Chapitre 2

Arithmétique des pinceaux semi-stables de courbes de genre 1 dont les jacobiennes possèdent une section d'ordre 2

2.1 Introduction

À la suite des travaux de Colliot-Thélène, Skorobogatov et Swinnerton-Dyer [21] concernant les points rationnels des surfaces munies d'un pinceau de courbes de genre 1 et de période 2 dont les jacobiennes ont leur 2-torsion entièrement rationnelle, Bender et Swinnerton-Dyer [1] étudièrent la possibilité d'obtenir des résultats similaires pour les surfaces munies d'un pinceau de courbes de genre 1 et de période 2 dont les jacobiennes ont *au moins un* point d'ordre 2 rationnel. Leur conclusion fut que les techniques de [21] s'appliquent encore dans ce cadre, à condition d'effectuer des descentes par 2-isogénie simultanément sur deux familles de courbes elliptiques au lieu d'une simple 2-descente complète sur la fibration jacobienne du pinceau considéré. Ils aboutirent ainsi à deux théorèmes, de domaines d'application disjoints ; nous renvoyons le lecteur à [1, §1] pour leurs énoncés précis. Colliot-Thélène [14] reformula ensuite ces théorèmes et leurs preuves en termes d'obstruction de Brauer-Manin verticale.

À la fin de [1], Swinnerton-Dyer expose quelques idées laissant espérer que l'on puisse se servir du théorème 1 de [1] (ou du théorème B de [14]) afin d'établir qu'une surface de del Pezzo de degré 4 admet un point rationnel dès que l'obstruction de Brauer-Manin ne s'y oppose pas. Il s'avère que les résultats de [1, §6] sont incorrects mais que la construction proposée par Swinnerton-Dyer permet néanmoins de prouver que le principe de Hasse vaut sur de telles surfaces sous des conditions très générales, quoique au prix d'un travail conséquent ; c'est là le sujet du chapitre 3. Cependant, les théorèmes de [1] et de [14] sont insuffisants pour l'application en vue : ils contiennent plusieurs hypothèses techniques qui ne seront pas satisfaites par les pinceaux considérés au chapitre 3, notamment les conditions (1) et (2) de [14, Theorem B] (cf. aussi les conditions 1 et 2 de [1] et l'avant-dernier paragraphe de [1, p. 323] ; celui-ci contient un argument permettant d'affaiblir quelque peu les conditions 1 et 2, mais pour le chapitre 3 il est nécessaire de supprimer entièrement la condition 2).

O. Wittenberg, *Intersections de deux quadriques et pinceaux de courbes de genre 1*

Ce chapitre a pour but premier d'établir une version des théorèmes A et B de [14] épurée de toute hypothèse parasite et de laquelle il soit possible de déduire des résultats sur les surfaces de del Pezzo de degré 4. À cette fin, nous emploierons systématiquement les propriétés des modèles de Néron là où [1] et [14] font appel à des équations explicites. D'autre part, nous généraliserons au cas de réduction semi-stable arbitraire les théorèmes de [14], qui ne s'appliquent que lorsque la jacobienne de la fibre générique du pinceau considéré est à réduction de type I_1 ou I_2 en chaque point de mauvaise réduction, et nous supprimerons toute hypothèse concernant le rang de Mordell-Weil de cette courbe elliptique, comme au chapitre 1. Ces améliorations permettent notamment d'obtenir un seul énoncé qui implique à la fois les théorèmes A et B de [14] (et les théorèmes 1 et 2 de [1]), contribuant ainsi à les clarifier.

Les idées générales qui sous-tendent la preuve du théorème principal de ce chapitre sont bien sûr les mêmes que dans [1], [14], [21] ou que dans le chapitre 1. Néanmoins, leur mise en œuvre contient une innovation substantielle, qui mérite d'être signalée : l'argument se déroule directement au niveau des groupes de Selmer des courbes elliptiques concernées, sans plus passer par l'étude d'un certain accouplement dont les noyaux à gauche et à droite sont isomorphes à ces groupes de Selmer et dont la variation en famille est contrôlable. Les sous-espaces totalement isotropes maximaux K_v (cf. lemme 1.12, [21, Proposition 1.1.2], [1, Lemma 8], [14, Proposition 1.1.2]), dont le rôle semblait pour le moins mystérieux, ont ainsi totalement disparu. Cette modification de l'argument ne semble pas être une opération de nature purement formelle ; un indice en ce sens est l'utilisation dans la preuve ci-dessous de réciprocités dans lesquelles interviennent des algèbres de quaternions sur $k(t)$ qui n'avaient été considérées dans aucun des articles [1], [14], [21] (cf. paragraphe 2.3.4 et preuve de la proposition 2.20).

Outre la simplification conceptuelle que cette innovation apporte, elle représente un premier pas, quoique modeste, vers l'obtention de résultats indépendants de l'hypothèse de Schinzel. Nombre de notions (principe de Hasse, obstruction de Brauer-Manin) et d'outils (notamment, le « lemme formel » d'Harari) utiles dans l'étude des questions d'existence de points rationnels possèdent un analogue adapté aux questions d'existence de 0-cycles de degré 1. Dans ce contexte, l'analogue de l'hypothèse de Schinzel est un théorème, connu sous le nom d'astuce de Salberger (cf. [22, §3]). Grâce à ce théorème, on sait démontrer inconditionnellement l'existence d'un 0-cycle de degré 1 sur les surfaces admettant un pinceau de coniques, dès que l'obstruction de Brauer-Manin ne s'y oppose pas (cf. [22, §4]). Si l'on cherche à combiner l'astuce de Salberger et les méthodes de [21] afin d'étudier les 0-cycles de degré 1 sur des surfaces munies d'un pinceau de courbes de genre 1, on est naturellement confronté à deux difficultés, liées au fait que l'on doit comparer uniformément les groupes de Selmer de courbes elliptiques $\mathscr{E}_x$ pour divers points *fermés* (et non plus rationnels) $x \in \mathrm{U}$, où $\mathscr{E} \to \mathrm{U}$ est une courbe elliptique relative et U un ouvert de $\mathbf{P}^1_k$: d'une part, si S est un ensemble fixé de places de k, arbitrairement grand mais indépendant de x, on ne contrôle pas le groupe des S-unités du corps $\kappa(x)$, et d'autre part, on ne contrôle pas non plus le groupe de classes de S-idéaux de $\kappa(x)$. Le groupe des S-unités intervient dans le diagramme (1.16) ; quant au groupe de classes de S-idéaux, il est nécessaire qu'il soit nul pour que l'on puisse *définir* l'accouplement de la proposition 1.14 (resp. l'accouplement de [1, Lemma 10], [14, Proposition 1.4.3]). L'intérêt de la preuve que nous donnons dans ce chapitre est qu'en évitant l'emploi d'un accouplement analogue à celui de la proposition 1.14, elle fait tout simplement disparaître la seconde de ces difficultés ; nous ne supposerons à aucun moment qu'un quelconque ensemble fini de places de k contient un système de générateurs du groupe de classes.

2.2 Énoncé du résultat principal et applications

Soient k un corps de caractéristique 0 et C un schéma de Dedekind connexe sur k, de point générique η. Supposons donnée une surface X lisse et géométriquement connexe sur k, munie d'un morphisme propre et plat $\pi\colon \mathrm{X} \to \mathrm{C}$ dont la fibre générique X_η est une courbe lisse de genre 1 sur $\mathrm{K} = \kappa(\mathrm{C})$ et dont toutes les fibres sont réduites. Supposons de plus que la période de la courbe X_η divise 2, c'est-à-dire que la classe de $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathrm{E}'_\eta)$ définie par le torseur X_η soit tuée par 2, en notant E'_η la jacobienne de X_η. Supposons enfin que la courbe elliptique E'_η soit à réduction semi-stable en tout point fermé de C et qu'elle possède un point K-rationnel P′ d'ordre 2.

Notons E''_η la courbe elliptique quotient de E'_η par P′, $\varphi'_\eta\colon \mathrm{E}'_\eta \to \mathrm{E}''_\eta$ la 2-isogénie associée et $\varphi''_\eta\colon \mathrm{E}''_\eta \to \mathrm{E}'_\eta$ la duale de φ'_η, de sorte que $\varphi'_\eta \circ \varphi''_\eta = 2$ et $\varphi''_\eta \circ \varphi'_\eta = 2$. Le noyau de φ''_η contient un unique point K-rationnel non nul ; on le note $\mathrm{P}'' \in \mathrm{E}''_\eta(\mathrm{K})$. Soient $\mathscr{E}'$ et $\mathscr{E}''$ les modèles de Néron respectifs de E'_η et de E''_η sur C. D'après la propriété universelle des modèles de Néron, les isogénies φ'_η et φ''_η se prolongent en des morphismes de schémas en groupes $\varphi'\colon \mathscr{E}' \to \mathscr{E}''$ et $\varphi''\colon \mathscr{E}'' \to \mathscr{E}'$. Ceux-ci induisent des morphismes surjectifs $\varphi'^0\colon \mathscr{E}'^0 \to \mathscr{E}''^0$ et $\varphi''^0\colon \mathscr{E}''^0 \to \mathscr{E}'^0$, où $\mathscr{E}'^0 \subset \mathscr{E}'$ et $\mathscr{E}''^0 \subset \mathscr{E}''$ désignent les composantes neutres.

Notons $\mathscr{M} \subset \mathrm{C}$ l'ensemble des points fermés de mauvaise réduction pour E'_η. C'est aussi l'ensemble des points fermés de mauvaise réduction pour E''_η, et la courbe elliptique E''_η est à réduction semi-stable en ces points (cf. [5, 7.3/7]). Fixons un ouvert dense $\mathrm{U} \subset \mathrm{C}$ au-dessus duquel π est lisse. Pour $\mathrm{M} \in \mathscr{M}$, notons respectivement F'_M et F''_M les $\kappa(\mathrm{M})$-schémas en groupes finis étales $\mathscr{E}'_\mathrm{M}/\mathscr{E}'^0_\mathrm{M}$ et $\mathscr{E}''_\mathrm{M}/\mathscr{E}''^0_\mathrm{M}$. Les morphismes φ' et φ'' induisent des morphismes $\varphi'_\mathrm{M}\colon \mathrm{F}'_\mathrm{M} \to \mathrm{F}''_\mathrm{M}$ et $\varphi''_\mathrm{M}\colon \mathrm{F}''_\mathrm{M} \to \mathrm{F}'_\mathrm{M}$.

Posons
$$\mathscr{M}' = \{\mathrm{M} \in \mathscr{M}\ ;\ \varphi'_\mathrm{M} \text{ est injectif}\}$$
et

$$\mathscr{M}'' = \{\mathrm{M} \in \mathscr{M} \,;\, \varphi''_{\mathrm{M}} \text{ est injectif}\}.$$

La proposition A.8 montre que $\mathscr{M}' \cap \mathscr{M}'' = \varnothing$ et que $\mathscr{M}' \cup \mathscr{M}'' = \mathscr{M}$. Elle montre aussi que les morphismes φ'_{M} et φ''_{M} s'insèrent dans des suites exactes

$$\begin{gathered} 0 \longrightarrow \mathrm{F}'_{\mathrm{M}} \xrightarrow{\varphi'_{\mathrm{M}}} \mathrm{F}''_{\mathrm{M}} \longrightarrow \mathbf{Z}/2 \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow \mathbf{Z}/2 \longrightarrow \mathrm{F}''_{\mathrm{M}} \xrightarrow{\varphi''_{\mathrm{M}}} \mathrm{F}'_{\mathrm{M}} \longrightarrow 0 \end{gathered} \tag{2.1}$$

si $\mathrm{M} \in \mathscr{M}'$ et

$$\begin{gathered} 0 \longrightarrow \mathbf{Z}/2 \longrightarrow \mathrm{F}'_{\mathrm{M}} \xrightarrow{\varphi'_{\mathrm{M}}} \mathrm{F}''_{\mathrm{M}} \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow \mathrm{F}''_{\mathrm{M}} \xrightarrow{\varphi''_{\mathrm{M}}} \mathrm{F}'_{\mathrm{M}} \longrightarrow \mathbf{Z}/2 \longrightarrow 0 \end{gathered} \tag{2.2}$$

si $\mathrm{M} \in \mathscr{M}''$.

Les suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}/2 \xrightarrow{\mathrm{P}'} \mathrm{E}'_{\eta} \xrightarrow{\varphi'_{\eta}} \mathrm{E}''_{\eta} \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}/2 \xrightarrow{\mathrm{P}''} \mathrm{E}''_{\eta} \xrightarrow{\varphi''_{\eta}} \mathrm{E}'_{\eta} \longrightarrow 0$$

induisent des suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathrm{E}''_{\eta}(\mathrm{K})/\operatorname{Im}(\varphi'_{\eta}) \longrightarrow \mathrm{K}^{\star}/\mathrm{K}^{\star 2} \xrightarrow{\alpha'} {}_{\varphi'_{\eta}}\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathrm{E}'_{\eta}) \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow \mathrm{E}'_{\eta}(\mathrm{K})/\operatorname{Im}(\varphi''_{\eta}) \longrightarrow \mathrm{K}^{\star}/\mathrm{K}^{\star 2} \xrightarrow{\alpha''} {}_{\varphi''_{\eta}}\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathrm{E}''_{\eta}) \longrightarrow 0.$$

Pour $\mathrm{M} \in \mathrm{C}$, notons $\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{\mathrm{M}}$ l'anneau strictement local de C en M et $\mathrm{K}^{\mathrm{sh}}_{\mathrm{M}}$ son corps des fractions. Rappelons que pour $\mathscr{E} \in \{\mathscr{E}', \mathscr{E}''\}$, si E_{η} désigne la fibre générique de $\mathscr{E} \to \mathrm{C}$, le groupe $\mathrm{H}^1(\mathrm{C}, \mathscr{E})$ s'identifie au noyau du produit $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathrm{E}_{\eta}) \to \prod_{\mathrm{M} \in \mathrm{C}} \mathrm{H}^1(\mathrm{K}^{\mathrm{sh}}_{\mathrm{M}}, \mathrm{E}_{\eta})$ (cf. suite exacte (1.1)). Notons respectivement $\mathfrak{S}_{\varphi'}(\mathrm{C}, \mathscr{E}')$ et $\mathfrak{S}_{\varphi''}(\mathrm{C}, \mathscr{E}'')$ les images réciproques des sous-groupes ${}_{\varphi'}\mathrm{H}^1(\mathrm{C}, \mathscr{E}') \subset {}_{\varphi'_{\eta}}\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathrm{E}'_{\eta})$ et ${}_{\varphi''}\mathrm{H}^1(\mathrm{C}, \mathscr{E}'') \subset {}_{\varphi''_{\eta}}\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathrm{E}''_{\eta})$ par α' et α'', de sorte que l'on obtient des suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathrm{E}''_{\eta}(\mathrm{K})/\operatorname{Im}(\varphi'_{\eta}) \longrightarrow \mathfrak{S}_{\varphi'}(\mathrm{C}, \mathscr{E}') \longrightarrow {}_{\varphi'}\mathrm{H}^1(\mathrm{C}, \mathscr{E}') \longrightarrow 0 \tag{2.3}$$

et

$$0 \longrightarrow \mathrm{E}'_\eta(\mathrm{K})/\operatorname{Im}(\varphi''_\eta) \longrightarrow \mathfrak{S}_{\varphi''}(\mathrm{C},\mathscr{E}'') \longrightarrow {}_{\varphi''}\mathrm{H}^1(\mathrm{C},\mathscr{E}'') \longrightarrow 0. \tag{2.4}$$

Les groupes $\mathfrak{S}_{\varphi'}(\mathrm{C},\mathscr{E}')$ et $\mathfrak{S}_{\varphi''}(\mathrm{C},\mathscr{E}'')$ méritent qu'on les appelle respectivement *groupe de φ'-Selmer géométrique de* E'_η et *groupe de φ''-Selmer géométrique de* E''_η (cf. [21, §4.2]).

Proposition 2.1 — *On a* $\mathfrak{S}_{\varphi'}(\mathrm{C},\mathscr{E}') = \mathrm{H}^1(\mathrm{C}\setminus\mathscr{M}',\mathbf{Z}/2)$ *et* $\mathfrak{S}_{\varphi''}(\mathrm{C},\mathscr{E}'') = \mathrm{H}^1(\mathrm{C}\setminus\mathscr{M}'',\mathbf{Z}/2)$ *en tant que sous-groupes de* $\mathrm{K}^\star/\mathrm{K}^{\star 2} = \mathrm{H}^1(\mathrm{K},\mathbf{Z}/2)$.

Démonstration — Les deux assertions étant symétriques, il suffit de démontrer la première. Vu la définition du groupe $\mathfrak{S}_{\varphi'}(\mathrm{C},\mathscr{E}')$, il suffit de prouver que $\mathrm{E}''_\eta(\mathrm{K}^{\mathrm{sh}}_{\mathrm{M}})/\operatorname{Im}(\varphi'_\eta) = \mathrm{H}^1(\mathrm{K}^{\mathrm{sh}}_{\mathrm{M}},\mathbf{Z}/2)$ pour tout $\mathrm{M}\in\mathscr{M}'$ et $\mathrm{E}''_\eta(\mathrm{K}^{\mathrm{sh}}_{\mathrm{M}})/\operatorname{Im}(\varphi'_\eta) = 0$ pour tout $\mathrm{M}\in\mathrm{C}\setminus\mathscr{M}'$. Autrement dit, compte tenu que $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}^{\mathrm{sh}}_{\mathrm{M}},\mathbf{Z}/2) = \mathbf{Z}/2$, il suffit de prouver que l'application $\mathrm{E}'_\eta(\mathrm{K}^{\mathrm{sh}}_{\mathrm{M}}) \to \mathrm{E}''_\eta(\mathrm{K}^{\mathrm{sh}}_{\mathrm{M}})$ induite par φ'_η est surjective si et seulement si $\mathrm{M}\notin\mathscr{M}'$, pour $\mathrm{M}\in\mathrm{C}$. Ceci résulte du lemme A.2, de la proposition A.8 et de la définition de $\mathscr{M}'$. □

Notons enfin $\mathfrak{S}_2(\mathrm{C},\mathscr{E}') \subset \mathrm{H}^1(\mathrm{K},{}_2\mathrm{E}'_\eta)$ l'image réciproque de $\mathrm{H}^1(\mathrm{C},\mathscr{E}') \subset \mathrm{H}^1(\mathrm{K},\mathrm{E}'_\eta)$ par le morphisme canonique $\mathrm{H}^1(\mathrm{K},{}_2\mathrm{E}'_\eta) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{K},\mathrm{E}'_\eta)$. Le morphisme φ' induit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{E}'_\eta(\mathrm{K})/2 \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{S}_2(\mathrm{C},\mathscr{E}') \arrow[r] \arrow[d] & {}_2\mathrm{H}^1(\mathrm{C},\mathscr{E}') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{E}'_\eta(\mathrm{K})/\operatorname{Im}(\varphi''_\eta) \arrow[r] & \mathfrak{S}_{\varphi''}(\mathrm{C},\mathscr{E}'') \arrow[r] & {}_{\varphi''}\mathrm{H}^1(\mathrm{C},\mathscr{E}'') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{2.5}$$

dont les lignes sont exactes.

Comme les fibres de π sont réduites, on a $\mathrm{X}_{\mathrm{M}}(\mathrm{K}^{\mathrm{sh}}_{\mathrm{M}}) \neq \varnothing$ pour tout $\mathrm{M}\in\mathrm{C}$. La classe de $\mathrm{H}^1(\mathrm{K},\mathrm{E}'_\eta)$ définie par le torseur X_η appartient donc au sous-groupe $\mathrm{H}^1(\mathrm{C},\mathscr{E}')$. Cette classe correspond à un faisceau représentable (cf. [50, Theorem 4.3]), d'où l'existence d'un torseur $\mathscr{X}\to\mathrm{C}$ sous $\mathscr{E}'$ dont la fibre générique est égale à X_η. Notons $[\mathscr{X}]$ sa classe dans $\mathrm{H}^1(\mathrm{C},\mathscr{E}')$ et $[\mathscr{X}''] \in \mathrm{H}^1(\mathrm{C},\mathscr{E}'')$ l'image de $[\mathscr{X}]$ par la flèche verticale de droite du diagramme (2.5).

Pour $\mathrm{M}\in\mathscr{M}$, notons L'_{M} (resp. $\mathrm{L}''_{\mathrm{M}}$) l'extension quadratique ou triviale minimale de $\kappa(\mathrm{M})$ sur laquelle le $\kappa(\mathrm{M})$-groupe F'_{M} (resp. $\mathrm{F}''_{\mathrm{M}}$) devient constant (cf. proposition A.3). Les groupes $\mathrm{F}'_{\mathrm{M}}(\mathrm{L}'_{\mathrm{M}})$ et $\mathrm{F}''_{\mathrm{M}}(\mathrm{L}''_{\mathrm{M}})$ sont cycliques en vertu de l'hypothèse de semi-stabilité (*loco citato*). Soient $\delta'_{\mathrm{M}}\colon \mathrm{H}^1(\mathrm{C},\mathscr{E}') \to \mathrm{H}^1(\mathrm{L}'_{\mathrm{M}},\mathrm{F}'_{\mathrm{M}})$ et $\delta''_{\mathrm{M}}\colon \mathrm{H}^1(\mathrm{C},\mathscr{E}'') \to \mathrm{H}^1(\mathrm{L}''_{\mathrm{M}},\mathrm{F}''_{\mathrm{M}})$ les composées des flèches induites par les morphismes de faisceaux $\mathscr{E}' \to i_{\mathrm{M}\star}\mathrm{F}'_{\mathrm{M}}$ et $\mathscr{E}'' \to i_{\mathrm{M}\star}\mathrm{F}''_{\mathrm{M}}$, où $i_{\mathrm{M}}\colon \operatorname{Spec}(\kappa(\mathrm{M})) \to \mathrm{C}$ désigne l'inclusion canonique, et des flèches de restriction $\mathrm{H}^1(\kappa(\mathrm{M}),\mathrm{F}'_{\mathrm{M}}) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{L}'_{\mathrm{M}},\mathrm{F}'_{\mathrm{M}})$ et $\mathrm{H}^1(\kappa(\mathrm{M}),\mathrm{F}''_{\mathrm{M}}) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{L}''_{\mathrm{M}},\mathrm{F}''_{\mathrm{M}})$. Soient $\mathfrak{T}'_{\mathrm{D}/\mathrm{C}}$ le noyau de l'application composée

$$ {}_{\varphi'}\mathrm{H}^1(\mathrm{C},\mathscr{E}') \xrightarrow{\prod \delta'_{\mathrm{M}}} \prod_{\mathrm{M}\in\mathscr{M}''} \mathrm{H}^1(\mathrm{L}'_{\mathrm{M}},\mathrm{F}'_{\mathrm{M}}) \longrightarrow \prod_{\mathrm{M}\in\mathscr{M}''} \frac{\mathrm{H}^1(\mathrm{L}'_{\mathrm{M}},\mathrm{F}'_{\mathrm{M}})}{\langle\delta'_{\mathrm{M}}([\mathscr{X}])\rangle} \tag{2.6} $$

et $\mathfrak{T}''_{\mathrm{D/C}}$ le noyau de l'application composée

$$ {}_{\varphi''}\mathrm{H}^1(\mathrm{C},\mathscr{E}'') \xrightarrow{\prod \delta''_{\mathrm{M}}} \prod_{\mathrm{M}\in\mathscr{M}'} \mathrm{H}^1(\mathrm{L}''_{\mathrm{M}},\mathrm{F}''_{\mathrm{M}}) \longrightarrow \prod_{\mathrm{M}\in\mathscr{M}'} \frac{\mathrm{H}^1(\mathrm{L}''_{\mathrm{M}},\mathrm{F}''_{\mathrm{M}})}{\langle\delta''_{\mathrm{M}}([\mathscr{X}''])\rangle}. \tag{2.7} $$

On dira que *la condition* (D/C) *est satisfaite* si $\mathfrak{T}'_{\mathrm{D/C}} \subset \{0,[\mathscr{X}]\}$ et si $\mathfrak{T}''_{\mathrm{D/C}}$ est engendré par $[\mathscr{X}'']$. Notons enfin $\mathfrak{S}'_{\mathrm{D/C}} \subset \mathfrak{S}_{\varphi'}(\mathrm{C},\mathscr{E}')$ et $\mathfrak{S}''_{\mathrm{D/C}} \subset \mathfrak{S}_{\varphi''}(\mathrm{C},\mathscr{E}'')$ les images réciproques respectives de $\mathfrak{T}'_{\mathrm{D/C}}$ et $\mathfrak{T}''_{\mathrm{D/C}}$ par les flèches de droite des suites exactes (2.3) et (2.4).

Supposons maintenant que k soit un corps de nombres et que C soit un ouvert de $\mathbf{P}^1_k$. On note comme précédemment Ω l'ensemble des places de k, $\Omega_f \subset \Omega$ l'ensemble de ses places finies et $\mathbf{A}_k$ l'anneau des adèles de k. Un élément de $\mathrm{K}^\star$ peut être considéré comme une fonction rationnelle non nulle sur $\mathbf{P}^1_{\mathscr{O}}$. Par ailleurs, chaque place finie de k définit un point de codimension 1 de $\mathbf{P}^1_{\mathscr{O}}$ et donc une valuation sur $\kappa(\mathbf{P}^1_{\mathscr{O}}) = \mathrm{K}$. On notera $\mathfrak{S}_{\varphi',\mathrm{S}}(\mathrm{C},\mathscr{E}')$ (resp. $\mathfrak{S}_{\varphi'',\mathrm{S}}(\mathrm{C},\mathscr{E}'')$) le sous-groupe de $\mathfrak{S}_{\varphi'}(\mathrm{C},\mathscr{E}')$ (resp. de $\mathfrak{S}_{\varphi''}(\mathrm{C},\mathscr{E}'')$) constitué des classes appartenant au noyau de la flèche $\mathrm{K}^\star/\mathrm{K}^{\star 2} \to (\mathbf{Z}/2)^{\Omega_f\setminus(\mathrm{S}\cap\Omega_f)}$ induite par les valuations normalisées associées aux places finies de $\Omega\setminus\mathrm{S}$, pour $\mathrm{S}\subset\Omega$.

Soit

$$ \mathscr{R}_{\mathrm{A}} = \{x\in\mathrm{U}(k)\,;\,\mathrm{X}_x(\mathbf{A}_k)\neq\varnothing\} $$

et pour $\mathrm{S}\subset\Omega$, soit $\mathscr{R}_{\mathrm{D/C,S}}$ l'ensemble des $x\in\mathscr{R}_{\mathrm{A}}$ tels que tout élément du groupe de φ'_x-Selmer de $\mathscr{E}'_x$ appartienne à l'image de la composée

$$ \mathfrak{S}'_{\mathrm{D/C}} \cap \mathfrak{S}_{\varphi',\mathrm{S}}(\mathrm{C},\mathscr{E}') \subset \mathfrak{S}_{\varphi'}(\mathrm{C},\mathscr{E}') = \mathrm{H}^1(\mathrm{C}\setminus\mathscr{M}',{}_{\varphi'}\mathscr{E}') \to \mathrm{H}^1(k,{}_{\varphi'_x}\mathscr{E}'_x) $$

(cf. proposition 2.1 ; la dernière flèche est l'évaluation en x), que tout élément du groupe de φ''_x-Selmer de $\mathscr{E}''_x$ appartienne à l'image de la composée

$$ \mathfrak{S}''_{\mathrm{D/C}} \cap \mathfrak{S}_{\varphi'',\mathrm{S}}(\mathrm{C},\mathscr{E}'') \subset \mathfrak{S}_{\varphi''}(\mathrm{C},\mathscr{E}'') = \mathrm{H}^1(\mathrm{C}\setminus\mathscr{M}'',{}_{\varphi''}\mathscr{E}'') \to \mathrm{H}^1(k,{}_{\varphi''_x}\mathscr{E}''_x), $$

et que les restrictions des flèches

$$ \mathfrak{S}_{\varphi'}(\mathrm{C},\mathscr{E}') = \mathrm{H}^1(\mathrm{C}\setminus\mathscr{M}',{}_{\varphi'}\mathscr{E}') \to \mathrm{H}^1(k,{}_{\varphi'_x}\mathscr{E}'_x) \tag{2.8} $$

et

$$ \mathfrak{S}_{\varphi''}(\mathrm{C},\mathscr{E}'') = \mathrm{H}^1(\mathrm{C}\setminus\mathscr{M}'',{}_{\varphi''}\mathscr{E}'') \to \mathrm{H}^1(k,{}_{\varphi''_x}\mathscr{E}''_x) \tag{2.9} $$

aux images réciproques respectives de $\{0,[\mathscr{X}]\}$ et de $\{0,[\mathscr{X}'']\}$ par les flèches

$$\mathfrak{S}_{\varphi'}(\mathrm{C}, \mathscr{E}') \to \mathrm{H}^1(\mathrm{C}, \mathscr{E}') \tag{2.10}$$

et

$$\mathfrak{S}_{\varphi''}(\mathrm{C}, \mathscr{E}'') \to \mathrm{H}^1(\mathrm{C}, \mathscr{E}'') \tag{2.11}$$

issues des suites exactes (2.3) et (2.4) soient injectives. Pour $\mathrm{S} = \Omega$, on note simplement $\mathscr{R}_{\mathrm{D/C}} = \mathscr{R}_{\mathrm{D/C},\Omega_f}$ l'ensemble $\mathscr{R}_{\mathrm{D/C,S}}$.

Lorsque $\mathrm{C} = \mathbf{P}^1_k$, on prend pour U le plus grand ouvert de $\mathbf{A}^1_k$ au-dessus duquel π est lisse et l'on note d'une part $\mathscr{R}_{\mathrm{D,S}}$, $\mathscr{R}_{\mathrm{D}}$, $\mathfrak{T}'_{\mathrm{D}}$, $\mathfrak{T}''_{\mathrm{D}}$, $\mathfrak{S}'_{\mathrm{D}}$, $\mathfrak{S}''_{\mathrm{D}}$ et (D) les ensembles $\mathscr{R}_{\mathrm{D}/\mathbf{P}^1_k,\mathrm{S}}$, $\mathscr{R}_{\mathrm{D}/\mathbf{P}^1_k}$, $\mathfrak{T}'_{\mathrm{D}/\mathbf{P}^1_k}$, $\mathfrak{T}''_{\mathrm{D}/\mathbf{P}^1_k}$, $\mathfrak{S}'_{\mathrm{D}/\mathbf{P}^1_k}$, $\mathfrak{S}''_{\mathrm{D}/\mathbf{P}^1_k}$ et la condition $(\mathrm{D}/\mathbf{P}^1_k)$, et d'autre part $\mathscr{R}_{\mathrm{D}_0,\mathrm{S}}$, $\mathscr{R}_{\mathrm{D}_0}$, $\mathfrak{T}'_{\mathrm{D}_0}$, $\mathfrak{T}''_{\mathrm{D}_0}$, $\mathfrak{S}'_{\mathrm{D}_0}$, $\mathfrak{S}''_{\mathrm{D}_0}$ et (D_0) les ensembles $\mathscr{R}_{\mathrm{D}/\mathbf{A}^1_k,\mathrm{S}}$, $\mathscr{R}_{\mathrm{D}/\mathbf{A}^1_k}$, $\mathfrak{T}'_{\mathrm{D}/\mathbf{A}^1_k}$, $\mathfrak{T}''_{\mathrm{D}/\mathbf{A}^1_k}$, $\mathfrak{S}'_{\mathrm{D}/\mathbf{A}^1_k}$, $\mathfrak{S}''_{\mathrm{D}/\mathbf{A}^1_k}$ et la condition $(\mathrm{D}/\mathbf{A}^1_k)$, étant entendu que $\mathscr{R}_{\mathrm{D}/\mathbf{A}^1_k,\mathrm{S}}$, $\mathscr{R}_{\mathrm{D}/\mathbf{A}^1_k}$, $\mathfrak{T}'_{\mathrm{D}/\mathbf{A}^1_k}$, $\mathfrak{T}''_{\mathrm{D}/\mathbf{A}^1_k}$, $\mathfrak{S}'_{\mathrm{D}/\mathbf{A}^1_k}$, $\mathfrak{S}''_{\mathrm{D}/\mathbf{A}^1_k}$ et la condition $(\mathrm{D}/\mathbf{A}^1_k)$ désignent les ensembles et la condition obtenus en appliquant les définitions ci-dessus avec $\mathrm{C} = \mathbf{A}^1_k$ après avoir restreint π au-dessus de $\mathbf{A}^1_k \subset \mathbf{P}^1_k$.

Le théorème principal de ce chapitre est le suivant.

Théorème 2.2 — *Admettons l'hypothèse de Schinzel. Supposons que* $\mathrm{C} = \mathbf{P}^1_k$ *et que la fibre de* π *au-dessus du point* $\infty \in \mathbf{P}^1(k)$ *soit lisse. Il existe alors un ensemble fini* $\mathrm{S}_0 \subset \Omega$ *et un sous-groupe fini* $\mathrm{B}_0 \subset \mathrm{Br}(\mathrm{U})$ *tels que l'assertion suivante soit vérifiée. Soient un ensemble* $\mathrm{S}_1 \subset \Omega$ *fini contenant* S_0 *et une famille* $(x_v)_{v\in\mathrm{S}_1} \in \prod_{v\in\mathrm{S}_1}\mathrm{U}(k_v)$. *Supposons que* $\mathrm{X}_{x_v}(k_v) \neq \varnothing$ *pour tout* $v \in \mathrm{S}_1 \cap \Omega_f$ *et que*

$$\sum_{v\in\mathrm{S}_1} \mathrm{inv}_v\, \mathrm{A}(x_v) = 0$$

pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{B}_0$. *Supposons aussi que pour toute place* $v \in \mathrm{S}_1$ *réelle, on ait* $\mathrm{X}_\infty(k_v) \neq \varnothing$ *et* x_v *appartienne à la composante connexe non majorée de* $\mathrm{U}(k_v)$. *Alors*

a) si $\mathscr{M}' \neq \varnothing$ *et* $\mathscr{M}'' \neq \varnothing$, *il existe un élément de* $\mathscr{R}_{\mathrm{D}}$ *arbitrairement proche de* x_v *en chaque place* $v \in \mathrm{S}_1 \cap \Omega_f$ *et arbitrairement grand en chaque place archimédienne de* k *;*

b) il existe un élément de $\mathscr{R}_{\mathrm{D}_0,\mathrm{S}_1}$ *arbitrairement proche de* x_v *en chaque place* $v \in \mathrm{S}_1 \cap \Omega_f$, *arbitrairement grand en chaque place archimédienne de* k *et entier hors de* S_1.

Voici les conséquences du théorème 2.2 pour l'existence et la Zariski-densité des points rationnels de X. Pour le restant de ce paragraphe, supposons que $\mathrm{C} = \mathbf{P}^1_k$ et que les ensembles $\mathscr{M}'$ et $\mathscr{M}''$ ne soient pas vides.

Théorème 2.3 — *Admettons l'hypothèse de Schinzel. Alors l'adhérence de* $\mathscr{R}_{\mathrm{D}}$ *dans* $\mathrm{C}(\mathbf{A}_k)$ *est égale à* $\pi(\mathrm{X}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_{\mathrm{vert}}})$.

Démonstration — Ce théorème se démontre à partir du théorème 2.2 exactement comme le théorème 1.49 se démontre à partir du théorème 1.4. □

Théorème 2.4 — *Admettons l'hypothèse de Schinzel et la finitude des groupes de Tate-Shafarevich des courbes elliptiques $\mathscr{E}'_x$ pour $x \in \mathrm{U}(k)$. Supposons que la condition* (D) *soit vérifiée et que* $\mathrm{X}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_{\mathrm{vert}}} \neq \varnothing$. *Alors* $\mathrm{X}(k) \neq \varnothing$. *Si de plus π ne possède pas de section, l'ensemble* $\mathrm{X}(k)$ *est Zariski-dense dans* X.

Démonstration — Supposons que $\mathrm{X}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_{\mathrm{vert}}} \neq \varnothing$. Le théorème 2.3 montre que l'ensemble $\mathscr{R}_{\mathrm{D}}$ est infini. Soit $x \in \mathscr{R}_{\mathrm{D}}$. Compte tenu de l'équivalence $[\mathscr{X}''] = 0 \Leftrightarrow [\mathscr{X}] \in \mathfrak{T}'_{\mathrm{D}}$, la condition (D) entraîne que l'un des groupes $\mathfrak{T}'_{\mathrm{D}}$ et $\mathfrak{T}''_{\mathrm{D}}$ est nul et que l'autre est d'ordre au plus 2. D'après les carrés commutatifs

$$\begin{tikzcd} \mathscr{E}''_{\mathrm{U}}(\mathrm{U})/\operatorname{Im}(\varphi'_{\mathrm{U}}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{S}'_{\mathrm{D}} \arrow[d] \\ \mathscr{E}''_x(k)/\operatorname{Im}(\varphi'_x) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(k, {}_{\varphi'_x}\mathscr{E}'_x) \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} \mathscr{E}'_{\mathrm{U}}(\mathrm{U})/\operatorname{Im}(\varphi''_{\mathrm{U}}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{S}''_{\mathrm{D}} \arrow[d] \\ \mathscr{E}'_x(k)/\operatorname{Im}(\varphi''_x) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(k, {}_{\varphi''_x}\mathscr{E}''_x) \end{tikzcd}$$

et la définition de $\mathscr{R}_{\mathrm{D}}$, l'un des groupes ${}_{\varphi'_x}\text{Ш}(k,\mathscr{E}'_x)$ et ${}_{\varphi''_x}\text{Ш}(k,\mathscr{E}''_x)$ est donc nul et l'autre est d'ordre au plus 2. La suite exacte

$$0 \longrightarrow {}_{\varphi'_x}\text{Ш}(k,\mathscr{E}'_x) \longrightarrow {}_2\text{Ш}(k,\mathscr{E}'_x) \longrightarrow {}_{\varphi''_x}\text{Ш}(k,\mathscr{E}''_x)$$

permet d'en déduire que le groupe ${}_2\text{Ш}(k,\mathscr{E}'_x)$ est d'ordre au plus 2. La finitude de $\text{Ш}(k,\mathscr{E}'_x)$ et les propriétés de l'accouplement de Cassels-Tate entraînent par ailleurs que cet ordre est un carré (cf. preuve du théorème 1.50) ; par conséquent ${}_2\text{Ш}(k,\mathscr{E}'_x) = 0$ et donc $\mathrm{X}_x(k) \neq \varnothing$ puisque $x \in \mathscr{R}_{\mathrm{A}}$.

Supposons de plus que π ne possède pas de section. On vient de voir que ${}_{\varphi'_x}\text{Ш}(k,\mathscr{E}'_x) = 0$ (puisque ${}_2\text{Ш}(k,\mathscr{E}'_x) = 0$) et $\dim_{\mathbf{F}_2} {}_{\varphi''_x}\text{Ш}(k,\mathscr{E}''_x) \leqslant 1$; d'où $\dim_{\mathbf{F}_2} {}_2\text{Ш}(k,\mathscr{E}''_x) \leqslant 1$, compte tenu de la suite exacte

$$0 \longrightarrow {}_{\varphi''_x}\text{Ш}(k,\mathscr{E}''_x) \longrightarrow {}_2\text{Ш}(k,\mathscr{E}''_x) \longrightarrow {}_{\varphi'_x}\text{Ш}(k,\mathscr{E}'_x).$$

La suite exacte

$$0 \longrightarrow {}_{\varphi''_x}\text{Ш}(k,\mathscr{E}''_x) \longrightarrow \text{Ш}(k,\mathscr{E}''_x) \longrightarrow \text{Ш}(k,\mathscr{E}'_x)$$

et la finitude de $\text{Ш}(k,\mathscr{E}'_x)$ montrent que le groupe $\text{Ш}(k,\mathscr{E}''_x)$ est fini. Utilisant à nouveau les propriétés de l'accouplement de Cassels-Tate, on obtient finalement que ${}_2\text{Ш}(k,\mathscr{E}''_x) = 0$ et donc que ${}_{\varphi''_x}\text{Ш}(k,\mathscr{E}''_x) = 0$.

Nous allons maintenant établir que le rang de la courbe elliptique $\mathscr{E}'_x$ n'est pas nul. Comme les ensembles $\mathrm{X}_x(k)$ et $\mathscr{E}'_x(k)$ sont en bijection, cela impliquera que $\mathrm{X}_x(k)$ est infini puis que $\mathrm{X}(k)$ est Zariski-dense dans X, étant donné que x

a été choisi quelconque dans l'ensemble infini $\mathscr{R}_{\mathrm{D}}$. Supposons que $\mathscr{E}'_x$ soit de rang nul et aboutissons à une contradiction. La nullité de ${}_{\varphi''_x}Ш(k,\mathscr{E}''_x)$ et du rang de $\mathscr{E}'_x$ entraînent que le groupe $\mathrm{Sel}_{\varphi''_x}(k,\mathscr{E}''_x)$ est d'ordre 2. Notons respectivement $\mathrm{G}' \subset \mathfrak{S}'_{\mathrm{D}}$ et $\mathrm{G}'' \subset \mathfrak{S}''_{\mathrm{D}}$ les sous-groupes images réciproques de $\{0,[\mathscr{X}]\}$ et de $\{0,[\mathscr{X}'']\}$ par les flèches $\mathfrak{S}'_{\mathrm{D}} \to \mathrm{H}^1(\mathrm{C},\mathscr{E}')$ et $\mathfrak{S}''_{\mathrm{D}} \to \mathrm{H}^1(\mathrm{C},\mathscr{E}'')$ issues des suites exactes (2.3) et (2.4). Par définition de $\mathscr{R}_{\mathrm{D}}$, les flèches $\mathrm{G}' \to \mathrm{Sel}_{\varphi'_x}(k,\mathscr{E}'_x)$ et $\mathrm{G}'' \to \mathrm{Sel}_{\varphi''_x}(k,\mathscr{E}''_x)$ d'évaluation en x sont injectives. Le groupe G'' est donc d'ordre au plus 2, d'où il résulte que $[\mathscr{X}''] = 0$. On a alors $[\mathscr{X}] \in \mathfrak{T}'_{\mathrm{D}}$; comme π n'admet pas de section, on en déduit que le groupe G' est d'ordre au moins 4. Il en va donc de même pour $\mathrm{Sel}_{\varphi'_x}(k,\mathscr{E}'_x)$. Par ailleurs, les courbes elliptiques $\mathscr{E}'_x$ et $\mathscr{E}''_x$ ont même rang puisqu'elles sont isogènes. La nullité de ${}_{\varphi'_x}Ш(k,\mathscr{E}'_x)$ et du rang de $\mathscr{E}'_x$ implique donc que $\mathrm{Sel}_{\varphi'_x}(k,\mathscr{E}'_x)$ est d'ordre au plus 2, d'où une contradiction. □

Le théorème suivant est celui dont nous nous servirons au troisième chapitre. C'est un énoncé « sur mesure », ce qui explique sa forme quelque peu particulière.

Théorème 2.5 — *Admettons l'hypothèse de Schinzel et la finitude des groupes de Tate-Shafarevich des courbes elliptiques $\mathscr{E}'_x$ pour $x \in \mathrm{U}(k)$. Supposons que la fibre de π au-dessus du point $\infty \in \mathbf{P}^1(k)$ soit lisse, qu'elle possède un k_v-point pour toute place $v \in \Omega$ réelle et qu'il existe $x_0 \in \mathrm{U}(k)$ appartenant à la composante connexe non majorée de $\mathrm{U}(k_v)$ pour toute place v réelle et tel que $\mathrm{X}_{x_0}(\mathbf{A}_k) \neq \varnothing$. Soit $\mathrm{S} \subset \Omega$ la réunion de l'ensemble des places archimédiennes ou dyadiques de k, de l'ensemble des places finies de mauvaise réduction pour la courbe elliptique $\mathscr{E}'_{x_0}$ et de l'ensemble des places finies v telles que l'adhérence de $x_0 \in \mathbf{P}^1(k_v)$ dans $\mathbf{P}^1_{\mathscr{O}_v}$ rencontre celle de $(\mathscr{M} \cup \{\infty\}) \otimes_k k_v$. Supposons la condition* (E) *relative à* S *satisfaite :*

> *Condition* (E) *: l'image de $\mathfrak{S}'_{\mathrm{D}_0} \cap \mathfrak{S}_{\varphi',\mathrm{S}}(\mathbf{A}^1_k,\mathscr{E}')$ dans ${}_{\varphi'}\mathrm{H}^1(\mathbf{A}^1_k,\mathscr{E}')$ par la seconde flèche de la suite exacte (2.3) est incluse dans $\{0,[\mathscr{X}]\}$ et l'image de $\mathfrak{S}''_{\mathrm{D}_0} \cap \mathfrak{S}_{\varphi'',\mathrm{S}}(\mathbf{A}^1_k,\mathscr{E}'')$ dans ${}_{\varphi''}\mathrm{H}^1(\mathbf{A}^1_k,\mathscr{E}'')$ par la seconde flèche de la suite exacte (2.4) est incluse dans $\{0,[\mathscr{X}'']\}$.*

Alors $\mathrm{X}(k) \neq \varnothing$*.*

Démonstration — Soient $\mathrm{S}_0 \subset \Omega$ et $\mathrm{B}_0 \subset \mathrm{Br}(\mathrm{U})$ les ensembles donnés par le théorème 2.2. Soit $\mathrm{S}_1 \subset \Omega$ fini contenant $\mathrm{S} \cup \mathrm{S}_0$ et contenant toutes les places $v \in \Omega$ pour lesquelles il existe $\mathrm{A} \in \mathrm{B}_0$ tel que $\mathrm{inv}_v\,\mathrm{A}(x_0) \neq 0$. Posons $x_v = x_0$ pour tout $v \in \mathrm{S}_1$. On a alors $\sum_{v\in\mathrm{S}_1} \mathrm{inv}_v\,\mathrm{A}(x_v) = 0$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{B}_0$ d'après la loi de réciprocité globale. La conclusion du théorème 2.2 permet d'en déduire l'existence de $x_1 \in \mathscr{R}_{\mathrm{D}_0,\mathrm{S}_1}$ arbitrairement proche de x_0 en chaque place $v \in \mathrm{S}_1 \cap \Omega_f$. Pour $a \in \mathfrak{S}_{\varphi',\mathrm{S}_1}(\mathbf{A}^1_k,\mathscr{E}')$ (resp. $a \in \mathfrak{S}_{\varphi'',\mathrm{S}_1}(\mathbf{A}^1_k,\mathscr{E}''))$ et $z \in \mathrm{U}(k)$, notons $a(z)$ l'image de a par la composée

$$\mathfrak{S}_{\varphi',\mathrm{S}_1}(\mathbf{A}^1_k,\mathscr{E}') \subset \mathrm{H}^1(\mathbf{A}^1_k \setminus \mathscr{M}', {}_{\varphi'}\mathscr{E}') \to \mathrm{H}^1(k, {}_{\varphi'_z}\mathscr{E}'_z) = k^\star/k^{\star 2}$$

(resp. $\mathfrak{S}_{\varphi'',\mathrm{S}_1}(\mathbf{A}^1_k,\mathscr{E}'') \subset \mathrm{H}^1(\mathbf{A}^1_k \setminus \mathscr{M}'', {}_{\varphi''}\mathscr{E}'') \to \mathrm{H}^1(k, {}_{\varphi''_z}\mathscr{E}''_z) = k^\star/k^{\star 2}$), où l'inclusion est donnée par la proposition 2.1 et la seconde flèche est l'évaluation en z. Quitte à choisir x_1 suffisamment proche de x_0 aux places finies de S_1, on peut supposer que la courbe elliptique $\mathscr{E}'_{x_1}$ a bonne réduction aux places de $\mathrm{S}_1 \backslash \mathrm{S}$ et que $v(a(x_1)) = v(a(x_0))$ pour tout $v \in \mathrm{S}_1\backslash\mathrm{S}$ et tout $a \in \mathfrak{S}_{\varphi',\mathrm{S}_1}(\mathbf{A}^1_k,\mathscr{E}')$ (resp. tout $a \in \mathfrak{S}_{\varphi'',\mathrm{S}_1}(\mathbf{A}^1_k,\mathscr{E}'')$), où v désigne l'application $k^\star/k^{\star 2} \to \mathbf{Z}/2$ induite par la valuation normalisée associée à v.

Prouvons maintenant que $x_1 \in \mathscr{R}_{\mathrm{D}_0,\mathrm{S}}$. Étant donné que $x_1 \in \mathscr{R}_{\mathrm{D}_0,\mathrm{S}_1}$, il suffit pour cela que tout $a \in \mathfrak{S}'_{\mathrm{D}_0} \cap \mathfrak{S}_{\varphi',\mathrm{S}_1}(\mathbf{A}^1_k,\mathscr{E}')$ tel que $a(x_1) \in \mathrm{Sel}_{\varphi'_{x_1}}(k,\mathscr{E}'_{x_1})$ appartienne à $\mathfrak{S}_{\varphi',\mathrm{S}}(\mathbf{A}^1_k,\mathscr{E}')$ (resp. que tout $a \in \mathfrak{S}''_{\mathrm{D}_0} \cap \mathfrak{S}_{\varphi'',\mathrm{S}_1}(\mathbf{A}^1_k,\mathscr{E}'')$ tel que $a(x_1) \in \mathrm{Sel}_{\varphi''_{x_1}}(k,\mathscr{E}''_{x_1})$ appartienne à $\mathfrak{S}_{\varphi'',\mathrm{S}}(\mathbf{A}^1_k,\mathscr{E}'')$). Fixons un tel a et une place $v \in \mathrm{S}_1 \setminus \mathrm{S}$. Il suffit de vérifier que $v(a(x_0)) = 0$, puisque l'adhérence de x_0 dans $\mathbf{P}^1_{\mathscr{O}_v}$ ne rencontre pas celle de $(\mathscr{M} \cup \{\infty\}) \otimes_k k_v$. Comme les courbes elliptiques $\mathscr{E}'_{x_1}$ et $\mathscr{E}''_{x_1}$ ont bonne réduction en v et que v n'est pas dyadique, l'appartenance de $a(x_1)$ au groupe de Selmer entraîne que $v(a(x_1)) = 0$, d'où $v(a(x_0)) = 0$.

De l'appartenance de x_1 à $\mathscr{R}_{\mathrm{D}_0,\mathrm{S}}$, de la condition (E) et de l'équivalence $[\mathscr{X}''] = 0 \Leftrightarrow [\mathscr{X}] \in {}_{\varphi'}\mathrm{H}^1(\mathbf{A}^1_k,\mathscr{E}')$ résulte que l'un des deux groupes ${}_{\varphi'_{x_1}}Ш(k,\mathscr{E}'_{x_1})$ et ${}_{\varphi''_{x_1}}Ш(k,\mathscr{E}''_{x_1})$ est nul et que l'autre est d'ordre au plus 2. La suite exacte

$$0 \longrightarrow {}_{\varphi'_{x_1}}Ш(k,\mathscr{E}'_{x_1}) \longrightarrow {}_2Ш(k,\mathscr{E}'_{x_1}) \longrightarrow {}_{\varphi''_{x_1}}Ш(k,\mathscr{E}''_{x_1})$$

et la finitude du groupe $Ш(k,\mathscr{E}'_{x_1})$ permettent de conclure, exactement comme dans la preuve du théorème 2.4. □

Comparons maintenant le théorème 2.4 avec les théorèmes A et B de [14].

Sous les hypothèses du théorème A, prenons pour X la surface notée $\mathrm{X}(m)$ dans [14, Th. A]. La courbe X_η est naturellement un 2-revêtement du quotient de la courbe elliptique d'équation

$$y^2 = (x - c(t))(x^2 - d(t)) \tag{2.12}$$

par le point de coordonnées $(c(t), 0)$, d'où un choix canonique de $\mathrm{P}' \in \mathrm{E}'_\eta(\mathrm{K})$ tel que la courbe elliptique E''_η soit celle définie par l'équation (2.12) et que le point $\mathrm{P}'' \in \mathrm{E}''_\eta(\mathrm{K})$ soit celui de coordonnées $(c(t), 0)$. Les types de réduction de E'_η et E''_η sont les suivants, dans la notation de Kodaira (cf. [14, (1.2.2)] pour une équation de Weierstrass de E'_η) :

	$d = 0$	$c^2 - d = 0$
E'_η	I_2	I_1
E''_η	I_1	I_2

Par conséquent les ensembles $\mathscr{M}'$ et $\mathscr{M}''$ définis ci-dessus coïncident respectivement avec les ensembles $\mathscr{M}''$ et $\mathscr{M}'$ de [14, p. 120] ; de plus $\mathrm{L}'_{\mathrm{M}} = \mathrm{L}''_{\mathrm{M}} = \kappa(\mathrm{M})$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{M}$, et l'on a $\mathrm{F}'_{\mathrm{M}} = \mathbf{Z}/2$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{M}''$ et $\mathrm{F}''_{\mathrm{M}} = \mathbf{Z}/2$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{M}'$. La proposition 2.1 montre que les groupes $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}''$, $\mathfrak{S}'_0$ et $\mathfrak{S}''_0$ de [14, p. 120] s'identifient respectivement aux groupes $\mathfrak{S}_{\varphi''}(\mathbf{A}^1_k, \mathscr{E}'')$, $\mathfrak{S}_{\varphi'}(\mathbf{A}^1_k, \mathscr{E}')$, $\mathfrak{S}_{\varphi''}(\mathbf{P}^1_k, \mathscr{E}'')$ et $\mathfrak{S}_{\varphi'}(\mathbf{P}^1_k, \mathscr{E}')$. La commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Z}/2 \arrow[r, equal] \arrow[d] & {}_{\varphi'}\mathscr{E}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{E}' \arrow[d] \\
\displaystyle\prod_{\mathrm{M}\in\mathscr{M}''} i_{\mathrm{M}\star}\mathbf{Z}/2 \arrow[r, equal] & \displaystyle\prod_{\mathrm{M}\in\mathscr{M}''} i_{\mathrm{M}\star}\left({}_2\mathrm{F}'_{\mathrm{M}}\right) \arrow[r, "\sim"] & \displaystyle\prod_{\mathrm{M}\in\mathscr{M}''} i_{\mathrm{M}\star}\left(\mathrm{F}'_{\mathrm{M}}\right)
\end{tikzcd} \tag{2.13}$$

entraîne celle du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{S}_{\varphi'}(\mathbf{P}^1_k, \mathscr{E}') \arrow[r, equal] & \mathrm{H}^1(\mathbf{P}^1_k \setminus \mathscr{M}', \mathbf{Z}/2) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^1(\mathbf{P}^1_k \setminus \mathscr{M}', \mathscr{E}') \arrow[d] \\
& \displaystyle\bigoplus_{\mathrm{M}\in\mathscr{M}''} \mathrm{H}^1(\kappa(\mathrm{M}), \mathbf{Z}/2) \arrow[r, "\sim"] & \displaystyle\bigoplus_{\mathrm{M}\in\mathscr{M}''} \mathrm{H}^1(\kappa(\mathrm{M}), \mathrm{F}'_{\mathrm{M}}),
\end{tikzcd} \tag{2.14}$$

qui à son tour montre que la composée du morphisme

$$\mathrm{H}^1(\mathbf{P}^1_k, \mathscr{E}') \xrightarrow{\prod \delta'_{\mathrm{M}}} \prod_{\mathrm{M}\in\mathscr{M}''} \mathrm{H}^1(\mathrm{L}'_{\mathrm{M}}, \mathrm{F}'_{\mathrm{M}})$$

et de la flèche de droite de la suite exacte (2.3) s'identifie à l'application notée δ''_0 dans [14, p. 120]. De même pour $\prod \delta''_{\mathrm{M}}$ et δ'_0. Par ailleurs, la classe $[\mathscr{X}'']$ est nulle.

On déduit de ces considérations que les hypothèses (3.a) et (3.b) du théorème A de [14] impliquent la condition (D). Le théorème A est donc un cas particulier du théorème 2.4. (En toute rigueur, pour que le théorème 2.4 implique formellement le théorème A de [14], il aurait fallu détailler quelque peu sa conclusion. Cependant, on vérifie tout de suite que les assertions supplémentaires du théorème A découlent directement de la preuve ci-dessus du théorème 2.4. Nul besoin pour cela de revenir à la preuve du théorème 2.2.)

Passons maintenant au théorème B. Prenons pour X la surface notée X dans [14, Th. B]. La courbe X_η est un 2-revêtement de la courbe elliptique définie par l'équation de Weierstrass (2.12), où c et d ont cette fois les significations données dans [14] juste avant l'énoncé du théorème B. Notons $\mathrm{P}' \in \mathrm{E}'_\eta(\mathrm{K})$ le point de coordonnées $(c(t), 0)$. Les types de réduction de E'_η et E''_η sont les suivants, dans la notation de Kodaira (cf. [14, (1.2.2)] pour une équation de Weierstrass de E''_η) :

	$d_{01}=0$	$d_{23}^2+4d_{24}d_{34}=0$	$d_{04}^2-d_{02}d_{03}=0$	$d_{14}^2-d_{12}d_{13}=0$
E'_η	I_2	I_1	I_2	I_2
E''_η	I_4	I_2	I_1	I_1

Les ensembles $\mathscr{M}'$ et $\mathscr{M}''$ s'identifient donc respectivement aux ensembles $\mathscr{M}'$ et $\mathscr{M}''$ du théorème B, et l'on a $\mathrm{F}'_\mathrm{M}=\mathbf{Z}/2$ pour tout $\mathrm{M}\in\mathscr{M}''$ et $\mathrm{F}''_\mathrm{M}=\mathbf{Z}/2$ pour tout $\mathrm{M}\in\mathscr{M}'_2$. La proposition 2.1 montre que les groupes $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}''$, $\mathfrak{S}'_0$ et $\mathfrak{S}''_0$ de [14, p. 123] s'identifient respectivement aux groupes $\mathfrak{S}_{\varphi'}(\mathbf{A}^1_k,\mathscr{E}')$, $\mathfrak{S}_{\varphi''}(\mathbf{A}^1_k,\mathscr{E}'')$, $\mathfrak{S}_{\varphi'}(\mathbf{P}^1_k,\mathscr{E}')$ et $\mathfrak{S}_{\varphi''}(\mathbf{P}^1_k,\mathscr{E}'')$. Les extensions $\mathrm{L}'_\mathrm{M}/\kappa(\mathrm{M})$ sont toutes triviales, de même que les extensions $\mathrm{L}''_\mathrm{M}/\kappa(\mathrm{M})$ pour $\mathrm{M}\in\mathscr{M}'_2\cup\mathscr{M}''$. Pour $\mathrm{M}\in\mathscr{M}'_1$, l'extension $\mathrm{L}''_\mathrm{M}/\kappa(\mathrm{M})$ est celle obtenue en adjoignant à $\kappa(\mathrm{M})$ une racine carrée de l'élément noté $\delta''_\mathrm{M}(-c)$ dans [14], d'où une injection canonique

$$\kappa(\mathrm{M})^\star/\langle\kappa(\mathrm{M})^{\star 2},\delta''_\mathrm{M}(-c)\rangle\longrightarrow\mathrm{L}''^\star_\mathrm{M}/\mathrm{L}''^{\star 2}_\mathrm{M}=\mathrm{H}^1(\mathrm{L}''_\mathrm{M},{}_2\mathrm{F}''_\mathrm{M})\hookrightarrow\mathrm{H}^1(\mathrm{L}''_\mathrm{M},\mathrm{F}''_\mathrm{M}).$$

(La dernière flèche est injective car le L''_M-groupe $\mathrm{F}''_\mathrm{M}\otimes_{\kappa(\mathrm{M})}\mathrm{L}''_\mathrm{M}$ est constant.) On vérifie de plus que $\delta'_\mathrm{M}([\mathscr{X}])$ (resp. $\delta''_\mathrm{M}([\mathscr{X}''])$) coïncide avec la classe notée ε_M (resp. $\delta''_\mathrm{M}(d_{14}^2-d_{12}d_{13})$) dans [14], pour $\mathrm{M}\in\mathscr{M}''$ (resp. pour $\mathrm{M}\in\mathscr{M}'_1$). Enfin, le groupe F'_M étant trivial pour $\mathrm{M}\in\mathscr{M}'_2$, on a $\delta'_\mathrm{M}([\mathscr{X}])=0$ et donc $\delta''_\mathrm{M}([\mathscr{X}''])=0$ pour tout $\mathrm{M}\in\mathscr{M}'_2$.

Des diagrammes commutatifs analogues à (2.13) et (2.14) permettent maintenant de voir que les hypothèses (3.a) et (3.b) du théorème B de [14] impliquent la condition (D). Le théorème B est donc lui aussi un cas particulier du théorème 2.4 (avec le même commentaire que pour le théorème A).

Pour résumer, les théorèmes A et B de [14], pris ensemble, correspondent au cas particulier du théorème 2.4 où les hypothèses supplémentaires suivantes sont supposées satisfaites :

- pour tout $\mathrm{M}\in\mathscr{M}$, le groupe F'_M est d'ordre au plus 2 ;
- les courbes elliptiques E'_η et E''_η possèdent un seul point d'ordre 2 rationnel ;
- elles sont de rang de Mordell-Weil nul sur K ;
- le morphisme π n'admet pas de section ;
- les hypothèses techniques (0.1), (0.5) et (0.7) de [14] sont satisfaites.

Le théorème A s'applique seulement lorsque $[\mathscr{X}'']=0$ et le théorème B seulement lorsque $[\mathscr{X}'']\neq 0$. (En effet, si $[\mathscr{X}'']=0$, la condition (3.a) du théorème B entraîne que $[\mathscr{X}]=0$, autrement dit que π possède une section.)

2.3 Preuve du théorème 2.2

Pour prouver le théorème 2.2, on peut évidemment supposer la fibration $\pi\colon \mathrm{X}\to\mathbf{P}^1_k$ relativement minimale. On fera dorénavant cette hypothèse, dont l'intérêt principal est qu'elle permet d'écrire que $\mathrm{U} = \mathbf{A}^1_k \setminus \mathscr{M}$. Les paragraphes 2.3.1 à 2.3.5 contiennent des définitions et résultats préliminaires à la preuve proprement dite du théorème 2.2, qui occupe le paragraphe 2.3.6. Le symbole S désigne pour le moment un ensemble fini arbitraire de places de k contenant les places dyadiques et les places archimédiennes ; il sera précisé au paragraphe 2.3.6.

2.3.1 Couples admissibles, préadmissibles

Si $x \in \mathbf{P}^1_k$ est un point fermé, on note $\widetilde{x}$ son adhérence schématique dans $\mathbf{P}^1_{\mathscr{O}}$. C'est un $\mathscr{O}$-schéma fini génériquement étale. On définit de même l'adhérence $\widetilde{x}$ de x dans $\mathbf{P}^1_{\mathscr{O}_v}$ lorsque x est un point fermé de $\mathbf{P}^1_{k_v}$ et que $v \in \Omega_f$. Si $\widetilde{x} \cap \mathbf{P}^1_{\mathscr{O}_\mathrm{S}}$ est étale sur $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_\mathrm{S})$, l'ensemble des points fermés de $\widetilde{x} \cap \mathbf{P}^1_{\mathscr{O}_\mathrm{S}}$ s'identifie à l'ensemble des places de $\kappa(x)$ dont la trace sur k n'appartient pas à S. On utilisera librement cette identification par la suite.

Soit $\mathscr{T}$ une famille $(\mathrm{T}'_\mathrm{M})_{\mathrm{M}\in\mathscr{M}}$, où T'_M est un ensemble fini de places finies de $\kappa(\mathrm{M})$. Notons $\mathrm{T}_\mathrm{M} \subset \Omega_f$ l'ensemble des traces sur k des places de T'_M. On dit que la famille $\mathscr{T}$ est *préadmissible* si la condition suivante est satisfaite :

(2.15) les sous-ensembles $\mathrm{T}_\mathrm{M} \subset \Omega$ pour $\mathrm{M} \in \mathscr{M}$ sont deux à deux disjoints et disjoints de S ; le $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-schéma $\mathbf{P}^1_{\mathscr{O}_\mathrm{S}} \cap \bigcup_{\mathrm{M}\in\mathscr{M}\cup\{\infty\}} \widetilde{\mathrm{M}}$ est étale ; pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{M}$, l'application trace $\mathrm{T}'_\mathrm{M} \to \mathrm{T}_\mathrm{M}$ est bijective.

Soit $x \in \mathrm{U}(k)$. On dit que le couple $(\mathscr{T}, x)$ est *préadmissible* si la famille $\mathscr{T}$ l'est et si de plus la condition suivante est satisfaite :

(2.16) x est entier hors de S (*i.e.* $\widetilde{x} \cap \widetilde{\infty} \cap \mathbf{P}^1_{\mathscr{O}_\mathrm{S}} = \varnothing$) ; pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{M}$, le schéma $\widetilde{x} \cap \widetilde{\mathrm{M}} \cap \mathbf{P}^1_{\mathscr{O}_\mathrm{S}}$ est réduit, et son ensemble sous-jacent est la réunion de T'_M et d'une place de $\kappa(\mathrm{M})$ hors de T'_M, que l'on note w_M.

Étant donné un tel couple $(\mathscr{T}, x)$, on notera v_M la trace de w_M sur k, et l'on posera

$$\mathrm{T} = \mathrm{S} \cup \bigcup_{\mathrm{M}\in\mathscr{M}} \mathrm{T}_\mathrm{M}$$

et

$$\mathrm{T}(x) = \mathrm{T} \cup \{v_\mathrm{M}\, ;\, \mathrm{M} \in \mathscr{M}\}.$$

Les conditions de préadmissibilité sont de nature géométrique. Nous voudrons aussi imposer une condition arithmétique sur les triplets considérés afin d'assurer l'existence de points locaux sur X_x (cf. condition (2.17) ci-dessous, et proposition 2.15).

Lemme 2.6 — *Soit* $\mathrm{M} \in \mathscr{M}$. *Pour tout* $d \in {}_2\mathrm{H}^1(\kappa(\mathrm{M}), \mathrm{F}'_\mathrm{M})$, *il existe une extension quadratique ou triviale minimale* $\mathrm{K}_{\mathrm{M},d}$ *de* $\kappa(\mathrm{M})$ *telle que* d

appartienne au noyau de la restriction $\mathrm{H}^1(\kappa(\mathrm{M}),\mathrm{F}'_\mathrm{M}) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{L}'_\mathrm{M}\mathrm{K}_{\mathrm{M},d},\mathrm{F}'_\mathrm{M})$ *et que* $\mathrm{L}'_\mathrm{M}\mathrm{K}_{\mathrm{M},d}$ *se plonge* L'_M*-linéairement dans toute extension* $\ell/\mathrm{L}'_\mathrm{M}$ *telle que l'image de* d *dans* $\mathrm{H}^1(\ell,\mathrm{F}'_\mathrm{M})$ *soit nulle. La même assertion avec* F''_M *et* L''_M *à la place de* F'_M *et* L'_M *est vraie.*

Démonstration — Si le groupe $\mathrm{F}'_\mathrm{M}(\mathrm{L}'_\mathrm{M})$ (resp. $\mathrm{F}''_\mathrm{M}(\mathrm{L}''_\mathrm{M})$) est d'ordre impair, nécessairement $d = 0$ et l'on peut donc prendre $\mathrm{K}_{\mathrm{M},d} = \kappa(\mathrm{M})$. Sinon, la démonstration est exactement la même que pour le lemme 1.17. □

On notera par la suite K_M le corps $\mathrm{K}_{\mathrm{M},d}$ donné par le lemme 2.6 en prenant pour d l'image de $[\mathscr{X}]$ dans $\mathrm{H}^1(\kappa(\mathrm{M}),\mathrm{F}'_\mathrm{M})$.

La famille $\mathscr{T}$ sera dite *admissible* si elle est préadmissible et que la condition suivante est vérifiée :

(2.17) pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{M}$, les places de T'_M sont totalement décomposées dans $\mathrm{L}'_\mathrm{M}\mathrm{L}''_\mathrm{M}\mathrm{K}_\mathrm{M}$.

Si $x \in \mathrm{U}(k)$, on dit enfin que le couple $(\mathscr{T},x)$ est *admissible* s'il est préadmissible, si la famille $\mathscr{T}$ est admissible et si pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{M}$, la place w_M est totalement décomposée dans $\mathrm{L}'_\mathrm{M}\mathrm{L}''_\mathrm{M}\mathrm{K}_\mathrm{M}$.

2.3.2 Prélude à l'étude des groupes de Selmer en famille

Dans ce paragraphe, nous fixons un couple préadmissible $(\mathscr{T},x)$ et nous faisons l'hypothèse suivante :

(2.18) pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{M}$, la classe du diviseur $\widetilde{\mathrm{M}} \cap \mathbf{A}^1_{\mathscr{O}_\mathrm{S}}$ dans $\mathrm{Pic}(\mathbf{A}^1_{\mathscr{O}_\mathrm{S}})$ est nulle.

Cette hypothèse sera en tout cas satisfaite si S est suffisamment grand.

Posons $\mathscr{U} = \mathbf{P}^1_\mathscr{O} \setminus \left(\bigcup_{\mathrm{M}\in\mathscr{M}\cup\{\infty\}} \widetilde{\mathrm{M}}\right)$. Par définition de la préadmissibilité, le sous-schéma localement fermé $\widetilde{x} \cap \mathbf{P}^1_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}(x)}}$ de $\mathbf{P}^1_{\mathscr{O}_\mathrm{T}}$ est inclus dans l'ouvert $\mathscr{U}_{\mathscr{O}_\mathrm{T}} = \mathscr{U} \otimes_\mathscr{O} \mathscr{O}_\mathrm{T} = \mathscr{U} \cap \mathbf{P}^1_{\mathscr{O}_\mathrm{T}}$.

Proposition 2.7 — *Le morphisme* $\mathrm{H}^1(\mathscr{U}_{\mathscr{O}_\mathrm{T}},\mathbf{Z}/2) \to \mathrm{H}^1(\mathscr{O}_{\mathrm{T}(x)},\mathbf{Z}/2)$ *induit par l'inclusion de* $\widetilde{x} \cap \mathbf{P}^1_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}(x)}}$ *dans* $\mathscr{U}_{\mathscr{O}_\mathrm{T}}$ *est un isomorphisme.*

Démonstration — Notons respectivement $\alpha\colon \mathbf{Z}^\mathscr{M} \to \mathrm{Pic}(\mathbf{A}^1_{\mathscr{O}_\mathrm{T}})$ et $\beta\colon \mathbf{Z}^\mathscr{M} \to \mathrm{Pic}(\mathscr{O}_\mathrm{T})$ les applications $\mathbf{Z}$-linéaires envoyant $\mathrm{M} \in \mathscr{M}$ sur la classe du diviseur $\widetilde{\mathrm{M}} \cap \mathbf{A}^1_{\mathscr{O}_\mathrm{T}}$ dans $\mathrm{Pic}(\mathbf{A}^1_{\mathscr{O}_\mathrm{T}})$ et sur la classe de v_M dans $\mathrm{Pic}(\mathscr{O}_\mathrm{T})$. Les inclusions de $\widetilde{x} \cap \mathbf{P}^1_{\mathscr{O}_\mathrm{T}}$ dans $\mathbf{A}^1_{\mathscr{O}_\mathrm{T}}$ et de $\widetilde{x} \cap \mathbf{P}^1_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}(x)}}$ dans $\mathscr{U}_{\mathscr{O}_\mathrm{T}}$ induisent le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Z}^{\mathscr{M}} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Pic}(\mathbf{A}^1_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}}}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Pic}(\mathscr{U}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}}}) \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & 0 \\
\mathbf{Z}^{\mathscr{M}} \arrow[r, "\beta"] & \mathrm{Pic}(\mathscr{O}_{\mathrm{T}}) \arrow[r, "\gamma"] & \mathrm{Pic}(\mathscr{O}_{\mathrm{T}(x)}) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Le morphisme $\mathrm{Pic}(\mathscr{O}_{\mathrm{T}}) \to \mathrm{Pic}(\mathbf{A}^1_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}}})$ induit par le morphisme structural du $\mathscr{O}_{\mathrm{T}}$-schéma $\mathbf{A}^1_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}}}$ est un isomorphisme. La flèche verticale du milieu du diagramme ci-dessus en est une rétraction ; c'est donc aussi un isomorphisme. La commutativité du diagramme et l'exactitude de ses lignes entraînent maintenant la bijectivité de δ. Par ailleurs, l'hypothèse (2.18) implique que $\alpha = 0$, d'où l'on tire que $\beta = 0$, ce qui signifie encore que γ est bijective.

Considérons à présent le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathbf{G}_{\mathrm{m}}(\mathscr{O}_{\mathrm{T}})/2 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{G}_{\mathrm{m}}(\mathscr{O}_{\mathrm{T}(x)})/2 \arrow[r] \arrow[d] & (\mathbf{Z}/2)^{\mathscr{M}} \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^1(\mathscr{O}_{\mathrm{T}}, \mathbf{Z}/2) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^1(\mathscr{O}_{\mathrm{T}(x)}, \mathbf{Z}/2) \arrow[r] \arrow[d] & (\mathbf{Z}/2)^{\mathscr{M}} \\
& {}_2\mathrm{Pic}(\mathscr{O}_{\mathrm{T}}) \arrow[r, "\gamma"] & {}_2\mathrm{Pic}(\mathscr{O}_{\mathrm{T}(x)}). &
\end{tikzcd}$$

Les colonnes sont induites par la suite exacte de Kummer, la seconde ligne par la suite spectrale de Leray associée à l'inclusion de $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{T}(x)})$ dans $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{T}})$ et au faisceau étale $\mathbf{Z}/2$, et enfin la flèche de droite de la première ligne est induite par les valuations normalisées de k associées aux places v_{M}. La seconde ligne est exacte puisqu'elle provient de la suite spectrale de Leray. Comme γ est un isomorphisme, on en déduit que la première ligne est exacte aussi.

Plaçons maintenant la première ligne du diagramme ci-dessus dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{G}_{\mathrm{m}}(\mathscr{O}_{\mathrm{T}})/2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbf{G}_{\mathrm{m}}(\mathscr{U}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}}})/2 \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & (\mathbf{Z}/2)^{\mathscr{M}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{G}_{\mathrm{m}}(\mathscr{O}_{\mathrm{T}})/2 \arrow[r] & \mathbf{G}_{\mathrm{m}}(\mathscr{O}_{\mathrm{T}(x)})/2 \arrow[r] & (\mathbf{Z}/2)^{\mathscr{M}}, &
\end{tikzcd}$$

où ε est l'évaluation en x et la flèche de droite de la première ligne est induite par les valuations normalisées de $\kappa(\mathbf{P}^1_k)$ associées aux points $\mathrm{M} \in \mathscr{M}$. Il résulte de l'hypothèse de préadmissibilité sur le couple $(\mathscr{T}, x)$ que ce diagramme commute. On a vu que la seconde ligne est exacte. La première l'est d'après l'hypothèse (2.18). Le lemme des cinq permet d'en déduire que la flèche ε est bijective.

Insérons finalement la flèche de l'énoncé dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbf{G}_{\mathrm{m}}(\mathscr{U}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}}})/2 \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & \mathrm{H}^1(\mathscr{U}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}}}, \mathbf{Z}/2) \arrow[r] \arrow[d] & {}_2\mathrm{Pic}(\mathscr{U}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}}}) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathbf{G}_{\mathrm{m}}(\mathscr{O}_{\mathrm{T}(x)})/2 \arrow[r] & \mathrm{H}^1(\mathscr{O}_{\mathrm{T}(x)}, \mathbf{Z}/2) \arrow[r] & {}_2\mathrm{Pic}(\mathscr{O}_{\mathrm{T}(x)}) \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

dont les lignes sont exactes. On a vu que γ et ε sont des isomorphismes. Il n'y a plus qu'à appliquer le lemme des cinq pour terminer la preuve. □

Proposition 2.8 — *Pour tout ouvert dense* V *de* $\mathrm{Spec}(\mathscr{O})$ *sur lequel* 2 *est inversible, le groupe* $\mathrm{H}^1(\mathscr{U}_{\mathrm{V}}, \mathbf{Z}/2)$ *s'identifie au sous-groupe de* $\mathrm{K}^\star/\mathrm{K}^{\star 2}$ *constitué des classes de fonctions inversibles sur* U *dont la valuation sur chaque fibre de la projection* $\mathscr{U}_{\mathrm{V}} \to \mathrm{V}$ *est paire.*

Démonstration — La suite spectrale de Leray pour l'inclusion $j\colon \mathrm{U} \to \mathscr{U}_{\mathrm{V}}$ fournit une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathscr{U}_{\mathrm{V}}, \mathbf{Z}/2) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathrm{U}, \mathbf{Z}/2) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathscr{U}_{\mathrm{V}}, \mathrm{R}^1 j_\star \mathbf{Z}/2). \tag{2.19}$$

Compte tenu de la suite exacte de Kummer et de la nullité de $\mathrm{R}^1 j_\star \mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ (théorème de Hilbert 90), le faisceau $\mathrm{R}^1 j_\star \mathbf{Z}/2$ est égal au conoyau de la multiplication par 2 sur $j_\star \mathbf{G}_{\mathrm{m}}$. Grâce à la régularité de $\mathscr{U}_{\mathrm{V}}$, on dispose par ailleurs de la suite exacte des diviseurs de Weil

$$0 \longrightarrow \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \longrightarrow j_\star \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \longrightarrow \bigoplus_{v \in \mathrm{V}^{(1)}} i_{v\star} \mathbf{Z} \longrightarrow 0, \tag{2.20}$$

où $i_v\colon \mathscr{U}_v \to \mathscr{U}_{\mathrm{V}}$ désigne l'immersion fermée canonique. Celle-ci montre que le conoyau de la multiplication par 2 sur $j_\star \mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ s'identifie naturellement à $\bigoplus_{v \in \mathrm{V}^{(1)}} i_{v\star} \mathbf{Z}/2$. La suite exacte (2.19) se récrit donc comme suit :

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathscr{U}_{\mathrm{V}}, \mathbf{Z}/2) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathrm{U}, \mathbf{Z}/2) \longrightarrow \bigoplus_{v \in \mathrm{V}^{(1)}} \mathbf{Z}/2. \tag{2.21}$$

On a $\mathrm{H}^1(\mathrm{U}, \mathbf{Z}/2) = \mathbf{G}_{\mathrm{m}}(\mathrm{U})/2$ puisque U est un ouvert de $\mathbf{A}^1_k$, et l'on vérifie tout de suite que la flèche $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}(\mathrm{U})/2 \to \bigoplus_{v \in \mathrm{V}^{(1)}} \mathbf{Z}/2$ donnée par la suite (2.21) envoie la classe d'une fonction inversible sur la famille de ses valuations modulo 2 aux points de codimension 1 de $\mathscr{U}_{\mathrm{V}}$ qui ne dominent pas V. La proposition est donc prouvée. □

Le lemme suivant ne présente aucune difficulté. Nous l'énonçons en vue de son utilisation répétée au paragraphe 2.3.6.

Lemme 2.9 — *Pour $v \in \Omega_f$, notons $v\colon \mathrm{K}^\star \to \mathbf{Z}$ la valuation normalisée associée au point de codimension* 1 *de $\mathbf{P}^1_{\mathscr{O}}$ défini par v, et pour $\mathrm{M} \in \mathscr{M} \cup \{\infty\}$, notons $\mathbf{v}_\mathrm{M}\colon \mathrm{K}^\star \to \mathbf{Z}$ la valuation normalisée associée au point* M. *Pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{M} \cup \{\infty\}$, tout $x \in \mathrm{U}(k)$ et toute place $v \in \Omega_f$ au-dessus de laquelle $\widetilde{x}$ rencontre transversalement $\widetilde{\mathrm{M}}$, le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1(\mathrm{U},\mathbf{Z}/2) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^1(\mathrm{K},\mathrm{Z}/2) = \mathrm{K}^\star/\mathrm{K}^{\star 2} \arrow[r, "v+\mathbf{v}_\mathrm{M}"] & \mathbf{Z}/2 \arrow[d, equal] \\
\mathrm{H}^1(k,\mathbf{Z}/2) = k^\star/k^{\star 2} \arrow[rr, "v"] & & \mathbf{Z}/2,
\end{tikzcd}$$

dans lequel la flèche verticale de gauche est l'évaluation en x, est commutatif.

Démonstration — On a $\mathrm{H}^1(\mathrm{U},\mathbf{Z}/2) = \mathbf{G}_\mathrm{m}(\mathrm{U})/2$ puisque U est un ouvert de $\mathbf{A}^1_k$. Il suffit donc de démontrer que pour tout $f \in \mathbf{G}_\mathrm{m}(\mathrm{U})$, considérant f comme une fonction rationnelle sur $\mathbf{P}^1_{\mathscr{O}}$ et $f(x)$ comme une fonction rationnelle sur $\widetilde{x}$, l'égalité $v(f) + \mathbf{v}_\mathrm{M}(f) = v(f(x))$ vaut. C'est évident si f est constante. Par ailleurs, si $v(f) = 0$, autrement dit si f définit une fonction inversible sur $\mathscr{U}_\mathrm{R}$, où R désigne le localisé de $\mathscr{O}$ en l'idéal premier défini par v, cette égalité résulte immédiatement de l'hypothèse de transversalité. Le groupe $\mathbf{G}_\mathrm{m}(\mathrm{U})$ étant engendré par les sous-groupes $\mathbf{G}_\mathrm{m}(k)$ et $\mathbf{G}_\mathrm{m}(\mathscr{U}_\mathrm{R})$, le lemme est donc prouvé. □

2.3.3 Dualité locale pour les courbes $\mathscr{E}'_x$, $\mathscr{E}''_x$

Les quelques notations suivantes nous seront utiles par la suite. Pour $v \in \Omega$ et $x \in \mathrm{U}(k_v)$, posons

$$\mathrm{V}_v = \mathrm{H}^1(k_v,\mathbf{Z}/2) \quad ; \quad \mathrm{V}'_v = \mathrm{H}^1(k_v, {}_{\varphi'_x}\mathscr{E}'_x) \quad ; \quad \mathrm{V}''_v = \mathrm{H}^1(k_v, {}_{\varphi''_x}\mathscr{E}''_x)$$

et

$$\mathrm{W}'_v = \mathscr{E}''_x(k_v)/\operatorname{Im}(\varphi'_x) \quad ; \quad \mathrm{W}''_v = \mathscr{E}'_x(k_v)/\operatorname{Im}(\varphi''_x).$$

Si $v \in \Omega_f$, posons de plus $\mathrm{T}_v = \operatorname{Ker}(\mathrm{V}_v \to \mathrm{H}^1(k_v^{\mathrm{nr}},\mathbf{Z}/2))$, $\mathrm{T}'_v = \operatorname{Ker}(\mathrm{V}'_v \to \mathrm{H}^1(k_v^{\mathrm{nr}}, {}_{\varphi'_x}\mathscr{E}'_x))$ et $\mathrm{T}''_v = \operatorname{Ker}(\mathrm{V}''_v \to \mathrm{H}^1(k_v^{\mathrm{nr}}, {}_{\varphi''_x}\mathscr{E}''_x))$, où k_v^{nr} désigne une extension non ramifiée maximale de k_v. On a canoniquement $\mathrm{V}_v = \mathrm{V}'_v = \mathrm{V}''_v$ et $\mathrm{T}_v = \mathrm{T}'_v = \mathrm{T}''_v$. Les suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}/2 \longrightarrow \mathscr{E}'_x \xrightarrow{\varphi'_x} \mathscr{E}''_x \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}/2 \longrightarrow \mathscr{E}''_x \xrightarrow{\varphi''_x} \mathscr{E}'_x \longrightarrow 0$$

montrent que W'_v (resp. W''_v) s'identifie canoniquement à un sous-groupe de V'_v (resp. de V''_v). L'accouplement de Weil ${}_{\varphi'_x}\mathscr{E}'_x \times {}_{\varphi''_x}\mathscr{E}''_x \to \mathbf{Z}/2$ et l'injection canonique $\mathrm{H}^2(k_v, \mathbf{Z}/2) \hookrightarrow \mathbf{Z}/2$ donnée par la théorie du corps de classes local fournissent un accouplement $\mathrm{V}'_v \times \mathrm{V}''_v \to \mathbf{Z}/2$, non dégénéré d'après [51, Ch. I, Cor. 2.3 et Th. 2.13]. Les sous-espaces W'_v et W''_v sont orthogonaux pour cet accouplement (cf. [1, Lemma 3]).

Proposition 2.10 — *Il existe un ensemble fini* $\mathrm{S}_0 \subset \Omega$ *tel que pour toute place finie* $v \in \Omega \setminus \mathrm{S}_0$, *tout* $\mathrm{M} \in \mathscr{M}$ *et tout* $x \in \mathrm{U}(k_v)$ *tel que* $\widetilde{x}$ *rencontre transversalement* $\widetilde{\mathrm{M}} \otimes_{\mathscr{O}} \mathscr{O}_v$ *en une place* w *de* $\kappa(\mathrm{M})$ *totalement décomposée dans* $\mathrm{L}'_{\mathrm{M}}\mathrm{L}''_{\mathrm{M}}$, *les conditions suivantes soient satisfaites :*

1. *Si* $\mathrm{M} \in \mathscr{M}'$, *les applications* $\mathrm{H}^1(k_v^{\mathrm{nr}}, \mathscr{E}'_x) \to \mathrm{H}^1(k_v^{\mathrm{nr}}, \mathscr{E}''_x)$ *et* $\mathrm{H}^1(k_v, \mathscr{E}'_x) \to \mathrm{H}^1(k_v, \mathscr{E}''_x)$ *induites par* φ'_x *sont injectives.*
2. *Si* $\mathrm{M} \in \mathscr{M}''$, *les applications* $\mathscr{E}'_x(k_v^{\mathrm{nr}}) \to \mathscr{E}''_x(k_v^{\mathrm{nr}})$ *et* $\mathscr{E}'_x(k_v) \to \mathscr{E}''_x(k_v)$ *induites par* φ'_x *sont surjectives.*

Le même énoncé reste vrai si l'on échange tous les $'$ *et les* $''$. *On a par conséquent* $\mathrm{W}'_v = \mathrm{V}'_v$ *et* $\mathrm{W}''_v = 0$ *si* $\mathrm{M} \in \mathscr{M}'$, $\mathrm{W}'_v = 0$ *et* $\mathrm{W}''_v = \mathrm{V}''_v$ *si* $\mathrm{M} \in \mathscr{M}''$.

Démonstration — La première des conditions de l'énoncé est équivalente à la seconde une fois les $'$ et les $''$ échangés, d'après le théorème de dualité locale pour les variétés abéliennes (cf. [51, Cor. 3.4]) ; le dual de Pontrjagin du morphisme induit par φ'_x est en effet le morphisme induit par φ''_x, puisque φ''_x est l'isogénie duale de φ'_x. (En toute rigueur, le théorème de dualité locale s'applique lorsque $\mathrm{K} = k_v$ mais pas lorsque $\mathrm{K} = k_v^{\mathrm{nr}}$; cependant, l'injectivité de $\mathrm{H}^1(k_v^{\mathrm{nr}}, \mathscr{E}'_x) \to \mathrm{H}^1(k_v^{\mathrm{nr}}, \mathscr{E}''_x)$ se déduit facilement de l'injectivité de $\mathrm{H}^1(k_v, \mathscr{E}'_x) \to \mathrm{H}^1(k_v, \mathscr{E}''_x)$.) On peut donc se contenter d'établir d'une part l'énoncé (P') obtenu en supprimant les deux dernières phrases de la proposition et en remplaçant « tout $\mathrm{M} \in \mathscr{M}$ » par « tout $\mathrm{M} \in \mathscr{M}''$ », d'autre part l'énoncé (P'') obtenu à partir de (P') en échangeant les $'$ et les $''$.

Nous prouvons ci-dessous (P'). Le lecteur constatera que l'on obtient une preuve de (P'') en échangeant simplement les $'$ et les $''$.

Prenons pour S_0 un ensemble fini contenant les places archimédiennes et les places dyadiques, suffisamment grand pour que $\mathbf{P}^1_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \cap \bigcup_{\mathrm{M} \in \mathscr{M} \cup \{\infty\}} \widetilde{\mathrm{M}}$ soit étale sur $\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}$. D'autres conditions sur S_0 seront précisées ci-dessous. Soient $v \in \Omega \setminus \mathrm{S}_0$, $\mathrm{M} \in \mathscr{M}''$ et $x \in \mathrm{U}(k_v)$ tel que $\widetilde{x}$ rencontre transversalement $\widetilde{\mathrm{M}} \otimes_{\mathscr{O}} \mathscr{O}_v$ en une place w de $\kappa(\mathrm{M})$ totalement décomposée dans $\mathrm{L}'_{\mathrm{M}}\mathrm{L}''_{\mathrm{M}}$. Notons respectivement $\underline{\mathscr{E}}'_x$ et $\underline{\mathscr{E}}''_x$ les modèles de Néron de $\mathscr{E}'_x$ et $\mathscr{E}''_x$ au-dessus de $\widetilde{x} = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_v)$. Soient $\underline{\mathscr{E}}'^0_x \subset \underline{\mathscr{E}}'_x$ et $\underline{\mathscr{E}}''^0_x \subset \underline{\mathscr{E}}''_x$ leurs composantes neutres et $\underline{\mathrm{F}}'$ et $\underline{\mathrm{F}}''$ les $\kappa(v)$-groupes finis étales fibres spéciales de $\underline{\mathscr{E}}'_x/\underline{\mathscr{E}}'^0_x$ et de $\underline{\mathscr{E}}''_x/\underline{\mathscr{E}}''^0_x$.

Supposons un instant que les courbes $\mathscr{E}'_x$ et $\mathscr{E}''_x$ aient réduction multiplicative, que le k_v-point non nul du noyau de $\varphi'_x \colon \mathscr{E}'_x \to \mathscr{E}''_x$ ne se spécialise pas sur la composante neutre de la fibre spéciale de $\underline{\mathscr{E}}'_x$ et que les $\kappa(v)$-groupes

$\underline{\mathrm{F}}'$ et $\underline{\mathrm{F}}''$ soient constants. Le morphisme $\underline{\mathrm{F}}' \to \underline{\mathrm{F}}''$ induit par φ'_x s'insère alors dans une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}/2 \longrightarrow \underline{\mathrm{F}}' \longrightarrow \underline{\mathrm{F}}'' \longrightarrow 0 \tag{2.22}$$

(cf. proposition A.8). Le lemme A.2 suffirait à en déduire la surjectivité de l'application $\mathscr{E}'_x(k_v^{\mathrm{nr}}) \to \mathscr{E}''_x(k_v^{\mathrm{nr}})$ induite par φ'_x, mais nous allons de toute manière l'établir en même temps que la surjectivité de $\mathscr{E}'_x(k_v) \to \mathscr{E}''_x(k_v)$. On a un diagramme commutatif canonique

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & \underline{\mathscr{E}}'^0_x \arrow[r, "\varphi'^0_x"] \arrow[d] & \underline{\mathscr{E}}''^0_x \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{Z}/2 \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\mathscr{E}}'_x \arrow[r, "\varphi'_x"] \arrow[d] & \underline{\mathscr{E}}''_x \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & i_\star\mathbf{Z}/2 \arrow[r] \arrow[d] & i_\star\underline{\mathrm{F}}' \arrow[r] \arrow[d] & i_\star\underline{\mathrm{F}}'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd} \tag{2.23}$$

de faisceaux étales sur $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_v)$, où i désigne l'inclusion du point fermé de $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_v)$. Ses lignes et ses colonnes sont exactes (cf. lemme A.1 pour la surjectivité de $\underline{\varphi}'^0_x$; la surjectivité de $\underline{\varphi}'_x$ résulte de l'exactitude du reste du diagramme). Compte tenu de la propriété universelle des modèles de Néron, l'exactitude de la seconde ligne entraîne la surjectivité de l'application $\mathscr{E}'_x(k_v^{\mathrm{nr}}) \to \mathscr{E}''_x(k_v^{\mathrm{nr}})$ induite par φ'_x.

Passant aux sections globales dans (2.23), on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{E}'_x(k_v) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{E}''_x(k_v) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^1(\mathscr{O}_v, \mathbf{Z}/2) \arrow[d] \\
\underline{\mathrm{F}}'(\kappa(v)) \arrow[r] & \underline{\mathrm{F}}''(\kappa(v)) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(\kappa(v), \mathbf{Z}/2),
\end{tikzcd}$$

dont les lignes sont exactes. La flèche verticale de droite est injective (lemme de Hensel). D'autre part, les $\kappa(v)$-groupes $\underline{\mathrm{F}}'$ et $\underline{\mathrm{F}}''$ étant constants, la flèche horizontale inférieure de gauche est surjective (cf. suite exacte (2.22)). Il s'ensuit que l'application $\mathscr{E}'_x(k_v) \to \mathscr{E}''_x(k_v)$ induite par φ'_x est surjective.

Il reste donc seulement à établir les propriétés de $\mathscr{E}'_x$ et $\mathscr{E}''_x$ admises ci-dessus, lorsque S_0 est assez grand. Considérons seulement la courbe $\mathscr{E}'_x$; les raisonnements qui suivent s'appliqueront aussi bien à $\mathscr{E}''_x$ si l'on échange tous les $'$ et les $''$, à quelques détails évidents près. La courbe elliptique $\mathrm{E}'_\eta/\mathrm{K}$ possède une équation de Weierstrass minimale de la forme

$$\mathrm{Y}^2 = (\mathrm{X} - c)(\mathrm{X}^2 - d) \tag{2.24}$$

avec $c, d \in k[t]$ telle que le point P' ait pour coordonnées $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = (c, 0)$. Son discriminant est $\Delta' = 16d(c^2 - d)^2$. Quitte à choisir l'ensemble S_0 suffisamment grand au début de la preuve de cette proposition, on peut supposer que les coefficients de c et de d sont des S_0-entiers et que les coefficients dominants de d et de $c^2 - d$ sont des unités aux places de $\Omega \setminus \mathrm{S}_0$.

Grâce à la minimalité de l'équation de Weierstrass, l'ouvert de lissité sur $\mathbf{A}^1_k$ du sous-schéma fermé de $\mathbf{P}^2_k \times_k \mathbf{A}^1_k$ défini par (2.24) s'identifie à $\mathscr{E}'^0_{\mathbf{A}^1_k}$ (cf. [64, Ch. IV, §9, Cor. 9.1]). Il suffit donc de lire l'équation (2.24) modulo M pour déterminer si P' se spécialise sur la composante neutre de $\mathscr{E}'_\mathrm{M}$ ou non, et pour déterminer le type de réduction (bonne, multiplicative déployée, multiplicative non déployée ou additive) de E'_η en M. Compte tenu des hypothèses sur E'_η et sur M, du lemme A.7, de la proposition A.8 et du corollaire A.9, on voit ainsi que les polynômes d et $c^2 - d$ sont premiers entre eux, que $(c^2 - d)(\mathrm{M}) = 0$, que P' ne se spécialise pas sur $\mathscr{E}'^0_\mathrm{M}$ et que soit M est racine simple de $c^2 - d$, soit l'extension $\mathrm{L}'_\mathrm{M}\mathrm{L}''_\mathrm{M}/\kappa(\mathrm{M})$ est isomorphe à $\kappa(\mathrm{M})(\sqrt{2c(\mathrm{M})})$.

La courbe elliptique $\mathscr{E}'_x/k_v$ a pour équation de Weierstrass

$$\mathrm{Y}^2 = (\mathrm{X} - c(x))(\mathrm{X}^2 - d(x)). \tag{2.25}$$

D'après les hypothèses faites sur S_0, les coefficients de l'équation (2.25) sont des entiers v-adiques. (En effet, d'une part les coefficients de c et de d sont des entiers v-adiques, d'autre part x lui-même en est un.) De plus, on a $v((c^2 - d)(x)) > 0$ et $v(d(x)) = 0$, ce qui entraîne que l'équation de Weierstrass (2.25) est minimale et que la courbe elliptique $\mathscr{E}'_x/k_v$ est à réduction multiplicative, de type I_n avec $n = 2v((c^2 - d)(x))$. Par le même raisonnement que ci-dessus, la minimalité de (2.25) permet de voir que le k_v-point non nul du noyau de φ'_x ne se spécialise pas sur $\underline{\mathscr{E}}'^0_x$. En particulier, si $v((c^2 - d)(x)) = 1$, les courbes elliptiques $\mathscr{E}'_x$ et $\mathscr{E}''_x$ sont respectivement à réduction de type I_2 et I_1 (cf. proposition A.8) ; pour montrer que les $\kappa(v)$-groupes $\underline{\mathrm{F}}'$ et $\underline{\mathrm{F}}''$ sont constants, il suffit donc de vérifier que soit $v((c^2 - d)(x)) = 1$, soit $\mathscr{E}'_x$ est à réduction multiplicative déployée (cf. corollaire A.9). La place w étant par hypothèse totalement décomposée dans $\mathrm{L}'_\mathrm{M}\mathrm{L}''_\mathrm{M}$, il résulte du calcul de cette extension que soit M est racine simple de $c^2 - d$, soit l'image de $2c(\mathrm{M})$ dans $\kappa(\mathrm{M})_w$ est un carré. Dans le premier cas, on a $v((c^2 - d)(x)) = 1$ puisque $\widetilde{x}$ rencontre $\widetilde{\mathrm{M}} \otimes_\mathscr{O} \mathscr{O}_v$ transversalement. Dans le second, comme $2c(\mathrm{M})$ est une unité w-adique et que son image dans $\kappa(w)$ est égale à celle de $2c(x)$ dans $\kappa(v)$, la courbe elliptique $\mathscr{E}'_x$ est à réduction multiplicative déployée. $\square$

2.3.4 Réciprocités et existence de points locaux

Pour $\mathrm{M} \in \mathscr{M}$, notons $\theta_{\mathrm{M}} \in \kappa(\mathrm{M})$ l'image de t par le morphisme $k[t] \to \kappa(\mathrm{M})$ déduit de l'inclusion de M dans $\mathbf{A}^1_k = \mathrm{Spec}(k[t])$. Si E est une extension quadratique ou triviale de $\kappa(\mathrm{M})$, on pose

$$\mathrm{A}_{\mathrm{E}/\kappa(\mathrm{M})} = \mathrm{Cores}_{\kappa(\mathrm{M})(t)/k(t)}(\mathrm{E}/\kappa(\mathrm{M}), t - \theta_{\mathrm{M}}) \in {}_2\mathrm{Br}(\mathrm{U}),$$

où $(\cdot,\cdot)$ désigne le symbole de Hilbert sur le corps $\kappa(\mathrm{M})(t)$.

Proposition 2.11 — *Soient un couple préadmissible* $(\mathscr{T}, x)$*, une place* $v \in \Omega \setminus \mathrm{S}$*, un point* $\mathrm{M} \in \mathscr{M}$ *et une extension quadratique ou triviale* $\mathrm{E}/\kappa(\mathrm{M})$ *non ramifiée en toute place de* $\kappa(\mathrm{M})$ *divisant* v*. Alors on a* $\mathrm{inv}_v\, \mathrm{A}_{\mathrm{E}/\kappa(\mathrm{M})}(x) = 0$ *si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

1. *La place* v *appartient à* $\mathrm{T}_{\mathrm{M}} \cup \{v_{\mathrm{M}}\}$ *et l'unique place de* $\mathrm{T}'_{\mathrm{M}} \cup \{w_{\mathrm{M}}\}$ *divisant* v *est totalement décomposée dans* E*.*
2. *La place* v *n'appartient pas à* $\mathrm{T}_{\mathrm{M}} \cup \{v_{\mathrm{M}}\}$*.*

Démonstration — Considérons l'égalité

$$\mathrm{inv}_v\, \mathrm{A}_{\mathrm{E}/\kappa(\mathrm{M})}(x) = \sum_{w|v} \mathrm{inv}_w(\mathrm{E}/\kappa(\mathrm{M}), x - \theta_{\mathrm{M}}), \tag{2.26}$$

où la somme porte sur les places w de $\kappa(\mathrm{M})$ divisant v. Si w est une telle place, l'image dans $\mathrm{H}^1(\kappa(\mathrm{M})_w, \mathbf{Z}/2) = \kappa(\mathrm{M})^\star_w/\kappa(\mathrm{M})^{\star 2}_w$ de la classe de l'extension quadratique ou triviale $\mathrm{E}/\kappa(\mathrm{M})$ est la classe d'une unité w-adique, puisque w est par hypothèse non ramifiée dans E. Comme v n'est pas une place dyadique, on en déduit d'une part que l'invariant $\mathrm{inv}_w(\mathrm{E}/\kappa(\mathrm{M}), x - \theta_{\mathrm{M}})$ est nul si $x - \theta_{\mathrm{M}} \in \kappa(\mathrm{M})$ est une unité w-adique, d'autre part que si l'image de $x - \theta_{\mathrm{M}}$ dans $\kappa(\mathrm{M})_w$ est une uniformisante, cet invariant est nul si et seulement si w est totalement décomposée dans E (cf. [23, Prop. 1.1.3]). En particulier, compte tenu de (2.26) et de l'hypothèse de préadmissibilité, on a $\mathrm{inv}_v\, \mathrm{A}_{\mathrm{E}/\kappa(\mathrm{M})}(x) = 0$ si $v \notin \mathrm{T}_{\mathrm{M}} \cup \{v_{\mathrm{M}}\}$ et $\mathrm{inv}_v\, \mathrm{A}_{\mathrm{E}/\kappa(\mathrm{M})}(x) = \mathrm{inv}_w(\mathrm{E}/\kappa(\mathrm{M}), x - \theta_{\mathrm{M}})$ si $v \in \mathrm{T}_{\mathrm{M}} \cup \{v_{\mathrm{M}}\}$ et que w est l'unique place de $\mathrm{T}'_{\mathrm{M}} \cup \{w_{\mathrm{M}}\}$ divisant v, auquel cas l'image de $x - \theta_{\mathrm{M}}$ dans $\kappa(\mathrm{M})_w$ est une uniformisante. La proposition s'ensuit. □

Proposition 2.12 — *Pour tout* $\mathrm{M} \in \mathscr{M}$*, tout couple préadmissible* $(\mathscr{T}, x)$ *et toute extension quadratique ou triviale* $\mathrm{E}/\kappa(\mathrm{M})$ *non ramifiée en toute place de* $\kappa(\mathrm{M})$ *dont la trace sur* k *n'appartient pas à* T*, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *La place* w_{M} *de* $\kappa(\mathrm{M})$ *associée à* $(\mathscr{T}, x)$ *est totalement décomposée dans* E*.*
2. *On a* $\sum_{v \in \mathrm{T}} \mathrm{inv}_v\, \mathrm{A}_{\mathrm{E}/\kappa(\mathrm{M})}(x) = 0$*.*

Démonstration — La proposition 2.11 montre que $\mathrm{inv}_v\, \mathrm{A}_{\mathrm{E}/\kappa(\mathrm{M})}(x) = 0$ pour toute place $v \in \Omega$ n'appartenant pas à $\mathrm{T} \cup \{v_\mathrm{M}\}$. On a donc

$$\sum_{v\in\mathrm{T}} \mathrm{inv}_v\, \mathrm{A}_{\mathrm{E}/\kappa(\mathrm{M})}(x) = \mathrm{inv}_{v_\mathrm{M}}\, \mathrm{A}_{\mathrm{E}/\kappa(\mathrm{M})}(x),$$

en vertu de la loi de réciprocité globale. Une nouvelle application de la proposition 2.11 permet maintenant de conclure. □

Proposition 2.13 — *Il existe un ensemble fini* $\mathrm{S}_0 \subset \Omega$ *contenant les places archimédiennes tel que pour tout* $v \in \Omega \setminus \mathrm{S}_0$, *les assertions suivantes soient vérifiées. Soient* $m \in \mathfrak{S}_{\varphi'}(\mathbf{A}^1_k, \mathscr{E}')$ *et* $\mathrm{M} \in \mathscr{M}''$. *Notons* $d \in \mathrm{H}^1(\kappa(\mathrm{M}), \mathrm{F}'_\mathrm{M})$ *l'image de* m *par la flèche composée*

$$\mathfrak{S}_{\varphi'}(\mathbf{A}^1_k, \mathscr{E}') \to \mathrm{H}^1(\mathbf{A}^1_k, \mathscr{E}') \to \mathrm{H}^1(\kappa(\mathrm{M}), \mathrm{F}'_\mathrm{M}) \tag{2.27}$$

et $\mathrm{K}_{\mathrm{M},d}/\kappa(\mathrm{M})$ *une extension quadratique ou triviale satisfaisant aux conditions du lemme 2.6. Si l'image de* m *dans* $\mathrm{H}^1(\mathrm{U}_{k_v}, \mathbf{Z}/2)$ *appartient au sous-groupe* $\mathrm{H}^1(\mathscr{U}_{\mathscr{O}_v}, \mathbf{Z}/2)$, *alors :*

1. *Toute place de* $\kappa(\mathrm{M})$ *divisant* v *est non ramifiée dans* $\mathrm{K}_{\mathrm{M},d}$.
2. *Pour tout* $x \in \mathbf{A}^1(\mathscr{O}_v)$ *rencontrant transversalement* $\widetilde{\mathrm{M}} \otimes_{\mathscr{O}} \mathscr{O}_v$ *en une place* w *de* $\kappa(\mathrm{M})$ *totalement décomposée dans* $\mathrm{L}'_\mathrm{M}\mathrm{L}''_\mathrm{M}$, *l'image de* m *par la flèche composée*

$$\mathfrak{S}_{\varphi'}(\mathbf{A}^1_k, \mathscr{E}') \to \mathrm{H}^1(\mathbf{A}^1_k, \mathscr{E}') \to \mathrm{H}^1(k_v, \mathscr{E}'_x) \tag{2.28}$$

est nulle si et seulement si w *est totalement décomposée dans* $\mathrm{K}_{\mathrm{M},d}$.

Le même énoncé reste vrai si l'on échange tous les $'$ *et les* $''$.

Démonstration — Comme $\mathrm{Pic}(\mathbf{A}^1_k \setminus \mathscr{M}') = 0$, les groupes $\mathfrak{S}_{\varphi'}(\mathbf{A}^1_k, \mathscr{E}')$ et $\mathbf{G}_\mathrm{m}(\mathbf{A}^1_k \setminus \mathscr{M}')/2$ sont canoniquement isomorphes (cf. proposition 2.1). On utilisera librement cette identification ci-dessous. Choisissons un point $a \in \mathrm{U}(k)$ et notons $r\colon \mathbf{G}_\mathrm{m}(\mathbf{A}^1_k \setminus \mathscr{M}')/2 \to \mathbf{G}_\mathrm{m}(k)/2$ l'application d'évaluation en a. Comme r est une rétraction de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbf{G}_\mathrm{m}(k)/2 \longrightarrow \mathbf{G}_\mathrm{m}(\mathbf{A}^1_k \setminus \mathscr{M}')/2 \longrightarrow \prod_{\mathrm{M}\in\mathscr{M}'} \mathbf{Z}/2,$$

son noyau est fini. Pour $\mathrm{M} \in \mathscr{M}''$, soit $\mathrm{G}_\mathrm{M} \subset \mathrm{H}^1(\kappa(\mathrm{M}), \mathrm{F}'_\mathrm{M})$ l'image de $\mathrm{Ker}(r)$ par la flèche (2.27). Les groupes G_M et l'ensemble $\mathscr{M}''$ étant finis, il existe un ensemble fini $\mathrm{S}_0 \subset \Omega$ contenant les places archimédiennes, tel que pour tout $v \in \Omega \setminus \mathrm{S}_0$, tout $\mathrm{M} \in \mathscr{M}''$ et toute place w de $\kappa(\mathrm{M})$ divisant v, le noyau de la flèche de restriction $\mathrm{H}^1(\kappa(\mathrm{M}), \mathrm{F}'_\mathrm{M}) \to \mathrm{H}^1(\kappa(\mathrm{M})^{\mathrm{nr}}_w, \mathrm{F}'_\mathrm{M})$ contienne G_M (cf. [62, §6.1, Proposition 21]). Quitte à agrandir S_0, on peut supposer de plus que $\widetilde{a} \cap \mathbf{P}^1_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}}$ est inclus dans $\mathscr{U}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}}$, que S_0 contient les places dyadiques de k et les places finies qui sont ramifiées dans l'une des extensions L'_{M} ou $\mathrm{L}''_{\mathrm{M}}$ pour $\mathrm{M} \in \mathscr{M}$, que le $\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}$-schéma $\mathbf{P}^1_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \cap \bigcup_{\mathrm{M} \in \mathscr{M} \cup \{\infty\}} \widetilde{\mathrm{M}}$ est étale et que S_0 contient l'ensemble du même nom donné par la proposition 2.10.

Soient v, m, M et d comme dans l'énoncé. L'existence du carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1(\mathscr{O}_v, \mathbf{Z}/2) \arrow[d] & \mathrm{H}^1(\mathscr{U}_{\mathscr{O}_v}, \mathbf{Z}/2) \arrow[l] \arrow[d] \\
\mathrm{H}^1(k_v^{\mathrm{nr}}, \mathbf{Z}/2) & \mathrm{H}^1(\mathrm{U}_{k_v^{\mathrm{nr}}}, \mathbf{Z}/2), \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

dont la flèche verticale de gauche est nulle et dont les flèches horizontales sont les applications d'évaluation en a, entraîne que $r(m) \in \mathrm{Ker}(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}(k)/2 \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}(k_v^{\mathrm{nr}})/2)$. Par conséquent, l'image de m dans $\mathrm{H}^1((\mathbf{A}^1_k \setminus \mathscr{M}') \otimes_k k_v^{\mathrm{nr}}, \mathbf{Z}/2)$ appartient à l'image de $\mathrm{Ker}(r)$. Comme $\mathrm{M} \in \mathscr{M}''$, la proposition A.8 montre que le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Z}/2 \arrow[r, equal] \arrow[d] & {}_{\varphi'}\mathscr{E}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{E}' \arrow[d] \\
i_{\mathrm{M}\star}\mathbf{Z}/2 \arrow[r, "\sim"] & i_{\mathrm{M}\star}\,({}_2\mathrm{F}'_{\mathrm{M}}) \arrow[r] & i_{\mathrm{M}\star}\mathrm{F}'_{\mathrm{M}}
\end{tikzcd}$$

de faisceaux étales sur $\mathbf{P}^1_k$ commute. On en déduit la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{S}_{\varphi'}(\mathbf{A}^1_k, \mathscr{E}') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^1((\mathbf{A}^1_k \setminus \mathscr{M}') \otimes_k k_v^{\mathrm{nr}}, \mathbf{Z}/2) \arrow[d] \\
\mathrm{H}^1(\mathbf{A}^1_k, \mathscr{E}') \arrow[d] & \mathrm{H}^1(\kappa(\mathrm{M}) \otimes_k k_v^{\mathrm{nr}}, \mathbf{Z}/2) \arrow[d] \\
\mathrm{H}^1(\kappa(\mathrm{M}), \mathrm{F}'_{\mathrm{M}}) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(\kappa(\mathrm{M}) \otimes_k k_v^{\mathrm{nr}}, \mathrm{F}'_{\mathrm{M}}),
\end{tikzcd}$$

où la flèche inférieure de la colonne de droite est induite par l'inclusion $\mathbf{Z}/2 = {}_2\mathrm{F}'_{\mathrm{M}} \subset \mathrm{F}'_{\mathrm{M}}$. Comme l'image de m par la flèche horizontale supérieure appartient à l'image de $\mathrm{Ker}(r)$, ce diagramme montre que pour toute place w de $\kappa(\mathrm{M})$ divisant v, l'image de d dans $\mathrm{H}^1(\kappa(\mathrm{M})_w^{\mathrm{nr}}, \mathrm{F}'_{\mathrm{M}})$ appartient à l'image de G_{M}, et est donc nulle. L'extension $\mathrm{L}'_{\mathrm{M}}/\kappa(\mathrm{M})$ étant non ramifiée en w, elle se plonge dans $\kappa(\mathrm{M})_w^{\mathrm{nr}}$. L'extension $\mathrm{K}_{\mathrm{M},d}/\kappa(\mathrm{M})$ se plonge donc elle aussi dans $\kappa(\mathrm{M})_w^{\mathrm{nr}}$, par définition de $\mathrm{K}_{\mathrm{M},d}$; autrement dit, elle est non ramifiée en w. La propriété 1 est établie.

Soit $x \in \mathbf{A}^1(\mathscr{O}_v)$ rencontrant transversalement $\widetilde{\mathrm{M}} \otimes_{\mathscr{O}} \mathscr{O}_v$ en une place w de $\kappa(\mathrm{M})$ totalement décomposée dans $\mathrm{L}'_\mathrm{M}\mathrm{L}''_\mathrm{M}$. Comme $\mathrm{M} \in \mathscr{M}''$, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}/2 \longrightarrow \mathrm{F}'_\mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{F}''_\mathrm{M} \longrightarrow 0 \tag{2.29}$$

de $\kappa(\mathrm{M})$-groupes (cf. proposition A.8). Les groupes F'_M et F''_M deviennent constants après extension des scalaires de $\kappa(\mathrm{M})$ à $\kappa(\mathrm{M})_w$ puisque w est totalement décomposée dans $\mathrm{L}'_\mathrm{M}\mathrm{L}''_\mathrm{M}$. La flèche $\mathrm{H}^1(\kappa(\mathrm{M})_w, \mathbf{Z}/2) \to \mathrm{H}^1(\kappa(\mathrm{M})_w, \mathrm{F}'_\mathrm{M})$ issue de la suite exacte (2.29) est donc injective. Par ailleurs, la conclusion de la proposition 2.10 montre que la flèche $\mathrm{H}^1(k_v, \mathbf{Z}/2) \to \mathrm{H}^1(k_v, \mathscr{E}'_x)$ induite par la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}/2 \longrightarrow \mathscr{E}'_x \xrightarrow{\varphi'_x} \mathscr{E}''_x \longrightarrow 0$$

est injective. Ces deux injections s'inscrivent dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{G}_\mathrm{m}(k_v)/2 \arrow[r, hook] & \mathrm{H}^1(k_v, \mathscr{E}'_x) \\
\mathfrak{S}_{\varphi'}(\mathbf{A}^1_k, \mathscr{E}') \arrow[r, equal] & \mathbf{G}_\mathrm{m}(\mathbf{A}^1_k \setminus \mathscr{M}')/2 \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & \mathrm{H}^1(\mathbf{A}^1_k \setminus \mathscr{M}', \mathscr{E}') \arrow[u] \arrow[d] \\
& \mathbf{G}_\mathrm{m}(\kappa(\mathrm{M})_w)/2 \arrow[r, hook] & \mathrm{H}^1(\kappa(\mathrm{M})_w, \mathrm{F}'_\mathrm{M}),
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales supérieures (resp. inférieures) sont les flèches d'évaluation en x (resp. en M). Étant donné que la place w est totalement décomposée dans L'_M, il résulte de la définition de $\mathrm{K}_{\mathrm{M},d}$ que l'image de m dans $\mathrm{H}^1(\kappa(\mathrm{M})_w, \mathrm{F}'_\mathrm{M})$ est nulle si et seulement si w est totalement décomposée dans $\mathrm{K}_{\mathrm{M},d}$. Compte tenu du diagramme ci-dessus, il suffit donc, pour conclure, de prouver que l'image de m dans $\mathbf{G}_\mathrm{m}(k_v)/2$ par l'évaluation en x est nulle si et seulement si l'image de m dans $\mathbf{G}_\mathrm{m}(\kappa(\mathrm{M})_w)/2$ par l'évaluation en M est nulle. Comme l'image de m dans $\mathrm{H}^1(\mathrm{U}_{k_v}, \mathbf{Z}/2)$ appartient à $\mathrm{H}^1(\mathscr{U}_{\mathscr{O}_v}, \mathbf{Z}/2)$, la classe de m dans $\mathbf{G}_\mathrm{m}(\mathbf{A}^1_k \setminus \mathscr{M}')/2$ est représentée par une fonction rationnelle f sur $\mathbf{A}^1_{\mathscr{O}_v}$ inversible sur le complémentaire de l'adhérence de $\mathscr{M}' \otimes_k k_v$. Notant encore M le point fermé de $\mathbf{A}^1_{k_v}$ associé au point $\mathrm{M} \in \mathscr{M}$ et à la place w, les éléments $f(\mathrm{M})$ de $\kappa(\mathrm{M})_w$ et $f(x)$ de k_v sont respectivement des unités w-adiques et v-adiques. Ils ont même réduction modulo v et sont donc simultanément des carrés (lemme de Hensel). La propriété 2 est ainsi établie.

L'énoncé obtenu en échangeant les $'$ et les $''$ se prouve en appliquant la même opération à la démonstration qui précède. □

2.3.5 Finitude de $\mathfrak{S}'_{\mathrm{D}_0}$ et $\mathfrak{S}''_{\mathrm{D}_0}$

L'énoncé suivant servira pour la preuve de l'assertion a) du théorème 2.2.

Proposition 2.14 — *Si* $\mathscr{M}' \neq \varnothing$ *et* $\mathscr{M}'' \neq \varnothing$*, les groupes* $\mathfrak{S}'_{\mathrm{D}_0}$ *et* $\mathfrak{S}''_{\mathrm{D}_0}$ *sont finis.*

Démonstration — Par symétrie, il suffit de considérer le groupe $\mathfrak{S}'_{\mathrm{D}_0}$. Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}''$. La flèche horizontale inférieure du carré commutatif canonique

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^1(\mathbf{A}^1_k \setminus \mathscr{M}', {}_{\varphi'}\mathscr{E}') & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(\mathbf{A}^1_k \setminus \mathscr{M}', \mathscr{E}') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{H}^1(\mathrm{L}'_\mathrm{M}, {}_{\varphi'_\mathrm{M}}\mathrm{F}'_\mathrm{M}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(\mathrm{L}'_\mathrm{M}, \mathrm{F}'_\mathrm{M}) \end{array}$$

est injective puisque le L'_M-groupe $\mathrm{F}'_\mathrm{M} \otimes_{\kappa(\mathrm{M})} \mathrm{L}'_\mathrm{M}$ est constant. La flèche verticale de gauche s'identifie à l'évaluation $\mathrm{H}^1(\mathbf{A}^1_k \setminus \mathscr{M}', \mathbf{Z}/2) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{L}'_\mathrm{M}, \mathbf{Z}/2)$. Il suffit de démontrer que le noyau de cette flèche d'évaluation est fini, compte tenu de la proposition 2.1. Le sous-groupe $\mathrm{H}^1(k, \mathbf{Z}/2) \subset \mathrm{H}^1(\mathbf{A}^1_k \setminus \mathscr{M}', \mathbf{Z}/2)$ étant d'indice fini, il reste seulement à vérifier que le noyau de la flèche de restriction $\mathrm{H}^1(k, \mathbf{Z}/2) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{L}'_\mathrm{M}, \mathbf{Z}/2)$ est fini, ce qui est élémentaire. □

2.3.6 Fin de la preuve

Proposition 2.15 — *Il existe un ensemble* $\mathrm{S}_0 \subset \Omega$ *tel que pour tout* $\mathrm{S} \subset \Omega$ *fini contenant* S_0 *et tout couple admissible* $(\mathscr{T}, x)$ *vérifiant* $\mathrm{X}_x(k_v) \neq \varnothing$ *pour tout* $v \in \mathrm{S} \setminus \mathrm{T}_\infty$*, on ait* $\mathrm{X}_x(\mathbf{A}_k) \neq \varnothing$*, en notant* T_∞ *l'ensemble des places de* $\mathrm{S} \setminus \mathrm{S}_0$ *en lesquelles* x *n'est pas entier.*

Démonstration — Même démonstration que pour la proposition 1.30, en remplaçant $\mathscr{E}^0_\mathrm{M}$, $\mathscr{E}_\mathrm{M}$, F_M et $\mathrm{L}_\mathrm{M}\mathrm{K}_\mathrm{M}$ dans le lemme 1.31 par $\mathscr{E}'^0_\mathrm{M}$, $\mathscr{E}'_\mathrm{M}$, F'_M et $\mathrm{L}'_\mathrm{M}\mathrm{L}''_\mathrm{M}\mathrm{K}_\mathrm{M}$. □

Nous pouvons maintenant commencer la démonstration du théorème 2.2. Soit $\mathrm{S}_0 \subset \Omega$ un ensemble fini contenant les places archimédiennes, les places divisant un nombre premier inférieur ou égal au degré de $\mathscr{M}$ vu comme k-schéma fini réduit, les ensembles S_0 donnés par les propositions 2.10, 2.13 et 2.15 et les places finies de k au-dessus desquelles le morphisme

$$\bigcup_{\mathrm{M} \in \mathscr{M} \cup \{\infty\}} \widetilde{\mathrm{M}} \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathscr{O})$$

n'est pas étale, assez grand pour que les extensions L'_M/k, $\mathrm{L}''_\mathrm{M}/k$ et K_M/k soient non ramifiées hors de S_0 pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{M}$, pour que la condition (2.18) soit satisfaite avec $\mathrm{S} = \mathrm{S}_0$, pour que les courbes elliptiques E'_η et E''_η sur K s'étendent en des schémas abéliens au-dessus de $\left(\mathbf{P}^1_\mathscr{O} \setminus \bigcup_{\mathrm{M} \in \mathscr{M}} \widetilde{\mathrm{M}}\right) \otimes_\mathscr{O} \mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}$, et pour que les sous-groupes de $\mathrm{H}^1(\mathrm{U}, \mathbf{Z}/2)$ images réciproques de $\{0, [\mathscr{X}]\}$

et de $\{0, [\mathscr{X}'']\}$ par les flèches (2.10) et (2.11), finis d'après le théorème de Mordell-Weil généralisé, soient inclus dans $\mathrm{H}^1(\mathscr{U}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}}, \mathbf{Z}/2)$. Soit $\mathrm{B}_0 \subset \mathrm{Br}(\mathrm{U})$ le sous-groupe fini engendré par les classes $\mathrm{A}_{\mathrm{K}_\mathrm{M}/\kappa(\mathrm{M})}$, $\mathrm{A}_{\mathrm{L}'_\mathrm{M}/\kappa(\mathrm{M})}$ et $\mathrm{A}_{\mathrm{L}''_\mathrm{M}/\kappa(\mathrm{M})}$ pour $\mathrm{M} \in \mathscr{M}$ (cf. paragraphe 2.3.4). Soient $\mathrm{S}_1 \subset \Omega$ fini contenant S_0 et $(x_v)_{v \in \mathrm{S}_1} \in \prod_{v \in \mathrm{S}_1} \mathrm{U}(k_v)$ satisfaisant aux hypothèses du théorème 2.2. On va prouver l'existence de $x \in \mathrm{U}(k)$ arbitrairement proche de x_v pour $v \in \mathrm{S}_1 \cap \Omega_f$ et arbitrairement grand aux places archimédiennes de k, tel que $x \in \mathscr{R}_\mathrm{D}$ si $\mathscr{M}' \neq \varnothing$ et $\mathscr{M}'' \neq \varnothing$, ou tel que $x \in \mathscr{R}_{\mathrm{D}_0, \mathrm{S}_1}$ et que x soit entier hors de S_1.

Commençons par définir un ensemble fini $\mathrm{T}_\infty \subset \Omega$ disjoint de S_1. Nous allons prouver simultanément les deux conclusions du théorème, mais avec des choix différents pour l'ensemble T_∞. Pour prouver l'assertion b) du théorème, on pose $\mathrm{T}_\infty = \varnothing$. Pour prouver l'assertion a), on pose $\mathrm{T}_\infty = \{v_\infty\}$, où v_∞ est choisie comme suit. Lorsque $\mathscr{M}' \neq \varnothing$ et $\mathscr{M}'' \neq \varnothing$, les trois sous-groupes $\mathrm{H}^1(\mathscr{U}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_1}}, \mathbf{Z}/2)$, $\mathfrak{S}'_{\mathrm{D}_0}$ et $\mathfrak{S}''_{\mathrm{D}_0}$ de $\mathrm{K}^\star/\mathrm{K}^{\star 2}$ sont finis (le premier d'après le théorème des unités de Dirichlet et la finitude du groupe de classes d'un corps de nombres, les deux autres d'après la proposition 2.14). L'intersection du sous-groupe de $\mathrm{K}^\star/\mathrm{K}^{\star 2}$ qu'ils engendrent avec $k^\star/k^{\star 2}$ est donc elle aussi finie, et par conséquent incluse dans $\mathscr{O}^\star_{\mathrm{S}'}/\mathscr{O}^{\star 2}_{\mathrm{S}'}$ pour un ensemble $\mathrm{S}' \subset \Omega$ fini assez grand. Le théorème de Čebotarev fournit une infinité de places $v \in \Omega$ telles que pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{M}$, toute place de $\kappa(\mathrm{M})$ divisant v soit totalement décomposée dans $\mathrm{L}'_\mathrm{M}\mathrm{L}''_\mathrm{M}\mathrm{K}_\mathrm{M}$. On choisit pour v_∞ une telle place hors de $\mathrm{S}_1 \cup \mathrm{S}'$ et l'on note $x_{v_\infty} \in k_{v_\infty}$ l'inverse d'une uniformisante.

Posons $\mathrm{S} = \mathrm{S}_1 \cup \mathrm{T}_\infty$. On a, par définition de S_0 :

Lemme 2.16 — *Pour tout couple préadmissible* $(\mathscr{T}, x)$*, les courbes elliptiques* $\mathscr{E}'_x$ *et* $\mathscr{E}''_x$ *ont bonne réduction hors de* $\mathrm{T}(x) \setminus \mathrm{T}_\infty$.

Pour chaque place finie $v \in \mathrm{S}$, fixons un voisinage v-adique arbitrairement petit $\mathscr{A}_v$ de $x_v \in \mathbf{P}^1(k_v)$, suffisamment petit pour que tout élément de $\mathscr{A}_v$ soit l'inverse d'une uniformisante si $v \in \mathrm{T}_\infty$, pour que $\mathrm{inv}_v\, \mathrm{A}(x) = \mathrm{inv}_v\, \mathrm{A}(x_v)$ pour tout $x \in \mathscr{A}_v$ et tout $\mathrm{A} \in \mathrm{B}_0$, et pour que $\mathrm{X}_x(k_v) \neq \varnothing$ pour tout $x \in \mathscr{A}_v$ si $v \in \mathrm{S}_1$. Il est possible de satisfaire cette dernière condition grâce au théorème des fonctions implicites et à l'hypothèse que $\mathrm{X}_{x_v}(k_v) \neq \varnothing$ pour $v \in \mathrm{S}_1 \cap \Omega_f$. Fixons de même un voisinage v-adique arbitrairement petit $\mathscr{A}_v$ de $\infty \in \mathbf{P}^1(k_v)$ pour chaque place complexe $v \in \Omega$, et un ouvert connexe non majoré arbitrairement petit $\mathscr{A}_v \subset \mathrm{U}(k_v)$ pour chaque place réelle $v \in \Omega$, suffisamment petit pour que $\mathrm{X}_x(k_v) \neq \varnothing$ pour tout $x \in \mathscr{A}_v$ et pour que les sous-groupes $\mathscr{E}'_x(k_v)/\mathrm{Im}(\varphi''_x)$ et $\mathscr{E}''_x(k_v)/\mathrm{Im}(\varphi'_x)$ de $\mathrm{H}^1(k_v, \mathbf{Z}/2)$ ne dépendent pas de $x \in \mathscr{A}_v$ (cf. preuve du lemme 1.24).

Lemme 2.17 — *Soit* $x \in \mathrm{U}(k)$ *appartenant à* $\mathscr{A}_v$ *pour tout* $v \in \mathrm{S}$*. Alors* $\sum_{v \in \mathrm{S}} \mathrm{inv}_v\, \mathrm{A}(x) = 0$ *pour tout* $\mathrm{A} \in \mathrm{B}_0$.

Démonstration — Même démonstration que pour le lemme 1.33. □

Si $(\mathscr{T}, x)$ est un couple préadmissible, on notera

$$\psi \colon \mathrm{H}^1(\mathscr{O}_{\mathrm{T}(x)}, \mathbf{Z}/2) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathscr{U}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}}}, \mathbf{Z}/2)$$

l'isomorphisme inverse de l'évaluation en x (cf. proposition 2.7).

Proposition 2.18 — *Soit $(\mathscr{T}, x)$ un couple admissible. Alors le groupe de φ'_x-Selmer de $\mathscr{E}'_x$ et le groupe de φ''_x-Selmer de $\mathscr{E}''_x$ sont inclus dans $\mathrm{H}^1(\mathscr{O}_{\mathrm{T}(x)}, \mathbf{Z}/2)$, et l'on a*

$$\psi(\mathrm{Sel}_{\varphi'_x}(k, \mathscr{E}'_x)) \subset \mathfrak{S}_{\varphi'}(\mathbf{A}^1_k, \mathscr{E}')$$

et

$$\psi(\mathrm{Sel}_{\varphi''_x}(k, \mathscr{E}''_x)) \subset \mathfrak{S}_{\varphi''}(\mathbf{A}^1_k, \mathscr{E}'').$$

Démonstration — La première assertion est une conséquence du lemme 2.16. La proposition 2.10 montre que tout élément du groupe de φ'_x-Selmer de $\mathscr{E}'_x$ est de valuation nulle en v_{M} pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{M}''$. Comme ψ est à valeurs dans $\mathrm{H}^1(\mathscr{U}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}}}, \mathbf{Z}/2)$, le lemme 2.9 et la proposition 2.1 permettent d'en déduire que $\psi(\mathrm{Sel}_{\varphi'_x}(k, \mathscr{E}'_x)) \subset \mathfrak{S}_{\varphi'}(\mathbf{A}^1_k, \mathscr{E}')$. On prouve l'autre inclusion de la même manière. $\square$

Notons $\mathscr{L}$ l'ensemble des couples $(m', m'') \in \mathbf{N}^2$ tels qu'il existe un couple admissible $(\mathscr{T}, x)$ avec $x \in \mathscr{A}_v$ pour tout $v \in \mathrm{S}$, tel que :

$$\dim_{\mathbf{F}_2} \mathrm{Sel}_{\varphi'_x}(k, \mathscr{E}'_x) = m', \tag{2.30}$$

$$\dim_{\mathbf{F}_2} \mathrm{Sel}_{\varphi''_x}(k, \mathscr{E}''_x) = m'', \tag{2.31}$$

$$\psi(\mathrm{Sel}_{\varphi'_x}(k, \mathscr{E}'_x)) \subset \mathfrak{S}_{\varphi',\mathrm{S}}(\mathbf{A}^1_k, \mathscr{E}'), \tag{2.32}$$

$$\psi(\mathrm{Sel}_{\varphi''_x}(k, \mathscr{E}''_x)) \subset \mathfrak{S}_{\varphi'',\mathrm{S}}(\mathbf{A}^1_k, \mathscr{E}''). \tag{2.33}$$

Munissons $\mathscr{L}$ de l'ordre partiel $(m', m'') \leqslant (n', n'') \iff m' \leqslant n'$ et $m'' \leqslant n''$.

Proposition 2.19 — *Admettons l'hypothèse de Schinzel. Soit $\mathscr{T} = (\mathrm{T}'_{\mathrm{M}})_{\mathrm{M} \in \mathscr{M}}$ une famille préadmissible. Supposons donné, pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{M}$ et tout $v \in \mathrm{T}_{\mathrm{M}}$, un $x_v \in \mathbf{A}^1(\mathscr{O}_v)$ rencontrant transversalement $\widetilde{\mathrm{M}}$ en l'unique place de T'_{M} qui divise v. Alors il existe $x \in \mathrm{U}(k)$ arbitrairement proche de x_v pour $v \in \mathrm{T} \cap \Omega_f$ et arbitrairement grand aux places archimédiennes de k, tel que le couple $(\mathscr{T}, x)$ soit préadmissible.*

Démonstration — Même démonstration que pour la proposition 1.34, à ceci près que l'on utilise l'hypothèse (2.18) au lieu de la nullité de $\mathrm{Pic}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})$. $\square$

L'ensemble $\mathscr{L}$ n'est pas vide. En effet, la proposition 2.19, appliquée à la famille $\mathscr{T}$ définie par $\mathrm{T}'_{\mathrm{M}} = \varnothing$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{M}$, assure l'existence d'un $x \in \mathrm{U}(k)$ appartenant à $\mathscr{A}_v$ pour tout $v \in \mathrm{S}$, tel que le couple $(\mathscr{T}, x)$ soit préadmissible. Le lemme 2.17 et la proposition 2.12, appliquée aux trois extensions $\mathrm{K}_{\mathrm{M}}/\kappa(\mathrm{M})$, $\mathrm{L}'_{\mathrm{M}}/\kappa(\mathrm{M})$ et $\mathrm{L}''_{\mathrm{M}}/\kappa(\mathrm{M})$, montrent que ce couple est même admissible. Par ailleurs, les inclusions (2.32) et (2.33) sont automatiques lorsque les ensembles T_{M} sont vides (proposition 2.18).

Il existe donc un élément $(m', m'') \in \mathscr{L}$ minimal. Soient $\mathscr{T} = (\mathrm{T}'_{\mathrm{M}})_{\mathrm{M} \in \mathscr{M}}$ et $x \in \mathrm{U}(k)$ avec $x \in \mathscr{A}_v$ pour tout $v \in \mathrm{S}$, tels que le couple $(\mathscr{T}, x)$ soit admissible et que les propriétés (2.30) à (2.33) soient vérifiées. On a $\mathrm{X}_x(k_v) \neq \varnothing$ pour tout $v \in \mathrm{S}$ par construction des voisinages $\mathscr{A}_v$. La conclusion de la proposition 2.15 permet d'en déduire que $x \in \mathscr{R}_{\mathrm{A}}$.

Proposition 2.20 — *On a* $x \in \mathscr{R}_{\mathrm{D}_0,\mathrm{S}}$. *De plus, si* $\mathrm{T}_\infty \neq \varnothing$, *on a* $x \in \mathscr{R}_{\mathrm{D}}$.

La démonstration de la proposition 2.20 va nous occuper jusqu'à la fin de ce paragraphe.

Démonstration — L'injectivité des restrictions des flèches (2.8) et (2.9) aux images réciproques de $\{0, [\mathscr{X}]\}$ et de $\{0, [\mathscr{X}'']\}$ par les flèches (2.10) et (2.11) est une conséquence immédiate de la proposition 2.7 et de la définition de S_0.

Soit $\alpha \in \mathrm{Sel}_{\varphi'_x}(k, \mathscr{E}'_x)$. Supposons que $\psi(\alpha) \notin \mathfrak{S}'_{\mathrm{D}_0,\mathrm{S}}$. Vu l'hypothèse (2.32), on a alors $\psi(\alpha) \notin \mathfrak{S}'_{\mathrm{D}_0}$.

Lemme 2.21 — *Pour tout* $e \in {}_{\varphi'}\mathrm{H}^1(\mathbf{A}^1_k, \mathscr{E}') \setminus \mathfrak{T}'_{\mathrm{D}_0}$, *il existe* $\mathrm{M} \in \mathscr{M}''$ *et une infinité de places* $v \in \Omega \setminus \mathrm{S}_0$ *telles qu'il existe une place* w *de* $\kappa(\mathrm{M})$ *totalement décomposée dans* $\mathrm{L}'_{\mathrm{M}}\mathrm{L}''_{\mathrm{M}}\mathrm{K}_{\mathrm{M}}$, *divisant* v, *non ramifiée et de degré résiduel* 1 *sur* v, *telle que pour tout* $x_v \in \mathbf{A}^1(\mathscr{O}_v)$ *rencontrant transversalement* $\widetilde{\mathrm{M}}$ *en* w, *l'image de* e *par la flèche* $\mathrm{H}^1(\mathbf{A}^1_k, \mathscr{E}') \to \mathrm{H}^1(k_v, \mathscr{E}'_{x_v})$ *d'évaluation en* x_v *soit non nulle.*

Démonstration — Soit $e \in {}_{\varphi'}\mathrm{H}^1(\mathbf{A}^1_k, \mathscr{E}') \setminus \mathfrak{T}'_{\mathrm{D}_0}$. Fixons un antécédent $m \in \mathfrak{S}_{\varphi'}(\mathbf{A}^1_k, \mathscr{E}')$ de e par la flèche de droite de la suite exacte (2.3). Par définition de $\mathfrak{T}'_{\mathrm{D}_0}$, il existe $\mathrm{M} \in \mathscr{M}''$ tel que $\delta'_{\mathrm{M}}(e)$ n'appartienne pas à $\{0, \delta'_{\mathrm{M}}([\mathscr{X}])\}$. Soient d l'image de e dans ${}_2\mathrm{H}^1(\kappa(\mathrm{M}), \mathrm{F}'_{\mathrm{M}})$ et $\mathrm{K}_{\mathrm{M},d}/\kappa(\mathrm{M})$ une extension quadratique vérifiant les conditions du lemme 2.6. Étant donné que l'extension $\mathrm{L}'_{\mathrm{M}}\mathrm{K}_{\mathrm{M}}/\mathrm{L}'_{\mathrm{M}}$ est quadratique ou triviale et que le groupe $\mathrm{F}'_{\mathrm{M}}(\mathrm{L}'_{\mathrm{M}}\mathrm{K}_{\mathrm{M}}) = \mathrm{F}'_{\mathrm{M}}(\mathrm{L}'_{\mathrm{M}})$ est cyclique, la suite exacte d'inflation-restriction montre que le noyau de la flèche de restriction $\mathrm{H}^1(\mathrm{L}'_{\mathrm{M}}, \mathrm{F}'_{\mathrm{M}}) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{L}'_{\mathrm{M}}\mathrm{K}_{\mathrm{M}}, \mathrm{F}'_{\mathrm{M}})$ est d'ordre au plus 2. Notons N ce noyau. Si $\mathrm{N} \neq 0$, alors $\mathrm{L}'_{\mathrm{M}}\mathrm{K}_{\mathrm{M}} \neq \mathrm{L}'_{\mathrm{M}}$, de sorte que la définition de K_{M} entraîne que $\delta'_{\mathrm{M}}([\mathscr{X}]) \in \mathrm{N} \setminus \{0\}$; le groupe N est donc dans tous les cas engendré par $\delta'_{\mathrm{M}}([\mathscr{X}])$. Par conséquent, l'image de e dans $\mathrm{H}^1(\mathrm{L}'_{\mathrm{M}}\mathrm{K}_{\mathrm{M}}, \mathrm{F}'_{\mathrm{M}})$ n'est pas nulle. L'extension quadratique $\mathrm{K}_{\mathrm{M},d}/\kappa(\mathrm{M})$ ne se plonge donc pas dans

$L'_M K_M/\kappa(M)$. On en déduit, à l'aide du théorème de Čebotarev, l'existence d'une infinité de places finies de $L'_M K_M$ non ramifiées et de degré résiduel 1 sur k, inertes dans $L'_M K_M K_{M,d}$ (cf. [35, Proposition 2.2]). Soient w la trace sur $\kappa(M)$ d'une telle place et $v \in \Omega_f$ la trace sur k de w. On peut supposer que v n'appartient pas à l'ensemble S_0 de la proposition 2.13 et que l'image de m dans $H^1(U_{k_v}, \mathbf{Z}/2)$ appartient à $H^1(\mathscr{U}_{\mathscr{O}_v}, \mathbf{Z}/2)$, quitte à choisir v hors d'un certain ensemble fini.

La place w est totalement décomposée dans $L'_M K_M$, inerte dans $K_{M,d}$, non ramifiée et de degré résiduel 1 sur v. Elle est de plus totalement décomposée dans L''_M car $L''_M/\kappa(M)$ se plonge dans $L'_M/\kappa(M)$, comme le montre la suite exacte

$$0 \longrightarrow F''_M \longrightarrow F'_M \longrightarrow \mathbf{Z}/2 \longrightarrow 0$$

(cf. proposition A.8). La seconde partie de la proposition 2.13 permet donc de conclure. □

Remarque — Il n'était pas nécessaire de faire appel à la proposition 2.13 pour prouver le lemme 2.21 ; on aurait tout aussi bien pu reprendre la même démonstration que pour le lemme 1.36.

La proposition 2.18 et le lemme 2.21 montrent qu'il existe un point $M_0 \in \mathscr{M}''$, une place $v_0 \in \Omega \setminus T$ et une place w_0 de $\kappa(M_0)$ totalement décomposée dans $L'_{M_0} L''_{M_0} K_{M_0}$, divisant v_0, non ramifiée et de degré résiduel 1 sur v_0, tels que la condition suivante soit satisfaite :

(2.34) pour tout $x_{v_0} \in \mathbf{A}^1(\mathscr{O}_{v_0})$ rencontrant transversalement $\widetilde{M_0}$ en w_0, l'image de $\psi(\alpha)$ dans $H^1(k_{v_0}, \mathscr{E}'_{x_{v_0}})$ est non nulle.

Pour tout $M \in \mathscr{M}$ et tout γ appartenant à $\mathfrak{S}_{\varphi',T}(\mathbf{A}^1_k, \mathscr{E}')$ (resp. à $\mathfrak{S}_{\varphi'',T}(\mathbf{A}^1_k, \mathscr{E}''))$, fixons une extension quadratique ou triviale $K_{M,\gamma}/\kappa(M)$ vérifiant les conditions du lemme 2.6 associées à l'image de γ dans $H^1(\kappa(M), F'_M)$ (resp. dans $H^1(\kappa(M), F''_M)$).

Soit $\mathscr{T}^+ = (T'^+_M)_{M\in\mathscr{M}}$ la famille définie par $T'^+_M = T'_M$ pour $M \neq M_0$ et $T'^+_{M_0} = T'_{M_0} \cup \{w_0\}$. C'est une famille admissible. Fixons $x_{v_0} \in \mathbf{A}^1(\mathscr{O}_{v_0})$ rencontrant transversalement $\widetilde{M_0}$ en w_0. Un tel x_{v_0} existe car la place w_0 est non ramifiée et de degré résiduel 1 sur v_0. D'après la proposition 2.19, il existe $x^+ \in U(k)$ arbitrairement proche de x pour $v \in T\cap\Omega_f$ et arbitrairement grand aux places archimédiennes, tel que le couple $(\mathscr{T}^+, x^+)$ soit préadmissible.

Lemme 2.22 — *Pour tout $v \in \Omega$, les sous-groupes $\mathscr{E}'_{x_v}(k_v)/\operatorname{Im}(\varphi''_{x_v})$ et $\mathscr{E}''_{x_v}(k_v)/\operatorname{Im}(\varphi'_{x_v})$ de $H^1(k_v, \mathbf{Z}/2)$ sont des fonctions localement constantes de $x_v \in (\mathbf{P}^1_k \setminus \mathscr{M})(k_v)$.*

Démonstration — Démonstration similaire à celle du lemme 1.24. □

Notons V'_v, W'_v, V''_v, W''_v, T'_v et T''_v (resp. V'^{+}_v, W'^{+}_v, V''^{+}_v, W''^{+}_v, T'^{+}_v et T''^{+}_v) les espaces définis au paragraphe 2.3.3 relativement au point x (resp. au point x^+). Grâce au lemme 2.22 et à la définition des voisinages $\mathscr{A}_v$, on peut supposer les conditions suivantes satisfaites, quitte à choisir x^+ assez proche de x aux places de $\mathrm{T}\cap\Omega_f$ et assez grand aux places archimédiennes :

(2.35) $x \in \mathscr{A}_v$ pour tout $v \in \mathrm{S}$;

(2.36) pour tout $v \in \mathrm{T}$ et tout $\gamma \in \mathrm{H}^1(\mathrm{U}, \mathbf{Z}/2)$, l'image de $\gamma(x)$ dans V'_v (resp. V''_v) appartient à W'_v (resp. W''_v) si et seulement si l'image de $\gamma(x^+)$ dans V'^{+}_v (resp. V''^{+}_v) appartient à W'^{+}_v (resp. W''^{+}_v) ;

(2.37) pour tout $\gamma \in \mathfrak{S}_{\varphi',\mathrm{T}}(\mathbf{A}^1_k, \mathscr{E}')$ (resp. tout $\gamma \in \mathfrak{S}_{\varphi'',\mathrm{T}}(\mathbf{A}^1_k, \mathscr{E}''))$, tout $\mathrm{M} \in \mathscr{M}$ et tout $v \in \mathrm{T}$, on a $\mathrm{inv}_v\, \mathrm{A}_{\mathrm{K}_{\mathrm{M},\gamma}/\kappa(\mathrm{M})}(x) = \mathrm{inv}_v\, \mathrm{A}_{\mathrm{K}_{\mathrm{M},\gamma}/\kappa(\mathrm{M})}(x^+)$.

(Pour la condition (2.36), on utilise la définition des voisinages $\mathscr{A}_v$ pour v réelle et le fait que $\mathrm{H}^1(\mathrm{U}, \mathbf{Z}/2) = \mathbf{G}_\mathrm{m}(\mathrm{U})/2$ est engendré par un sous-groupe fini et par $\mathbf{G}_\mathrm{m}(k)/2$.)

Notons T^+, $\mathrm{T}^+(x^+)$, w^+_M et v^+_M pour $\mathrm{M} \in \mathscr{M}$ les données associées, dans le paragraphe 2.3.1, au couple $(\mathscr{T}^+, x^+)$ et

$$\psi^+ \colon \mathrm{H}^1(\mathscr{O}_{\mathrm{T}^+(x^+)}, \mathbf{Z}/2) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathscr{U}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}^+}}, \mathbf{Z}/2)$$

l'isomorphisme inverse de l'évaluation en x^+. On a $\mathrm{T}^+ = \mathrm{T} \cup \{v_0\}$.

Comme la place w_0 de $\kappa(\mathrm{M}_0)$ est totalement décomposée dans $\mathrm{L}'_{\mathrm{M}_0}\mathrm{L}''_{\mathrm{M}_0}\mathrm{K}_{\mathrm{M}_0}$, l'admissibilité de la famille $\mathscr{T}$ entraîne celle de $\mathscr{T}^+$. L'admissibilité de la famille $\mathscr{T}^+$, la proposition 2.11 (appliquée au couple $(\mathscr{T}^+, x^+)$, aux places de $\mathrm{T}^+ \setminus \mathrm{S}$ et aux extensions $\mathrm{E} \in \{\mathrm{L}'_\mathrm{M}, \mathrm{L}''_\mathrm{M}, \mathrm{K}_\mathrm{M}\}$), le lemme 2.17 (appliqué au point x^+) et la proposition 2.12 (appliquée au couple $(\mathscr{T}^+, x^+)$ et aux extensions $\mathrm{E} \in \{\mathrm{L}'_\mathrm{M}, \mathrm{L}''_\mathrm{M}, \mathrm{K}_\mathrm{M}\}$) montrent alors que le couple $(\mathscr{T}^+, x^+)$ est admissible. Nous allons maintenant établir les inclusions (2.32) et (2.33) relatives à x^+ et les inégalités

$$\dim_{\mathbf{F}_2}(\mathrm{Sel}_{\varphi'_{x^+}}(k, \mathscr{E}'_{x^+})) < \dim_{\mathbf{F}_2}(\mathrm{Sel}_{\varphi'_x}(k, \mathscr{E}'_x)) \tag{2.38}$$

et

$$\dim_{\mathbf{F}_2}(\mathrm{Sel}_{\varphi''_{x^+}}(k, \mathscr{E}''_{x^+})) \leqslant \dim_{\mathbf{F}_2}(\mathrm{Sel}_{\varphi''_x}(k, \mathscr{E}''_x))\,; \tag{2.39}$$

on aura alors abouti à une contradiction, compte tenu de la minimalité du couple (m', m'').

Lemme 2.23 — *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{H}^1(\mathscr{U}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}^+}}, \mathbf{Z}/2) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathrm{Z}/2) = \mathrm{K}^\star/\mathrm{K}^{\star 2} & \xrightarrow{v_0} & \mathbf{Z}/2 \\
\downarrow & & & & \| \\
\mathrm{H}^1(\mathscr{O}_{\mathrm{T}^+(x^+)}, \mathbf{Z}/2) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(k, \mathbf{Z}/2) = k^\star/k^{\star 2} & \xrightarrow{v_0 + v^+_{\mathrm{M}_0}} & \mathbf{Z}/2,
\end{array}$$

dans lequel la flèche verticale de gauche est l'évaluation en x^+ et la flèche de droite de la première ligne est induite par la valuation $\kappa(\mathbf{P}^1_{\mathscr{O}})^\star \to \mathbf{Z}$ associée à la place v_0, est commutatif.

Démonstration — Il suffit d'appliquer le lemme 2.9 deux fois, d'abord avec $v = v_0$, puis avec $v = v^+_{\mathrm{M}_0}$, en remarquant que la flèche composée

$$\mathrm{H}^1(\mathscr{U}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}^+}}, \mathbf{Z}/2) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathrm{Z}/2) = \mathrm{K}^\star/\mathrm{K}^{\star 2} \xrightarrow{v^+_{\mathrm{M}_0}} \mathbf{Z}/2$$

est nulle. □

Lemme 2.24 — *L'image du groupe* $\mathrm{Sel}_{\varphi'_{x^+}}(k, \mathscr{E}'_{x^+})$ *par* ψ^+ *est incluse dans* $\mathrm{H}^1(\mathscr{U}_{\mathscr{O}_\mathrm{T}}, \mathbf{Z}/2)$.

Démonstration — Vu le lemme 2.23 et la proposition 2.8, il suffit de prouver que tout élément de $\mathrm{Sel}_{\varphi'_{x^+}}(k, \mathscr{E}'_{x^+})$ est de valuation nulle en v_0 et en $v^+_{\mathrm{M}_0}$. Ceci résulte de la conclusion de la proposition 2.10. □

Lemme 2.25 — *L'image de* $\psi^+(\mathrm{Sel}_{\varphi'_{x^+}}(k, \mathscr{E}'_{x^+}))$ *par la flèche* $\mathrm{H}^1(\mathscr{U}_{\mathscr{O}_\mathrm{T}}, \mathbf{Z}/2) \to \mathrm{H}^1(\mathscr{O}_{\mathrm{T}(x)}, \mathbf{Z}/2)$ *d'évaluation en x est incluse dans* $\mathrm{Sel}_{\varphi'_x}(k, \mathscr{E}'_x)$.

Démonstration — Soit $\beta \in \mathrm{Sel}_{\varphi'_{x^+}}(k, \mathscr{E}'_{x^+})$. Comme $\psi^+(\beta) \in \mathrm{H}^1(\mathscr{U}_{\mathscr{O}_\mathrm{T}}, \mathbf{Z}/2)$, l'hypothèse (2.36) assure que l'image de $\psi^+(\beta)(x)$ dans V'_v appartient à W'_v pour tout $v \in \mathrm{T}$. Pour $v \in \Omega \setminus \mathrm{T}(x)$, on a $\mathrm{W}'_v = \mathrm{T}'_v$ puisque $\mathscr{E}'_x$ a bonne réduction en v (lemme 2.16), or $\psi^+(\beta)(x) \in \mathrm{H}^1(\mathscr{O}_{\mathrm{T}(x)}, \mathbf{Z}/2)$, donc l'image de $\psi^+(\beta)(x)$ dans V'_v appartient à W'_v. La conclusion de la proposition 2.10 montre par ailleurs que pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{M}'$, l'image de $\psi^+(\beta)(x)$ dans $\mathrm{V}'_{v_\mathrm{M}}$ appartient à $\mathrm{W}'_{v_\mathrm{M}}$.

Restent à considérer les places v_M pour $\mathrm{M} \in \mathscr{M}''$. Fixons $\mathrm{M} \in \mathscr{M}''$. La proposition 2.18 et le lemme 2.24 montrent que $\psi^+(\beta) \in \mathfrak{S}_{\varphi',\mathrm{T}}(\mathbf{A}^1_k, \mathscr{E}')$, de sorte qu'une extension quadratique ou triviale $\mathrm{K}_{\mathrm{M},\psi^+(\beta)}/\kappa(\mathrm{M})$ vérifiant les conditions du lemme 2.6 a été choisie précédemment. La proposition 2.13, appliquée à la place v^+_M, au point x^+ et à la classe $m = \psi^+(\beta)$, montre que la place w^+_M de $\kappa(\mathrm{M})$ est totalement décomposée dans $\mathrm{K}_{\mathrm{M},\psi^+(\beta)}$; les hypothèses de cette proposition sont satisfaites parce que $\psi^+(\beta) \in \mathrm{H}^1(\mathscr{U}_{\mathscr{O}_\mathrm{T}}, \mathbf{Z}/2)$ et que le couple $(\mathscr{T}^+, x^+)$ est admissible. L'extension $\mathrm{K}_{\mathrm{M},\psi^+(\beta)}/\kappa(\mathrm{M})$ est non ramifiée en toute place de $\kappa(\mathrm{M})$ dont la trace sur k n'appartient pas à T, d'après la première partie de la proposition 2.13. On en déduit, grâce à la proposition 2.12, l'égalité

$$\sum_{v \in \mathrm{T}^+} \mathrm{inv}_v\, \mathrm{A}_{\mathrm{K}_{\mathrm{M},\psi^+(\beta)}/\kappa(\mathrm{M})}(x^+) = 0. \tag{2.40}$$

Si $\mathrm{M} = \mathrm{M}_0$, la proposition 2.13, appliquée à v_0 et x^+, montre que la place w_0 de $\kappa(\mathrm{M})$ est totalement décomposée dans $\mathrm{K}_{\mathrm{M},\psi^+(\beta)}$. Comme aucune place de $\kappa(\mathrm{M})$ divisant v_0 n'est ramifiée dans $\mathrm{K}_{\mathrm{M},\psi^+(\beta)}$, la proposition 2.11 permet d'en déduire dans tous les cas que

$$\mathrm{inv}_{v_0} \mathrm{A}_{\mathrm{K}_{\mathrm{M},\psi^+(\beta)}/\kappa(\mathrm{M})}(x^+) = 0. \tag{2.41}$$

Des équations (2.40) et (2.41) et de l'hypothèse (2.37), on tire l'égalité

$$\sum_{v \in \mathrm{T}} \mathrm{inv}_v \mathrm{A}_{\mathrm{K}_{\mathrm{M},\psi^+(\beta)}/\kappa(\mathrm{M})}(x) = 0. \tag{2.42}$$

Compte tenu de la proposition 2.12, cela entraîne que la place w_M de $\kappa(\mathrm{M})$ est totalement décomposée dans $\mathrm{K}_{\mathrm{M},\psi^+(\beta)}$. Enfin, la proposition 2.13 permet d'en déduire que l'image de $\psi^+(\beta)(x)$ dans $\mathrm{V}'_{v_\mathrm{M}}$ appartient à $\mathrm{W}'_{v_\mathrm{M}}$. □

Au vu de la proposition 2.7 et des lemmes 2.24 et 2.25, on a exhibé une injection du groupe $\mathrm{Sel}_{\varphi'_{x^+}}(k, \mathscr{E}'_{x^+})$ dans $\mathrm{Sel}_{\varphi'_x}(k, \mathscr{E}'_x)$. Il résulte de l'hypothèse (2.34) que $\psi(\alpha)(x^+) \notin \mathrm{Sel}_{\varphi'_{x^+}}(k, \mathscr{E}'_{x^+})$. Par conséquent, l'image de cette injection ne contient pas α. En particulier, ce n'est pas une bijection ; l'inégalité (2.38) est donc prouvée.

Intéressons-nous maintenant à l'inégalité (2.39). On commence par établir un analogue du lemme 2.24, dont la preuve sera néanmoins considérablement plus complexe.

Lemme 2.26 — *L'image du groupe* $\mathrm{Sel}_{\varphi''_{x^+}}(k, \mathscr{E}''_{x^+})$ *par* ψ^+ *est incluse dans* $\mathrm{H}^1(\mathscr{U}_{\mathscr{O}_\mathrm{T}}, \mathbf{Z}/2)$.

Démonstration — D'après le lemme 2.23 et la proposition 2.8, il suffit de prouver l'égalité $v_0(\beta) = v^+_{\mathrm{M}_0}(\beta)$ dans $\mathbf{Z}/2$ pour tout $\beta \in \mathrm{Sel}_{\varphi''_{x^+}}(k, \mathscr{E}''_{x^+})$. Fixons donc $\beta \in \mathrm{Sel}_{\varphi''_{x^+}}(k, \mathscr{E}''_{x^+})$ et considérons le cup-produit $\psi(\alpha)(x^+) \cup \beta \in {}_2\mathrm{Br}(k)$ des classes $\psi(\alpha)(x^+)$, $\beta \in \mathrm{H}^1(k, \mathbf{Z}/2)$. La loi de réciprocité globale permet d'écrire que

$$\sum_{v \in \Omega} \mathrm{inv}_v(\psi(\alpha)(x^+) \cup \beta) = 0. \tag{2.43}$$

Montrons dans un premier temps que $\mathrm{inv}_v(\psi(\alpha)(x^+) \cup \beta) = 0$ pour tout $v \in \Omega \setminus \{v_0, v^+_{\mathrm{M}_0}\}$. Pour tout $v \in \Omega$, cet invariant est égal à la valeur de l'accouplement $\mathrm{V}'^+_v \times \mathrm{V}''^+_v \to \mathbf{Z}/2$ (cf. paragraphe 2.3.2) sur l'image du couple $(\psi(\alpha)(x^+), \beta)$. L'image de β dans V''^+_v appartient à W''^+_v par hypothèse. Comme les sous-groupes $\mathrm{W}'^+_v \subset \mathrm{V}'^+_v$ et $\mathrm{W}''^+_v \subset \mathrm{V}''^+_v$ sont orthogonaux pour cet accouplement, il suffit de prouver que l'image de $\psi(\alpha)(x^+)$ dans V'^+_v

appartient à $W_v'^{+}$ pour tout $v \in \Omega \setminus \{v_0, v^+_{M_0}\}$. Pour $v \in T$, c'est une conséquence de l'hypothèse (2.36). Pour $v \in \Omega \setminus T^+(x^+)$, cela provient de ce que $W_v'^{+} = T_v'^{+}$ (lemme 2.16). Pour $v \in \{v^+_M\,;\, M \in \mathscr{M}'\}$, la proposition 2.10 montre que $W_v'^{+} = V_v'^{+}$. Seules restent les places v^+_M pour $M \in \mathscr{M}'' \setminus \{M_0\}$. Soit $M \in \mathscr{M}'' \setminus \{M_0\}$. D'après les propositions 2.18 et 2.13, la place w_M de $\kappa(M)$ est totalement décomposée dans $K_{M,\psi(\alpha)}$. On en déduit, à l'aide de la proposition 2.12, applicable grâce à la première partie de la proposition 2.13, l'égalité

$$\sum_{v \in T} \operatorname{inv}_v A_{K_{M,\psi(\alpha)}/\kappa(M)}(x) = 0.$$

Compte tenu de l'hypothèse (2.37), de la proposition 2.11 appliquée à la place $v = v_0$ et de ce que $M \neq M_0$, il en résulte que

$$\sum_{v \in T^+} \operatorname{inv}_v A_{K_{M,\psi(\alpha)}/\kappa(M)}(x^+) = 0.$$

Une nouvelle application de la proposition 2.12 montre enfin que la place w^+_M de $\kappa(M)$ est totalement décomposée dans $K_{M,\psi(\alpha)}$, ce qui implique, d'après la proposition 2.13, que l'image de $\psi(\alpha)(x^+)$ dans $V'^{+}_{v^+_M}$ appartient bien à $W'^{+}_{v^+_M}$.

Ainsi a-t-on prouvé que l'équation (2.43) se réduit à

$$\operatorname{inv}_{v_0}(\psi(\alpha)(x^+) \cup \beta) = \operatorname{inv}_{v^+_{M_0}}(\psi(\alpha)(x^+) \cup \beta). \tag{2.44}$$

Supposons momentanément que l'image de $\psi(\alpha)(x^+)$ dans $V'^{+}_{v^+_{M_0}}$ soit nulle. La place $w^+_{M_0}$ de $\kappa(M_0)$ est alors totalement décomposée dans $K_{M_0,\psi(\alpha)}$ (proposition 2.13). Il s'ensuit (proposition 2.12) que

$$\sum_{v \in T^+} \operatorname{inv}_v A_{K_{M_0,\psi(\alpha)}/\kappa(M_0)}(x^+) = 0. \tag{2.45}$$

On a par ailleurs, à nouveau grâce aux propositions 2.13 et 2.12 :

$$\sum_{v \in T} \operatorname{inv}_v A_{K_{M_0,\psi(\alpha)}/\kappa(M_0)}(x) = 0. \tag{2.46}$$

De l'hypothèse (2.37) et des deux équations (2.45) et (2.46) résulte l'égalité

$$\operatorname{inv}_{v_0} A_{K_{M_0,\psi(\alpha)}/\kappa(M_0)}(x^+) = 0.$$

Les propositions 2.11 et 2.13 permettent d'en déduire que la place w_0 est totalement décomposée dans $K_{M_0,\psi(\alpha)}$ puis que l'image de $\psi(\alpha)(x^+)$ dans $H^1(k_{v_0}, \mathscr{E}'_{x^+})$ est nulle, contredisant ainsi l'hypothèse (2.34). Nous avons donc prouvé, par l'absurde, que l'image de $\psi(\alpha)(x^+)$ dans $V'^{+}_{v^+_{M_0}}$ n'est pas nulle.

Compte tenu de l'hypothèse (2.34), l'image de $\psi(\alpha)(x^+)$ dans $\mathrm{V}_v'^+$ n'est donc nulle pour aucun $v \in \{v_0, v_{\mathrm{M}_0}^+\}$. Montrons maintenant qu'elle appartient à $\mathrm{T}_v'^+$ pour tout $v \in \{v_0, v_{\mathrm{M}_0}^+\}$. Le lemme 2.9, appliqué deux fois, entraîne que $v_{\mathrm{M}_0}^+(\psi(\alpha)(x^+)) = v_{\mathrm{M}_0}(\psi(\alpha)(x)) = v_{\mathrm{M}_0}(\alpha)$, or $v_{\mathrm{M}_0}(\alpha) = 0$ d'après la proposition 2.10. Ceci prouve le résultat voulu pour $v = v_{\mathrm{M}_0}^+$. La nullité de $v_0(\psi(\alpha)(x^+))$ se déduit de celle de $v_{\mathrm{M}_0}^+(\psi(\alpha)(x^+))$ grâce au lemme 2.23.

En vertu de la formule du symbole modéré (cf. [60, Ch. XIV, Proposition 8]), on déduit de l'appartenance de l'image de $\psi(\alpha)(x^+)$ dans $\mathrm{V}_v'^+$ à $\mathrm{T}_v'^+ \setminus \{1\}$ l'équivalence

$$\mathrm{inv}_v(\psi(\alpha)(x^+) \cup \beta) = 0 \Longleftrightarrow v(\beta) = 0$$

pour $v \in \{v_0, v_{\mathrm{M}_0}^+\}$. Vu l'équation (2.44), ceci achève la démonstration du lemme. $\square$

Lemme 2.27 — *L'image de* $\psi^+(\mathrm{Sel}_{\varphi''_{x^+}}(k, \mathscr{E}''_{x^+}))$ *par la flèche* $\mathrm{H}^1(\mathscr{U}_{\mathscr{O}_\mathrm{T}}, \mathbf{Z}/2) \to \mathrm{H}^1(\mathscr{O}_{\mathrm{T}(x)}, \mathbf{Z}/2)$ *d'évaluation en* x *est incluse dans* $\mathrm{Sel}_{\varphi''_x}(k, \mathscr{E}''_x)$.

Démonstration — On démontre ce lemme à partir du lemme 2.26 exactement comme on a démontré le lemme 2.25 à partir du lemme 2.24 ; il suffit d'échanger tous les $'$ et les $''$ et de remplacer la référence au lemme 2.24 par une référence au lemme 2.26. $\square$

Il existe une injection naturelle $\mathrm{Sel}_{\varphi''_{x^+}}(k, \mathscr{E}''_{x^+}) \hookrightarrow \mathrm{Sel}_{\varphi''_x}(k, \mathscr{E}''_x)$, d'après les lemmes 2.26 et 2.27 et la proposition 2.7. L'inégalité (2.39) est donc établie. Les lemmes 2.25 et 2.27 montrent de plus que

$$\psi^+(\mathrm{Sel}_{\varphi'_{x^+}}(k, \mathscr{E}'_{x^+})) \subset \psi(\mathrm{Sel}_{\varphi'_x}(k, \mathscr{E}'_x))$$

et que

$$\psi^+(\mathrm{Sel}_{\varphi''_{x^+}}(k, \mathscr{E}''_{x^+})) \subset \psi(\mathrm{Sel}_{\varphi''_x}(k, \mathscr{E}''_x)).$$

Grâce aux hypothèses (2.32) et (2.33), on en déduit que

$$\psi^+(\mathrm{Sel}_{\varphi'_{x^+}}(k, \mathscr{E}'_{x^+})) \subset \mathfrak{S}_{\varphi',\mathrm{S}}(\mathbf{A}^1_k, \mathscr{E}')$$

et

$$\psi^+(\mathrm{Sel}_{\varphi''_{x^+}}(k, \mathscr{E}''_{x^+})) \subset \mathfrak{S}_{\varphi'',\mathrm{S}}(\mathbf{A}^1_k, \mathscr{E}'').$$

La minimalité du couple (m', m'') fournit maintenant une contradiction.

Ainsi avons-nous établi, par l'absurde, que $\psi(\alpha) \in \mathfrak{S}'_{\mathrm{D}_0,\mathrm{S}}$ pour tout $\alpha \in \mathrm{Sel}_{\varphi'_x}(k, \mathscr{E}'_x)$. Échangeant ci-dessus d'une part tous les $'$ et les $''$ (sauf bien sûr dans T'_M et dans (m', m'')) et remplaçant d'autre part le lemme 2.21 par le lemme suivant, on obtient une preuve de l'assertion duale : $\varphi(\alpha) \in \mathfrak{S}''_{\mathrm{D}_0,\mathrm{S}}$ pour tout $\alpha \in \mathrm{Sel}_{\varphi''_x}(k, \mathscr{E}''_x)$. D'où finalement $x \in \mathscr{R}_{\mathrm{D}_0,\mathrm{S}}$.

Lemme 2.28 — *Pour tout* $e \in {}_{\varphi''}\mathrm{H}^1(\mathbf{A}^1_k, \mathscr{E}'') \setminus \mathfrak{T}''_{\mathrm{D}_0}$*, il existe* $\mathrm{M} \in \mathscr{M}'$ *et une infinité de places* $v \in \Omega \setminus \mathrm{S}_0$ *telles qu'il existe une place* w *de* $\kappa(\mathrm{M})$ *totalement décomposée dans* $\mathrm{L}'_\mathrm{M}\mathrm{L}''_\mathrm{M}\mathrm{K}_\mathrm{M}$*, divisant* v*, non ramifiée et de degré résiduel* 1 *sur* v*, telle que pour tout* $x_v \in \mathbf{A}^1(\mathscr{O}_v)$ *rencontrant transversalement* $\widetilde{\mathrm{M}}$ *en* w*, l'image de* e *par la flèche* $\mathrm{H}^1(\mathbf{A}^1_k, \mathscr{E}'') \to \mathrm{H}^1(k_v, \mathscr{E}''_{x_v})$ *d'évaluation en* x_v *soit non nulle.*

Démonstration — L'énoncé du lemme 2.28 s'obtient à partir de celui du lemme 2.21 en échangeant les $'$ et les $''$; néanmoins, la preuve du lemme 2.28 ne se déduit pas formellement de celle du lemme 2.21. L'opération naturelle que l'on peut appliquer à la fois à l'énoncé et à la preuve du lemme 2.21 sans les invalider est celle consistant à échanger les $'$ et les $''$ et à remplacer respectivement $\delta'_\mathrm{M}([\mathscr{X}])$ et K_M par $\delta''_\mathrm{M}([\mathscr{X}''])$ et K''_M, où K''_M désigne le corps $\mathrm{K}_{\mathrm{M},d}$ donné par le lemme 2.6 en prenant pour d l'image de $[\mathscr{X}'']$ dans $\mathrm{H}^1(\kappa(\mathrm{M}), \mathrm{F}''_\mathrm{M})$. Ceci prouve que le lemme 2.28 devient vrai si l'on remplace K_M par K''_M dans son énoncé. Pour conclure, il suffit donc d'établir l'existence d'un plongement $\kappa(\mathrm{M})$-linéaire $\mathrm{K}_\mathrm{M} \hookrightarrow \mathrm{L}'_\mathrm{M}\mathrm{L}''_\mathrm{M}\mathrm{K}''_\mathrm{M}$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{M}'$.

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}'$. La suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{F}'_\mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{F}''_\mathrm{M} \longrightarrow \mathbf{Z}/2 \longrightarrow 0 \tag{2.47}$$

est exacte (cf. proposition A.8). Il en résulte d'une part que l'extension $\mathrm{L}'_\mathrm{M}/\kappa(\mathrm{M})$ se plonge dans $\mathrm{L}''_\mathrm{M}/\kappa(\mathrm{M})$ et d'autre part que la flèche

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{L}''_\mathrm{M}\mathrm{K}''_\mathrm{M}, \mathrm{F}'_\mathrm{M}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathrm{L}''_\mathrm{M}\mathrm{K}''_\mathrm{M}, \mathrm{F}''_\mathrm{M})$$

induite par φ'_M est injective, compte tenu que le L''_M-groupe $\mathrm{F}''_\mathrm{M} \otimes_{\kappa(\mathrm{M})} \mathrm{L}''_\mathrm{M}$ est constant. On dispose donc d'un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1(\mathrm{L}'_\mathrm{M}, \mathrm{F}'_\mathrm{M}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^1(\mathrm{L}''_\mathrm{M}\mathrm{K}''_\mathrm{M}, \mathrm{F}'_\mathrm{M}) \arrow[d, hook] \\
\mathrm{H}^1(\mathrm{L}''_\mathrm{M}, \mathrm{F}''_\mathrm{M}) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(\mathrm{L}''_\mathrm{M}\mathrm{K}''_\mathrm{M}, \mathrm{F}''_\mathrm{M})
\end{tikzcd}$$

induit par φ'_M et par les diverses flèches de restrictions. L'image de $\delta'_\mathrm{M}([\mathscr{X}])$ par la flèche verticale de gauche est égale à $\delta''_\mathrm{M}([\mathscr{X}''])$, or celle-ci appartient au noyau de la flèche horizontale inférieure par définition de K''_M. La classe $\delta'_\mathrm{M}([\mathscr{X}])$ appartient donc au noyau de la flèche horizontale supérieure, ce qui signifie que $\mathrm{L}'_\mathrm{M}\mathrm{K}_\mathrm{M}$ se plonge L'_M-linéairement dans $\mathrm{L}''_\mathrm{M}\mathrm{K}''_\mathrm{M}$, comme il fallait démontrer. □

Supposons maintenant que $\mathrm{T}_\infty \neq \varnothing$. Il reste à prouver que $x \in \mathscr{R}_{\mathrm{D}}$. Il suffit pour cela de vérifier que pour tout $\alpha \in \mathrm{Sel}_{\varphi'_x}(k, \mathscr{E}'_x)$ (resp. $\alpha \in \mathrm{Sel}_{\varphi''_x}(k, \mathscr{E}''_x)$), l'image de $\psi(\alpha)$ dans $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathbf{Z}/2) = \mathrm{K}^\star/\mathrm{K}^{\star 2}$ est de valuation nulle au point $\infty \in \mathbf{P}^1_k$.

Lemme 2.29 — *Les groupes* $\mathfrak{S}'_{\mathrm{D}_0} \cap \mathrm{H}^1(\mathscr{U}_{\mathscr{O}_\mathrm{T}}, \mathbf{Z}/2)$ *et* $\mathfrak{S}''_{\mathrm{D}_0} \cap \mathrm{H}^1(\mathscr{U}_{\mathscr{O}_\mathrm{T}}, \mathbf{Z}/2)$ *sont inclus dans* $\mathrm{H}^1(\mathscr{U}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}\setminus\{v_\infty\}}}, \mathbf{Z}/2)$.

Démonstration — Soit $a \in \mathfrak{S}'_{\mathrm{D}_0} \cap \mathrm{H}^1(\mathscr{U}_{\mathscr{O}_\mathrm{T}}, \mathbf{Z}/2)$. La proposition 2.8 et l'hypothèse (2.18) pour $\mathrm{S} = \mathrm{S}_1$ assurent l'existence de $c \in \mathrm{H}^1(\mathscr{U}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_1}}, \mathbf{Z}/2)$ tel que pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{M}$, les images de a et de c dans $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}^{\mathrm{sh}}_{\mathrm{M}}, \mathbf{Z}/2)$ coïncident. Posant $b = a - c$, on a nécessairement $b \in \mathrm{H}^1(\mathscr{O}_\mathrm{T}, \mathbf{Z}/2)$. Il résulte de la construction de v_∞ que l'image de b dans $k^\star/k^{\star 2}$ est de valuation nulle en v_∞, autrement dit que $b \in \mathrm{H}^1(\mathscr{O}_{\mathrm{T}\setminus\{v_\infty\}}, \mathbf{Z}/2)$. On a alors $a \in \mathrm{H}^1(\mathscr{U}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}\setminus\{v_\infty\}}}, \mathbf{Z}/2)$, comme annoncé. L'inclusion de $\mathfrak{S}''_{\mathrm{D}_0} \cap \mathrm{H}^1(\mathscr{U}_{\mathscr{O}_\mathrm{T}}, \mathbf{Z}/2)$ dans $\mathrm{H}^1(\mathscr{U}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}\setminus\{v_\infty\}}}, \mathbf{Z}/2)$ se prouve exactement de la même manière. □

Il n'y a plus qu'à appliquer le lemme 2.9 à la place v_∞ pour conclure, compte tenu de ce que $v_\infty(\alpha) = 0$ puisque v_∞ est une place de bonne réduction pour $\mathscr{E}'_x$ et $\mathscr{E}''_x$ (lemme 2.16). Ceci achève la démonstration de la proposition 2.20. □

Le théorème 2.2 est maintenant prouvé. En effet, x est entier en-dehors de S_1 lorsque $\mathrm{T}_\infty = \varnothing$, puisqu'il est entier en-dehors de S (préadmissibilité du couple $(\mathscr{T}, x)$) et que $\mathrm{S} = \mathrm{S}_1$ si $\mathrm{T}_\infty = \varnothing$.