Ein strukturorientierter Aufbau der klassischen Zahlenbereiche

Christian Maurer

Ein strukturorientierter Aufbau der klassischen Zahlenbereiche

mit Blick auf Ordnungsstrukturen, algebraische und topologische Strukturen

Springer Spektrum

Christian Maurer
Berlin, Deutschland

ISBN 978-3-662-64886-5 ISBN 978-3-662-64887-2 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-64887-2

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Planung/Lektorat: Iris Ruhmann
Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Antonia und Cornelius gewidmet

Vorwort

> Felix qui potuit rerum cognoscere causas …
> Glücklich ist der, dem es gelungen ist,
> den Dingen auf den Grund zu gehen)
>
> Publius Vergilius Maro
> In: Georgica, II. Buch (37-29 v. Chr.), 490
>
> Der Lehrer soll, was er lehrt, in einer Form wissen,
> die anders ist als die, in der er es lehrt:
> Er soll nicht nur über dem Stoff stehen, den er unterrichtet,
> sondern über der logischen Form des Stoffes.
>
> Hans Freudenthal
> In: Mathematik als pädagogische Aufgabe, Band 2 (Klett 1973), S. 598

In diesem Buch sind die fachwissenschaftlichen Grundlagen für ein berufsbegleitendes Weiterbildungsstudium Mathematik an der Freien Universität Berlin zusammengestellt, dessen Ziel die Qualifikation von Lehrinnen und Lehrern anderer Fächer für den Mathematikunterricht in der Grundschule und der Sekundarstufe I ist.

Es ist durchaus auch mit der Hoffnung verbunden, als Anregung zur Diskussion über andere als die „traditionellen" Wege im Curriculum des Lehramtsstudiums Mathematik für diese Zielgruppe beizutragen.

Aus diesem Grunde fehlen weitestgehend *diejenigen* Gebiete, die traditionell am Anfang des Mathematikstudiums stehen: *Analysis* und *Lineare Algebra.* Abgesehen von einigen ihrer propädeutischen Aspekte für die Mittelstufe wie etwa der Einführung der Dezimalzahlen, der Flächen- und Volumenberechnungen einfacher geometrischer Figuren oder der Behandlung kleiner linearer Gleichungssysteme, sind diese beiden Gebiete erst Gegenstand des Unterrichts in der *Sekundarstufe II.*

Es gibt wohl außer der Mathematik kein Schulfach, in dem diese „Inversion" so deutlich ausfällt: Die fachlichen Inhalte am *Anfang* des Studiums sind *genau die* am *Ende* in der Schule. Wesentliche Leitlinie ist hier die *systematische Entwicklung der Konstruktion der Zahlenbereiche* mit dem Blick auf die wichtigsten mathematischen Strukturen: *Ordnungsstrukturen, algebraische Strukturen und topologische Strukturen.*

Der Aufbau der Zahlenbereiche erfolgt schrittweise:

- Die *natürlichen* Zahlen werden im Kapitel über *Mengen* konstruiert und nach der Bereitstellung der notwendigen Hilfsmittel in den Kapiteln über *Relationen* und *Ordnungsstrukturen* werden ihre algorithmischen Eigenschaften im Kapitel über *Arithmetik* behandelt.
- Das Kapitel über *Verbandstrukturen* dient insofern der Vorbereitung der folgenden Kapitel, als in ihm die Muster für viele algebraische Strukturen und Sätze angelegt werden, die in den nächsten Kapiteln ständig wiederkehren.
- Der Bereich der *natürlichen* Zahlen wird im Kapitel über *Gruppen* zum Bereich der *ganzen* Zahlen erweitert.
- Die Erweiterung dieses Bereichs zu dem der *rationalen* Zahlen erfolgt im Kapitel über *Ringe und Körper.*
- Dieser Bereich wird im Kapitel über *Körpererweiterungen* um *Wurzeln* angereichert.
- Das Kapitel über *Topologie* liefert die Vervollständigung der *rationalen* Zahlen zu den *reellen* Zahlen.
- Im gleichen Kapitel bildet die Konstruktion der *komplexen* Zahlen als Erweiterung der *reellen Zahlen* den Abschluss der Zahlbereichserweiterungen.

Zur Einführung in die Mathematik gehört natürlich auch die Behandlung der Inhalte der Anfänge einer Linearen Algebra I, soweit sie mit der Einführung grundlegender Tatsachen über *Vektorräume und lineare Abbildungen* verbunden sind, und einer Analysis I, soweit sie Voraussetzung für die Konstruktion der *reellen Zahlen* sind.

Es sind auch zwei Fachgebiete ausgespart, die zwar zum Kernbereich im Lehramtsstudium, hingegen kaum zum Aufbau der Zahlenbereiche gehören, die *Elementargeometrie* und die *Stochastik.*

Mit dem Einstieg in die Lineare Algebra ist aber die Bearbeitung von einfachen Problemen aus der Analytischen Geometrie möglich; und durch die Vorstellung wichtiger kombinatorischer Zählprinzipien auf der Basis der Arithmetik und den zu ihrer Entwicklung notwendigen Begriffsbildungen ist eine Grundlage für die Stochastik gelegt.

Das erste Kapitel befasst sich mit der *Mengenlehre* als der grundlegenden Sprache zur Formulierung mathematischer Sachverhalte. Mengen sind - abgesehen von der durch die Elementbeziehung geprägten Tiefenstruktur auf ihnen – weitgehend unstrukturierte Objekte. Im Vordergrund stehen die *Elementbeziehung* und die *Teilmengenbeziehung* zwischen Mengen. Darauf aufbauend werden die *mengentheoretischen Operationen* und *Konstruktionsprinzipien für Mengen* eingeführt, womit die Bildungen von Vereinigung-, Durchschnitts-, Differenz- und Potenzmengen sowie von Produkten und Summen von Mengen möglich sind. Den Schluss bilden ein Exkurs über *transitive Mengen* und das *Fundierungsprinzip.*

Im zweiten Kapitel werden *Relationen* eingeführt, die es erlauben, Beziehungen zwischen Mengen zu formulieren, insbesondere *Abbildungen.* Es werden wichtige Klassen von Abbildungen betrachtet: *injektive, surjektive* und *bijektive;* letztere führt auf den Begriff der *Gleichmächtigkeit.* Ferner werden Klassifikationen von Mengen nach *Äquivalenzrelationen* vorzunehmen. Dabei stellen sich auf sehr abstrakter Ebene wichtige „Verwandtschaften" zwischen unterschiedlich konstruierten Mengen heraus, die die Ideen der wichtigsten Rechengesetze vorwegnehmen.

Mit diesen beiden Kapiteln, die sich unter dem Oberbegriff *„Die Sprache der Mengenlehre"* subsumieren ließen, ist das Fundament für alles Weitere gelegt: Es sind alle wesentlichen Grundbegriffe bereitgestellt, mit denen mathematische Sachverhalte ausgedrückt werden.

Im dritten Kapitel beginnt die Systematik, mathematische Fachgebiete nach *Strukturen auf Mengen* und den *strukturerhaltenden Abbildungen zwischen ihnen* zu klassifizieren. Es werden *Ordnungsstrukturen,* d. h. *geordnete Mengen* und *monotone Abbildungen* eingeführt und die Klassen der *Ordinal-* und *Kardinalzahlen* als besondere Beispiele für *wohlgeordnete Mengen* vorgestellt. die als Basis zur Konstruktion der *natürlichen Zahlen* als endliche Ordinalzahlen dienen. Dabei wird der Begriff der *Unendlichkeit* präzisiert und von dem der *Endlichkeit* abgegrenzt, wobei sich die charakteristischen Eigenschaften der endlichen Ordinalzahlen herausschälen.

Im vierten Kapitel kommen erstmals *algebraische Strukturen* zum Zug: Es wird die *Arithmetik* entwickelt, die *Theorie* der im dritten Kapitel als endliche Ordinalzahlen konstruierten *natürlichen Zahlen,* bei der es im Wesentlichen um die Operationen der „bürgerlichen Grundrechenarten" und ihre Gesetzmäßigkeiten geht. Dabei zeigt sich, dass diese Gesetze ihren Ursprung in - wenn auch abstrakten, aber einfachen - Sachverhalten der Mengenlehre haben, die weitestgehend einer intuitiven Denkweise entsprechen. Als Alternative wird der klassische Weg der Konstruktion der arithmetischen Operationen als Beispiele *primitiv rekursiver Abbildungen* dargestellt.

Das fünfte Kapitel über *Kombinatorik* stellt die Grundlagen für die elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung bereit: In bewusst enger Anknüpfung an Begriffe aus dem Kontext der Abbildungen und unter Rückgriff auf Ergebnisse der Arithmetik werden die kombinatorischen *Zählkoeffizienten,* insbesondere *Fakultäten* und *Binomialkoeffizienten,* behandelt und ihre Zusammenhänge untersucht.

Im sechsten Kapitel über *Verbandsstrukturen,* d. h. *Verbände* und *Verbandshomomorphismen* mit dem Schwerpunkt auf *distributiven Verbänden,* Heyting- und Booleschen Algebren stellt sich heraus, dass genügend reichhaltige Ordnungsstrukturen beträchtliche algebraische Strukturen bergen, die prototypisch für zentrale Sachverhalte sowohl der Linearen wie der Kommutativen Algebra sind. Ferner wird die *Vervollständigung* geordneter Mengen dargestellt, die eine der klassischen Konstruktionen der *reellen Zahlen* liefert.

Das siebente Kapitel über *Gruppen* führt zunächst in die Grundbegriffe der *Gruppentheorie* ein. Es werden *Permutationsgruppen* eingeführt und die Zusammenhänge zwischen *Normalteilern, Faktorgruppen* und *Homomorphismen* behandelt. In einem Abschnitt über *auflösbare Gruppen* werden die Grundlagen für die Nichtauflösbarkeit der allgemeinen Gleichungen höheren als vierten Grades gelegt und am Ende die *ganzen Zahlen* konstruiert.

Im achten Kapitel über *Ringe und Körper* werden *Ringe* einschließlich der Grundbegriffe der *Idealtheorie* behandelt. Dieser Kontext ist der Rahmen für die Konstruktion von *Quotientenkörpern* über *Integritätsbereichen* – insbesondere der *rationalen Zahlen* – und die *Teilbarkeitslehre* mit dem Schwerpunkt auf *euklidischen* und *faktoriellen Ringen.* Es werden einige Sachverhalte der *Elementaren Zahlentheorie* vorgestellt, auch als Grundlage des wohl wichtigsten Verfahrens der *Kryptographie.* Anschließend werden ausführlich *Polynomringe* behandelt, insbesondere die Zerlegung von Polynomen, die eng mit Nullstellen von Polynomen, d. h. den Lösungen algebraischer Gleichungen, Zusammenhängen. Ein Abschnitt über *Zahldarstellungen* schließt das Kapitel ab.

Das neunte Kapitel über Moduln befasst sich mit der Theorie der *Moduln* und der *Homomorphismen* über einem kommutativen Ring A. Im Abschnitt über *Matrizen* werden diese als Schemata von Elementen des Ringes A eingeführt, die Homomorphismen zwischen Moduln der Form A^n beschrieben und ihre Rechenregeln entwickelt. Der Abschnitt über *Lineare Hüllen und freie Moduln* stellt die wesentlichen Grundbegriffe für die *Lineare Algebra* bereit und der Abschnitt über *projektive und injektive Moduln* stellt ein Konzept vor, das für *Vektorräume* zentral ist.

Im zehnten Kapitel wird der Einstieg in die Theorie der *Körpererweiterungen* unternommen. Zuerst werden *einfache algebraische Körpererweiterungen* als Grundlage für das Rechnen mit *Wurzeln* behandelt, *algebraisch abgeschlossene Körper* vorgestellt und *algebraische Abschlüsse* konstruiert. Danach werden *Zerfällungskörper* von Polynomen konstruiert und *normale Körpererweiterungen* betrachtet.

Das elfte Kapitel über Vektorräume, d. h. Moduln über (kommutativen) Körpern, zeigt deren einfache Struktur. Es werden *Lineare Gleichungssystem* behandelt, in dem die bisher entwickelte Theorie eine ihrer wichtigsten Anwendungen findet. Damit ist der Grundstein für die *Geometrie* und die *Lineare Algebra* gelegt.

Im zwölften Kapitel über *topologische Strukturen* werden wesentliche Grundbegriffe der *Analysis* entwickelt: die der *Nullfolgen* und der *konvergenten Folgen* sowie der *stetigen Funktionen* und derjenigen Mengen, für die diese die strukturerhaltenden Abbildungen darstellen. Am Anfang liegt der Schwerpunkt auf einer Konstruktion der *reellen Zahlen* als Äquivalenzklassen von *Cauchy-Folgen;* zentrales Resultat ist ihre *Vollständigkeit.* Auch die *komplexen Zahlen* werden kurz vorgestellt. Mit diesem Kapitel ist der Aufbau der klassischen Zahlenbereiche in seinen vielen Facetten abgeschlossen. Im Anschluss daran werden als Verallgemeinerung diverser Begriffsbildungen im Kontext *stetiger Funktionen* noch *metrische Räume* eingeführt. Den Abschluss dieses Kapitels bildet eine Einführung in Grundgedanken der *mengentheoretischen Topologie,* in der die topologischen Eigenschaften der reellen Zahlen und der reellen stetigen Funktionen herauspräpariert werden, denn bei den *topologischen Strukturen* handelt es sich um eine ebenso fundamentale Klasse mathematischer Strukturen wie bei den Ordnungs- und den algebraischen Strukturen.

Den krönenden Schluss des Buches bildet das dreizehnte Kapitel, das in die wichtigsten Grundbegriffe der *Kategorientheorie* einführt: *Kategorien* und *Funktoren*. Die *Objekte* einer Kategorie und die *Morphismen* zwischen ihnen abstrahieren die vielen Beispiele von strukturierter Mengen und den zugehörigen strukturerhaltenden Abbildungen aus den vorigen Kapiteln; mit *Funktoren* werden Beziehungen zwischen Kategorien beschrieben. Das Ziel dieses Kapitels ist die Vorstellung von *adjungierten Funktoren,* die die Abstraktion der Lösungen vieler *universeller Abbildungsprobleme* aus den vorigen Kapiteln darstellen und dabei die Gemeinsamkeiten dieser Konstruktionen herausarbeiten.

Bei Frau Iris Ruhmann vom Springer-Verlag möchte ich mich herzlich bedanken; sie hat die Publikation dieses Buchs sehr freundlich unterstützt.

Meldungen über entdeckte Unstimmigkeiten oder Fehler an christian@maurer-berlin.eu sind natürlich jederzeit sehr willkommen.

Berlin
30. November 2021

Christian Maurer

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis