

Hydrodynamik

Georg Wolschin

Hydrodynamik

2. Auflage



Springer Spektrum

Prof. Georg Wolschin
Institut für Theoretische Physik
Universität Heidelberg
Heidelberg, Deutschland

ISBN 978-3-662-64143-9 ISBN 978-3-662-64144-6 (eBook)
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-64144-6>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2021

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Planung/Lektorat: Margit Maly

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort

Diese Vorlesung ist eine kurzgefasste Einführung in die Grundlagen der Hydrodynamik. Sie ist konzipiert als einsemestrige, zweistündige Veranstaltung für Bachelor- und Masterstudenten; einige der fortgeschritteneren Teile wie Hydrodynamik der Superfluide, Diffusion in relativistischen Systemen und nichtlineare Diffusion sollten auch für Promovierende von Interesse sein. In diesem Vorwort werden manche Gebiete besonders betont.

Nach der Einordnung der Hydrodynamik als Teilgebiet der Kontinuumsmechanik folgt ein einleitendes Kapitel über ideale Fluide mit den Euler-Gleichungen als Grundgleichungen für das Geschwindigkeitsfeld sowie der Kontinuitätsgleichung und der Gleichung für die Entropierhaltung. Die Nichtlinearität des konvektiven Terms in der Euler-Gleichung begründet ein im Vergleich zur Elastizitätstheorie wesentlich komplexeres Theoriegebäude, das nur in Spezialfällen analytische Lösungen hat.

Oft sind jedoch Linearisierungen möglich und zulässig, die dann beispielsweise Voraussetzung zur Ableitung der Schwingungsgleichung sind. Auch die Ausbreitung von Wasserwellen als Oberflächenwellen – je nach Wassertiefe mit oder ohne Dispersion oder im Fall von Kapillarwellen mit anomaler Dispersion – lässt sich so mit einfachen analytischen Methoden beschreiben.

Der Text zeichnet in manchen Passagen die historische Entwicklung der Hydrodynamik – eines der ältesten physikalischen Gebiete überhaupt – nach, und die Literaturverzeichnisse (jeweils am Kapitelende) enthalten dementsprechend auch einige der wissenschaftshistorisch interessanten Originalarbeiten, bilden aber die zeitliche Entwicklung nicht durchgängig ab. Ziel des Buches

ist vielmehr, ausgehend von der ursprünglichen Formulierung der Hydrodynamik, zu aktuellen Forschungsfragestellungen zu kommen.

Der Hauptteil der Vorlesung beschäftigt sich mit viskosen Fluiden, und den entsprechend erweiterten Grundgleichungen. Die Navier-Stokes-Gleichungen berücksichtigen den Einfluss der dynamischen Viskosität (*shear viscosity*) und der Zähigkeit (*bulk viscosity*) auf das Geschwindigkeitsfeld. An festen Oberflächen verschwinden hier nicht nur die normalen, sondern – als Folge der Viskosität – auch die tangentialen Geschwindigkeitskomponenten; im Euler-Fall gibt es dagegen nur eine Randbedingung.

Aus Viskosität folgt Energiedissipation, die Umwandlung von Energie in Wärme. Für inkompressible Fluide lässt sich die dissipierte Energie relativ leicht berechnen, ebenso die Durchflussmenge und das Strömungsprofil bei einer Rohrströmung (Poiseuille-Strömung) in linearer Näherung.

Von besonderem Interesse, und nach wie vor Gegenstand aktueller Forschung in zahlreichen physikalischen Teildisziplinen wie etwa kalten Quantengasen, ist der Übergang von der laminaren zur turbulenten Strömung. Die kritische Reynolds-Zahl liefert nur ein erstes, grobes Kriterium für den Umschlag zur Turbulenz – eine genaueres Kriterium ist die doppelte Schwelle, bei der sowohl die Reynoldszahl, als auch die Störung eine kritische Größe überschreiten müssen. Unterschiedliche Szenarien zum Turbulenzeinsatz werden in der Vorlesung diskutiert, und die Stabilitätstheorie von Landau wird dargestellt. Besonders einprägsame Beispiele zur entwickelten Turbulenz findet man in astrophysikalischen Umgebungen.

Die vor mehr als hundert Jahren (1904) von Prandtl entwickelte theoretische Beschreibung des Fluidverhaltens in der Nähe fester Wände – der Grenzschicht – ist ein besonders interessanter Spezialfall des Gleichungssystems der Hydrodynamik, einschließlich des Umschlags von einer laminaren in eine turbulente Grenzschicht bei umströmten Körpern.

Berücksichtigt man Viskosität und Wärmeleitung, besteht das Gleichungssystem der Hydrodynamik aus den Navier-Stokes-Gleichungen, der – im Vergleich zu idealen Fluiden unveränderlichen – Kontinuitätsgleichung, und einer fünften, thermodynamischen

schen Gleichung; sie ersetzt die Adiabatengleichung bei idealen Fluiden. Aufgrund der irreversiblen Energiedissipation wächst die Entropie bei viskosen Fluiden an. Die Änderung der Gesamtenergie ist gleich dem Energiestrom, der jetzt auch Terme aufgrund innerer Reibung und Wärmeleitung enthält. Die entsprechende Wärmetransportgleichung lässt sich für inkompressible Fluide wieder stark vereinfachen, in einem ruhenden Fluid wird sie zur Fourier'schen Gleichung. Auch andere Spezialfälle ermöglichen analytische Lösungen.

Ist das Fluid nicht homogen, sondern beispielsweise ein Gemisch aus zwei Komponenten, kommen Diffusionsprozesse als zusätzliche Quelle von Energiedissipation hinzu. Auch Vorgänge wie die erstmals 1905 von Einstein beschriebene Brown'sche Bewegung von Teilchen, die in einer Flüssigkeit suspendiert sind, lassen sich in einer Diffusionstheorie modellieren, wie auch heute noch in vielen Wissenschaftsbereichen angewandt wird.

Ein Beispiel sind Diffusionsvorgänge in der Teilchenerzeugung bei relativistischen Schwerionenreaktionen, wie man sie am Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) in Brookhaven und am Large Hadron Collider (LHC) in Genf experimentell untersucht. Der LHC nimmt 2021 seinen Betrieb wieder auf, um Kollisionen zwischen Protonen bei einer Schwerpunktsenergie von 13 TeV und zwischen Bleiionen bei 5,02 TeV pro Teilchenpaar zu untersuchen.

Von aktuellem Forschungsinteresse sind Diffusionsprozesse, die durch nichtlineare partielle Differenzialgleichungen anstatt durch lineare Gleichungen vom Fokker-Planck Typ beschrieben werden. Als Folge der Nichtlinearitäten sind die Gleichgewichtsverteilungen dann keine Boltzmannverteilungen, sondern Fermi-Dirac-Verteilungen bei Fermionen (Teilchen mit halbzahligem Spin), und Bose-Einstein-Verteilungen bei Bosonen (ganzzahliger Spin). Im Fall konstanter Transportkoeffizienten sind analytische Lösungen der entsprechenden Diffusionsgleichungen durch eine geeignete nichtlineare Transformation möglich. Diese Lösungen sind sowohl bei hohen relativistischen Energien anwendbar – wie bei der Equilibrierung von Gluonen (Trägerteilchen der starken Wechselwirkung) und Quarks im Anfangsstadium relativistischer Schwerionenkollisionen –, als auch

bei sehr niedrigen Energien und Temperaturen, wie bei der zeitabhängigen Bildung eines Bose-Einstein Kondensats aus kalten Atomen. Beispiele für beide Gebiete werden vorgestellt und für kalte Quantengase mit experimentellen Ergebnissen verglichen.

Wenn die Geschwindigkeit der makroskopischen Fluidströmung – oder die der Fluidteilchen – mit der Lichtgeschwindigkeit vergleichbar werden, müssen relativistische Bewegungsgleichungen aufgestellt werden, die den Euler-Gleichungen bzw. den Navier-Stokes-Gleichungen im nichtrelativistischen Fall entsprechen; dabei geht man vom Energie-Impuls Tensor einer Flüssigkeit aus. Für ideale Fluide diskutieren wir auch die relativistische Verallgemeinerung der Bernoulli-Gleichung und den nichtrelativistischen Grenzfall.

Ein wichtiges Anwendungsgebiet der Hydrodynamik ist die Astrophysik, da Sterne und andere kosmische Materieansammlungen wie Galaxien und Galaxienhaufen auf bestimmten Längen- und Zeitskalen durch die hydrodynamische Approximation beschrieben werden können. Zwar würde eine ausführliche Darstellung den Rahmen dieser Vorlesung sprengen, aber Beispiele wie die Ausbreitung von Schockwellen im interstellaren Medium sollen exemplarisch zeigen, welche Probleme sich im Rahmen der Hydrodynamik behandeln lassen.

Das abschließende Kapitel über die Hydrodynamik der Superfluide behandelt die von Tisza (1940) und Landau (1941) aufgestellte Theorie von Helium II im Rahmen eines Zwei-Fluid-Modells, das sich insbesondere durch eine korrekte Beschreibung der Schallausbreitung in Superflüssigkeiten auszeichnet (zweiter Schall). Hier wie auch in anderen Teilen greift die Vorlesung nicht nur auf die Originalliteratur, sondern auch auf die vorhandenen Lehrbücher zurück (s. Bibliographie), vor allem auf das Lehrbuch von Landau und Lifschitz, das sich zum vertieften Studium und auch als Nachschlagwerk eignet. Die anderen in der Bibliographie genannten Bücher sind ebenfalls empfehlenswert; wenn man sich z. B. in ein neues Gebiet wie die astrophysikalische Hydrodynamik einarbeiten möchte, sind die Werke von Shore oder Choudhuri ein guter Einstieg.

Einige Testaufgaben am Ende des Buches sollen als Anreiz dienen, den Stoff dieses Kurses beispielhaft auch selbst nachzu-

rechnen: Die Mehrzahl der Lösungen ist bereits im vorhergehenden Text versteckt.

Zahlreichen Studierenden bin ich für Fragen und Verbesserungsvorschläge dankbar. Das sorgfältige L^AT_EX-Skript der ersten Auflage hat Moritz Beutel erstellt und auch aus vielen meiner Abbildungsskizzen satzfertige Druckvorlagen gemacht. Manuela Wirschke danke ich für das Einfügen der Abbildungsbezüge im Text. Die Betreuung der korrigierten und um ein Kapitel zur nicht-linearen Diffusion erweiterten Neuauflage haben Bianca Alton und Margit Maly vom Springer-Verlag übernommen. Tara Butler und Johannes Hölck danke ich für Kommentare und Korrekturen zum neu hinzugefügten Kap. 8. Hinweise auf dennoch verbleibende Ungenauigkeiten und Fehler bitte direkt an mich senden.

Heidelberg
November 2021

Georg Wolschin

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Strömungslehre	1
1.2	Hydrodynamische Beschreibung	3
2	Ideale Fluide	5
2.1	Kontinuitätsgleichung	5
2.2	Euler'sche Gleichungen	8
2.3	Bernoulli'sche Gleichung	13
2.4	Euler-Gleichungen im linearisierten Fall ...	16
2.5	Hydrostatik	21
2.6	Energie- und Impulsstrom im Fluid	24
2.7	Zirkulation, Thomson'scher Satz	27
2.8	Potenzialströmungen	29
2.9	Inkompressible Fluide	34
2.10	Stromfunktion	38
2.11	Wellen	44
	Literatur	51
3	Viskose Fluide	53
3.1	Navier-Stokes-Gleichungen	53
3.2	Energiedissipation in einem inkompressiblen viskosen Fluid	56
3.3	Hagen-Poiseuille'sches Gesetz	58
3.4	Reynolds'sche Zahl; Turbulenzkriterium ...	61

3.5	Strömungen mit kleinem Re : Stokes'sche Formel	66
3.6	Laminarer Nachlauf	69
	Literatur	74
4	Turbulenz	75
4.1	Übergang zur Turbulenz und doppelte Schwelle	75
4.2	Turbulenzeinsatz über Instabilität	79
4.3	Stabilität stationärer Strömungen	81
4.4	Entwickelte Turbulenz in astrophysikalischen Umgebungen	86
	Literatur	88
5	Grenzschichten	89
	Literatur	91
6	Wärmetransport	93
6.1	Die Wärmetransportgleichung	94
6.2	Wärmetransport bei inkompressiblen Fluiden	96
6.3	Wärmeleitung in einem unbegrenzten Medium	98
6.4	Konvektion	101
	Literatur	103
7	Diffusion	105
7.1	Flüssigkeitsgemische	105
7.2	Brown'sche Bewegung	109
7.3	Diffusion in relativistischen Systemen	113
	Literatur	121
8	Nichtlineare Diffusion	123
8.1	Diffusion von Bosonen und Fermionen	124
8.2	Fermionen: Valenzquarks bei hohen Energien	130
8.3	Bosonen: Gluonen bei hohen Energien	132
8.4	Ultrakalte Atome und Bose-Einstein-Kondensation	134
	Literatur	139

9	Relativistische Hydrodynamik	141
9.1	Energie-Impuls-Tensor einer Flüssigkeit	142
9.2	Relativistische Bewegungsgleichungen	144
9.3	Relativistische Hydrodynamik mit Dissipation	147
	Literatur	148
10	Astrophysikalische Hydrodynamik	149
10.1	Schockwellen	150
10.2	Rankine-Hugoniot-Bedingungen	154
	Literatur	158
11	Hydrodynamik der Superflüssigkeiten	159
11.1	Grundlagen	159
11.2	Hydrodynamische Gleichungen für He II	163
11.3	Schallausbreitung in Superfluiden	167
	Literatur	169
12	Testaufgaben	171
12.1	Kontinuitätsgleichung für die Entropie	171
12.2	Schwingungsgleichung	171
12.3	Hydrostatik	172
12.4	Inkompressible Fluide	173
12.5	Zweidimensionale Strömung	174
12.6	Dispersionsrelation	175
12.7	Wasserwellen	176
12.8	Poiseuille-Strömung	178
12.9	Laminarer Nachlauf	179
12.10	Stabilität stationärer Strömungen	180
12.11	Wärmeleitung	180
12.12	Wahrscheinlichkeitsverteilung Brown'scher Teilchen	181
12.13	Varianz der Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Brown'schen Teilchens	183
12.14	Diffusion	184
12.15	Gleichgewichtsverteilungen für Bosonen und Fermionen	184
12.16	Stationäre Lösung bei nichtlinearer Diffusion von Bosonen	185

12.17 Stationäre Lösung bei nichtlinearer Diffusion von Fermionen	186
12.18 Energie-Impuls-Tensor	187
12.19 Entropieerhaltung in idealer relativistischer Hydrodynamik	188
12.20 Erster und zweiter Schall bei Superfluiden	189
Literatur	191
Stichwortverzeichnis	193