements. C. R. Acad. Sc. Paris 275 (déc. 1972).

[7] P. BILLINGSLEY: Convergence of Probability measures. Wiley 1968.

[8] N. BOURBAKI : Eléments de Mathématiques. Intégration. Chap. IX, Hermann. 1969.

[9] J. W. S. CASSELS : An introduction to diophantine approximations. Cambridge University Press. 1965.

[10] J.CHAUVINEAU : Equirépartition et équirépartition uniforme - Séminaire Delange-Pisot 3, n° 7, 35 (1961-1962).

[11] J. CIGLER : Ueber eine Verallgemeinerung des Hauptsazes des theorie der gleich-verteilung - J. reine angew. Math. 210, 141-147 (1962).

[12] J. COUOT : 1 - Application des suites $n\theta$ à l'intégration numérique C. R. Acad. Sc. Paris 264,183-186 (1967).

2 - Application des suites $n\theta$ à l'intégration multiple sur le tore - C. R. Acad. Sc. Paris 266, 131-134 (1968).

3 - Convergence sûre de méthodes arithmétiques de Monte-Carlo pour l'inversion d'un opérateur linéaire. C. R. Acad. Sc. Paris 267, 799-802 (1968).

4 - Voir J. Bass.

5 - Espaces de Hilbert associés à des fonctions compa rables. C. R. Acad. Sc. Paris 270, 1009-1012 (1970).

6 - Ergodicité et critères topologiques d'équirépartition. C. R. Acad. Sc. Paris 272, 1045 - 1048 (1971).

7 - Mesures asymptotiques, équirépartition et mécanique quantique. Séminaire d'analyse numérique, U. E. R. Math. Univ. Paul Sabatier, Toulouse 1971-1972.

8 - Mesures asymptotiques, moyennes et théorie ergodique de l'équirépartition - Thèse Univ. Paris VI 1974.

[13] J. G. DHOMBRES : Sur les opérateurs multiplicativement liés (Thèse 1970) - Bull. Soc. Math. France, Mémoire n° 27 (1972).

[14] M. DUC-JACQUET : Approximation des fonctionnelles linéaires sur les espaces hilbertiens autoreproduisants - Thèse, Univ. scientifique et médicale de Grenoble 1973.

[15] N. DUNFORD et J. T. SCHWARTZ : Linear operators - Part 1, 2, Int. Publ. 1967.

[16] W. F. EBERLEIN : Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions - Trans. Am. Math. Soc., 217-241 (1949).

[17] P. EYMARD : Suites e. r. sur un groupe compact. Séminaire Delange Pisot 1, Institut Henri Poincaré , Paris 1960-1961.

[18] J. N. FRANKLIN: Deterministic Simulation of Random Processes- Math. Comp. 17 (1963).

[19] H. FURSTENBERG : Stationary processes and prediction theory - Princ. Univ. Press 1960.

[20] P. R. HALMOS : Permutations of sequences and the Schröder-Bersntein theorem - Proc. Am. Math. Soc. 19, 509-510 (1968).

[21] J. H. HALTON et S. K. ZAREMBA : The extreme and L^2-Discrepancies of some plane sets. Monatshefte für Mathematik 73, 316-328 (1969).

[22] Ph. HARTMAN, E. R. van KAMIEN and A. WINTNER
- Mean motions and distribution functions - Am. J. Math. 59, 261-269 (1937).
- On the distribution functions of almost periodic functions. Am. J. Math. 50, 491-500 (1938).

[23] S. HARTMAN Sur les bases statistiques - Studia Mathematica 10, 120 (1948).

[24] E. HLAWKA
- Erbliche Ergenschaften in der theorie der gleichverteilung - Publ. Math. Debiecen 7, 181-186 (1960).
- Funktionen von beschränkter Variation in der theorie der gleichverteilung - Ann. Mat. Pura Appl. (IV) 54, 325-334 (1961).
- Zur angenäherten Berechnung mehrfacher Integrale- Monatsh. Math. 66, 140-151 (1962).

[25] K. JACOBS Neuere Methoden und Ergebnisse der ergoden Theorie- Berlin, Springer-Verlag 1960.

[26] M. KAC et H. STEINHAUS Sur les fonctions indépendantes (IV)-Studia Mathematica 7, 1(1938).

[27] J. F. KOKSMA
- Diophantische Approximationen - 1936.
- A general theorem from the theory of uniform distribution modulo 1 - Math. Zutphen B 11, 7-11 (1942).

[28] L. KUIPERS Remark on the Weyl-Scheinberg criterium in the theory of asymptotic distribution of real numbers-Nieuw Archief voor Wiskunde 3, XVI, 197-202 (1968).

[29] B. LACAZE Sur l'échantillonnage des processus de Khintchine et ses applications - Thèse Univ. P. Sabatier, Toulouse 1970.

[30] P. J. LAURENT Thèse, Univ. de Grenoble 1964.

[31] J. LESCA
- Thèse, Univ. de Grenoble 1962.
- Séminaire, I. H. P., Delange-Pisot, Paris 1966.

[32] P. LEVY Processus stochastiques et mouvement brownien - Gauthier-Villars 1965.

[33] M. LOEVE Probability theory, third ed. Princeton, Van Nostrand 1963.

[34] L. H. LOOMIS An introduction to abstract Harmonic Analysis - Van Nostrand 1953.

[35] J. MARCINKIEWICZ : Une remarque sur les espaces de A. S. Besicovitch - C. R. Acad. Sc. Paris 208, 157-159 (1939).

[36] D. MURAZ
- Critères de compacité étroite sur un groupe abélien localement compact - Bull. Sc. Math. 2me série, 96, 263-271 (1972).
- Voir J. P. BERTRANDIAS.

[36] D. MURAZ - Critères de compacité dans les espaces de mesures bornées (thèse). Univ. de Grenoble 1973.

[37] J. VON NEUMANN: Charakterisierung des Spektrums eines Integral operators - Hermann, Paris, 11-12, 1935.

[38] J. NEVEU - Processus aléatoires gaussiens - Séminaire Univ. de Montréal, Eté 1968.

- Relations entre la théorie des martingales et la théorie ergodique - Ann. Inst. Fourier XV-I, 31-42 (1965).

[39] K.R. PARTHASARATHY : Probability measures on metric spaces. New-York, Acad. Press 1967.

[40] PHAM PHU HIEN : Sur les mesures asymptotiques. Thèse Univ. Paris VI 1972.

[41] A.G. POSTNIKOV: Modèles arithmétiques de processus stochastiques. Trad. S.D.I.T., Paris 1961.

[42] Yu. V. PROHOROV: Convergence of random processes and limit theorems in the probability theory. Teoriya I, 157-214, (SIAM) (1956).

[43] L. SCHWARTZ : Application des Distributions à l'Etude des Particules Elementaires en Mécanique Quantique Relativiste. Gordon-Breach 1969.

[44] H.S. SHAPIRO : Topics in approximation theory. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York 1971.

[45] H. STEINHAUS: - Sur les fonctions indépendantes (VII) et (VIII). Studia Mathématica 10, 1 (1948) et 11, 133 (1950).

- Voir M. KAC.

[46] F. TOPSOE Topology and measures - Lecture Notes in Mathematics, Springer 1969.

[47] A. TORTRAT - Répartition asymptotique des fonctions presque périodiques de Besicovitch. Trans. of the third Prague conf. on Random functions and inf. theory, 725-741 (1962).

- Calcul des Probabilités et Introduction aux processus aléatoires - Paris, Masson 1971.

[48] F. TREVES Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels. Academic Press 1967.

[49] V.S. VARADARAJAN

- Measures on topological spaces. Mat. Sbornik 55, 35-100 (1961).

- Geometry of quantum theory. Vol 1-2, Van Nostrand 1968.

[50] VO KHAC KHOAN: Etude des fonctions quasi-stationnaires et de leurs applications aux équations différentielles opérationnelles (thèse). Bull. Soc. Math. France, Mémoire n° 6 (1966).

[51] J.A. YORKE Permutations and two sequences with the same cluster set. Proc. Am. Math. Soc. vol 20, N2, 606 (1969).

[52] K. YOSIDA Functional Analysis - Springer Verlag 1969.

[53] S.K. ZAREMBA - Good lattice points in the sense of Hlawka and Monte-Carlo Integration - Monatshefte für mathematik 72, 264-269 (1968).

- The mathematical basis of Monte-Carlo and quasi-Monte-Carlo methods - S.I.A.M. Review, 303-314 (1968).

- Voir J.H. HALTON.

Ecole Nationale de l'Aéronautique et de l'Espace
Centre d'Etudes et de Recherches

2 Avenue Edouard Belin

31055 TOULOUSE Cedex