So einfach ist Mathematik – Zwölf Herausforderungen im ersten Semester

Dirk Langemann

So einfach ist Mathematik – Zwölf Herausforderungen im ersten Semester

2. Auflage

Springer Spektrum

Dirk Langemann
Institut Computational Mathematics
TU Braunschweig
Braunschweig, Deutschland

ISBN 978-3-662-63719-7 ISBN 978-3-662-63720-3 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-63720-3

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Planung/Lektorat: Andreas Rüdinger
Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort

Schön, dass Sie da sind. Willkommen.

Sie halten ein Buch für den Studienstart in den Händen. Es richtet sich an Studierende aller Fachrichtungen, die in den ersten Semestern Mathematikvorlesungen hören. Manchmal wird die Mathematik als eine theoretische und weltabgewandte Disziplin betrachtet, die gerade am Studienbeginn eine Hürde oder zumindest eine Herausforderung ist. Aber Mathematik ist die Sprache, in der naturwissenschaftliche und immer stärker auch lebenswissenschaftliche Zusammenhänge formuliert werden. Sie ist ein natürliches Werkzeug in der Erkenntnisgewinnung und – einmal entschlüsselt – einfach.

Das Buch wird Ihnen mathematische Zusammenhänge, die in Ihren Vorlesungen behandelt werden, näherbringen, indem es die Gedankengänge ausführlich entwickelt und häufige Fragen anspricht. Wir werden diskutieren, wie sich die teilweise spröden mathematischen Schreibweisen in anschauliche Vorstellungen übersetzen lassen, warum die Definitionen der Begriffe gerade auf die Weise formuliert sind, wie sie Ihnen präsentiert werden, und wie man sich selbst einen Zugang zu den unterschiedlichen mathematischen Themen erarbeiten kann.

Dazu haben wir Themen und Begriffe aus der Analysis und der linearen Algebra ausgewählt, die nach unseren Erfahrungen von Studierenden der ersten Semester als schwierig empfunden werden, beispielsweise die Grenzwertdefinition und den Begriff der linearen Abbildung. Zu den schwierigen Begriffen gehören der Kern linearer Abbildungen, die Stetigkeit in einem Punkt und schließlich Eigenwerte und Eigenvektoren. Diese und einige weitere Begriffe mit den zugehörigen Überlegungen sind für Studienanfängerinnen und Studienanfänger[1] Herausforderungen, die leicht zu Stolperfallen werden können. Das Buch soll Sie vor diesen Stolperfallen bewahren, indem es die ausgewählten Begriffe von mehreren Seiten beleuchtet, sie veranschaulicht und sie Ihnen so zugänglich macht.

[1] Oft nennen wir die beiden grammatikalischen Geschlechter. Wo dies den Lesefluss zu sehr stört, meinen wir mit der weiblichen grammatikalischen Form immer auch Jungs, mit der männlichen Form ebenso immer die weibliche und beziehen gedanklich auch alle sozialen und biologischen sowie alle anderen eigenen und fremden Einordnungen ein.

Das Buch ist aus unseren in den Lehrveranstaltungen zur Ingenieurmathematik an der Technischen Universität Braunschweig gesammelten Erfahrungen und aus vielen Gesprächen mit Studierenden entstanden. Oft sind die ersten Schritte auf dem Weg zum Verstehen eines Begriffs steinig. Viele Studierende quälen sich mit den Fragen: Was soll das? Wozu ist das gut? Und warum gerade so? Wir wollen versuchen, Antworten auf diese Fragen zu geben, und das werden wir tun, indem wir mit Anschauungen, Interpretationen und Bildern Stück für Stück ein belastbares Grundverständnis der mathematischen Themen und Überlegungen aufbauen.

Wir haben die Erfahrung gemacht, dass das Grundverständnis die Basis ist, von der aus Sie den weiterführenden Inhalten der Vorlesungen zur Mathematik und zu anderen Fächern folgen können und von der aus die Lösungswege zu Übungs- und Klausuraufgaben verständlich werden. Nach einiger Beschäftigung erscheinen Ihnen die Lösungswege und Beweise als ganz natürlich.

Dieses Buch erzählt Ihnen von Mathematik und logischen Argumentationen. Dazu braucht es Sprache. Argumentationen in der Mathematik und im Alltag bedienen sich der Sprache, und sie funktionieren in der Mathematik wie im Alltag nach denselben Regeln. Wir nennen diese Regeln oft Logik. Manche sagen, Logik sei abstrakt, aber Logik ist die Grundlage all unseres Denkens. Wenn Sie das nicht so sehen, dann versuchen Sie einmal, unlogisch zu denken und eine Freundin oder einen Freund von einer unlogischen Gedankenaneinanderreihung zu überzeugen. Sie werden sehen, es klappt nicht.

Andererseits haben Sie Sachverhalte verstanden, wenn Sie sie jemandem als etwas völlig Einleuchtendes erklären können. Das Buch, das Sie in den Händen halten, wird Ihnen die Herausforderungen der Mathematikvorlesung des ersten Semesters als etwas Einleuchtendes erklären. Deshalb hat es viel geschriebenen Text und nicht ganz so viele Formelzeichen. Lassen Sie sich auf sprachliche und damit logische Argumentationen ein, reproduzieren Sie den Gang der Überlegungen in Ihrem Kopf, und entwickeln Sie für sich kurze Erklärgeschichten. Sie werden erleben, wie einfach Mathematik ist.

Zum erfolgreichen Lesen dieses Buches brauchen Sie das, was Sie in der Schule über Mathematik gelernt haben, wobei Sie die meisten Abschnitte auch ohne die Inhalte aus der gymnasialen Oberstufe verstehen werden. Zur studienorientierten Auffrischung dieser Inhalte empfehlen wir das Vorgängerbuch *So einfach ist Mathematik – Basiswissen für Studienanfänger aller Disziplinen* aus demselben Verlag. Dort erklären wir, mit der Klammersetzung und der Bruchrechnung beginnend, den mathematischen Formalismus, die Potenzgesetze, Termumformungen und Textaufgaben. Hier nutzen wir Umformungen von Termen, ohne diese selbst zu erläutern – wohl aber ihren Zweck. Außerdem benutzen wir einige mathematische Symbole wie z. B. Binomialkoeffizienten, die Sie im Anhang kurz zusammengefasst finden.

Wir empfehlen Ihnen, die Bedeutung jeder noch so kleinen formellen Schreib- oder Ausdrucksweise zu hinterfragen und diese, falls sie Ihnen nicht völlig klar ist, zu ergründen. Dabei helfen die Anhänge in diesem Band und das Stichwortverzeichnis. Grundsätzliche Bezeichnungen und mathematische Notationen werden im Vorgängerband besprochen. Oft hilft auch ein kurzer Blick in Nachschlagewerke oder ins Internet. Insgesamt führt das Suchen nach der Bedeutung der Begriffe und Notationen dazu, dass das Lesen langsam vorangeht. Wir bemühen uns, Ihnen die Argumentationen ausführlich darzulegen und zu erklären. Aber die Arbeit liegt weiterhin auf Ihrer Seite.

Durch die angestrebte Ausführlichkeit ist es unmöglich, die vollständigen Inhalte der Analysis und der linearen Algebra aus dem ersten Semester in diesem Buch zu versammeln. Wir erklären dafür wichtige mathematische Ansätze, Ziele und Arbeitsweisen und geben uns alle Mühe, die Begriffe und Zusammenhänge so anschaulich darzustellen, dass Sie sie als ganz natürliche Gedankengänge verstehen werden.

Als eine Konsequenz aus der Themenauswahl und der beabsichtigten Ausführlichkeit verzichtet dieses Buch auf eine systematische Vollständigkeit, wie sie in einigen Vorlesungen angestrebt wird. Wir verwenden die reellen Zahlen, als würden wir sie kennen, und nutzen Ableitungen und Integrale an einigen Stellen als Abkürzung unserer Argumentationen. Im Anhang finden Sie eine Kurzzusammenfassung zum Umgang mit Differenziation und Integration. Wesentlich wichtiger als die Systematik ist uns hier die Anschaulichkeit und das Verständnis.

Deshalb ist das erste Kapitel zur gefürchteten mathematischen Definition eines Grenzwerts das längste. Schon bei diesem Thema, das meist in zwei bis drei Vorlesungen behandelt wird, tauchen viele Fragen und Nebenaspekte auf. Wir brauchen einige kleine technische Tricks, kommen aber auch zu sehr grundsätzlichen mathematischen Fragestellungen. Der mathematische Formalismus und die mathematische Sprache, die natürlich sehr exakt sind und sein müssen, werden durch eine erzählerische Darstellung und durch ihre Übersetzung in Anschauung viel einleuchtender. Wir zeigen im ersten Kapitel, wie Mathematik funktioniert – und dazu gehören kleine Beweise – und wie man sich mathematischen Fragen und Begriffen nähert. Bereits die folgenden Kapitel werden Ihnen viel leichter fallen.

Zur Arbeit mit diesem Buch empfehlen wir Ihnen einen Stift und einen Zettel, auf dem Sie die Umformungen nachvollziehen können. Wir geben uns alle Mühe, die Umformungen so ausführlich wie möglich zu beschreiben, doch die Erfahrung lehrt, dass Sie sie erst verstanden haben, wenn Sie selbst die Umformungen ausführen. Dann werden Sie ihre Natürlichkeit erkennen.

Wir haben schon angesprochen, dass dieses Buch für Sie nur langsam lesbar ist. Obwohl wir anstreben, wirklich jeden Schritt der Gedankengänge zu erklären, müssen Sie wahrscheinlich zwischen den Zeilen und Absätzen vor- und zurückschauen, um nachzuvollziehen, woher die Argumente und Voraussetzungen stammen. Dies ist bei mathematischen und naturwissenschaftlichen Texten völlig normal. Untersuchungen ergaben, dass die Augen von geübten Leserinnen und Lesern solcher Texte stärker zwischen den Zeilen hin und her springen als bei geisteswissenschaftlichen oder belletristischen Texten. Probieren Sie eine solche Lesetechnik, und vergessen Sie nicht die Bedeutung der vielen kleinen Zeichen.

Das Buch hält kleine Aufgaben und Aufforderungen für Sie bereit, aber keine Aufgaben samt Lösung und keine alten Klausuraufgaben. Das weitverbreitete Auswendiglernen von alten Klausuraufgaben hat zwar – das muss man zugeben – den ein oder anderen Studierenden eine immer gleiche Klausur von Standardaufgaben bestehen lassen. Aber die zeit- und nervenaufwendige Lernmethode des Auswendiglernens hat noch niemanden dazu gebracht, Mathematik zu verstehen und für spätere Lehrveranstaltungen anwendungsbereit zu beherrschen. Niemand lernt eine Fremdsprache, indem er die Buchstabenfolge der Nationalhymne auswendig lernt. Niemand wird von Ihnen im Beruf verlangen, eine Klausuraufgabe zu lösen. Aber von Ihnen wird erwartet werden, dass Sie ein Verständnis von Ihrem Fachgebiet haben.

Das Buch enthält auch keine Kästen mit dem, was vermeintlich wirklich wichtig ist. Denn gäbe es etwas, das wirklich wichtig ist, dann würden wir Ihnen dieses nicht verschweigen, sondern in einer sprachlich konzentrierten Fassung darbieten. Das war – nur nebenbei bemerkt – die Argumentation eines indirekten Beweises. Wichtig ist nicht irgendein Formalismus oder ein Verfahren, das man in einen Kasten schreiben kann. Entscheidend sind Argumentationen und anschauliche Vorstellungen. Wir bringen Ihnen diese Argumentationen und Vorstellungen entlang von typischen Fragen nahe, und wir zeigen Ihnen, wie Sie selbst an Ihrem Verständnis weiterarbeiten können.

Mathematik ist einfach und schön, denn sie besteht aus purem Denken, und wir alle können gar nicht anders, als logisch zu denken.

Und jetzt viel Spaß mit Mathematik.

Vanessa Sommer und Dirk Langemann

Vorwort zur zweiten Auflage

Angeregt vom Erfolg der ersten Auflage sind neben eigenen Ergänzungen und Ausbesserungen, für die allen aufmerksamen Leserinnen und Lesern herzlich gedankt sei, die Flashcards neu entstanden. Diese digitalen Lernkärtchen bieten einfache Aufgaben zur Wiederholung, Fragen, die zum Nachdenken anregen, und Aufgaben aus einem neuen Blickwinkel. Sie haben damit die Möglichkeit, Ihr Wissen und Ihre Argumentationen zu prüfen und zu erweitern. Viel Spaß dabei.

Braunschweig, Deutschland Dirk Langemann

Inhaltsverzeichnis