

This series aims at speedy, informal, and high level information on new developments in mathematical research and teaching. Considered for publication are:

1. Preliminary drafts of original papers and monographs
2. Special lectures on a new field, or a classical field from a new point of view
3. Seminar reports
4. Reports from meetings

Out of print manuscripts satisfying the above characterization may also be considered, if they continue to be in demand.

The timeliness of a manuscript is more important than its form, which may be unfinished and preliminary. In certain instances, therefore, proofs may only be outlined, or results may be presented which have been or will also be published elsewhere.

The publication of the "*Lecture Notes*" Series is intended as a service, in that a commercial publisher, Springer-Verlag, makes house publications of mathematical institutes available to mathematicians on an international scale. By advertising them in scientific journals, listing them in catalogs, further by copyrighting and by sending out review copies, an adequate documentation in scientific libraries is made possible.

Manuscripts

Since manuscripts will be reproduced photomechanically, they must be written in clean typewriting. Handwritten formulae are to be filled in with indelible black or red ink. Any corrections should be typed on a separate sheet in the same size and spacing as the manuscript. All corresponding numerals in the text and on the correction sheet should be marked in pencil. Springer-Verlag will then take care of inserting the corrections in their proper places. Should a manuscript or parts thereof have to be retyped, an appropriate indemnification will be paid to the author upon publication of his volume. The authors receive 25 free copies.

Manuscripts in English, German or French should be sent to Prof. Dr. A. Dold, Mathematisches Institut der Universität Heidelberg, Tiergartenstraße or Prof. Dr. B. Eckmann, Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich.

Die „*Lecture Notes*“ sollen rasch und informell, aber auf hohem Niveau, über neue Entwicklungen der mathematischen Forschung und Lehre berichten. Zur Veröffentlichung kommen:

1. Vorläufige Fassungen von Originalarbeiten und Monographien.
2. Spezielle Vorlesungen über ein neues Gebiet oder ein klassisches Gebiet in neuer Betrachtungsweise.
3. Seminarausarbeitungen.
4. Vorträge von Tagungen.

Ferner kommen auch ältere vergriffene spezielle Vorlesungen, Seminare und Berichte in Frage, wenn nach ihnen eine anhaltende Nachfrage besteht.

Die Beiträge dürfen im Interesse einer größeren Aktualität durchaus den Charakter des Unfertigen und Vorläufigen haben. Sie brauchen Beweise unter Umständen nur zu skizzieren und dürfen auch Ergebnisse enthalten, die in ähnlicher Form schon erschienen sind oder später erscheinen sollen.

Die Herausgabe der „*Lecture Notes*“ Serie durch den Springer-Verlag stellt eine Dienstleistung an die mathematischen Institute dar, indem der Springer-Verlag für ausreichende Lagerhaltung sorgt und einen großen internationalen Kreis von Interessenten erfassen kann. Durch Anzeigen in Fachzeitschriften, Aufnahme in Kataloge und durch Anmeldung zum Copyright sowie durch die Versendung von Besprechungsexemplaren wird eine lückenlose Dokumentation in den wissenschaftlichen Bibliotheken ermöglicht.

Lecture Notes in Mathematics

An informal series of special lectures, seminars and reports on mathematical topics

Edited by A. Dold, Heidelberg and B. Eckmann, Zürich

5

Jean-Pierre Serre

Collège de France, Paris

Cohomologie Galoisienne

Cours au Collège de France, 1962–1963

Troisième édition, 1965

1965



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

ISBN 978-3-540-03349-3 ISBN 978-3-662-21576-0 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-21576-0

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten. Ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages ist es auch nicht gestattet, dieses Buch oder Teile daraus auf photomechanischem Wege (Photokopie, Mikrokopie) oder auf andere Art zu vervielfältigen. © by Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1965

Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1965

Library of Congress Catalog Card Number 65–28859. Titel NR. 7325

INTRODUCTION A LA PREMIÈRE ÉDITION

Ces notes reproduisent avec quelques modifications un cours fait au Collège de France pendant l'année 1962-1963. On y trouvera également un texte inédit de TATE (Annexe au Chapitre I), et un autre de VERDIER, tous deux consacrés à la dualité des groupes profinis.

Une rédaction préliminaire de ces notes, due à Michel RAYNAUD, m'a été très utile; je l'en remercie vivement.

INTRODUCTION A LA TROISIÈME ÉDITION

Cette édition est la reproduction photographique de la première, augmentée de trois pages de Suppléments, donnant des indications sur quelques résultats récents.

Jean-Pierre Serre

T A B L E D E S M A T I È R E S

Chapitre I. COHOMOLOGIE DES GROUPES PROFINIS

§ 1. <u>Groupes profinis.</u>	I-1
1.1. Définition	I-1
1.2. Sous-groupes	I-2
1.3. Indices	I-3
1.4. Pro-p-groupes et p-groupes de Sylow	I-4
1.5. Pro-p-groupes libres	I-5
§ 2. <u>Cohomologie.</u>	I-8
2.1. Les G-modules discrets	I-8
2.2. Cochaînes, cocycles, cohomologie	I-8
2.3. Basses dimensions	I-10
2.4. Fonctorialité	I-11
2.5. Modules induits	I-12
2.6. Compléments	I-14
§ 3. <u>Dimension cohomologique</u>	I-17
3.1. La p-dimension cohomologique	I-17
3.2. Dimension cohomologique stricte	I-18
3.3. Dimension cohomologique des sous-groupes et des extensions	I-20
3.4. Caractérisation des groupes profinis G tels que $\text{cd}_p(G) \leq 1$	I-23
3.5. Modules dualisants	I-27
§ 4. <u>Cohomologie des pro-p-groupes</u>	I-32
4.1. Modules simples	I-32
4.2. Interprétation de H_2^1 : générateurs	I-34
4.3. Interprétation de H^2 : relations	I-39
4.4. Un théorème de Šafaverič	I-42
4.5. Groupes de Poincaré	I-47
§ 5. <u>Cohomologie non abélienne</u>	I-56
5.1. Définition de H^0 et de H^1	I-56
5.2. Espaces principaux homogènes sur A - nouvelle définition de $H^1(G, A)$	I-57
5.3. Torsion	I-59
5.4. Suite exacte de cohomologie associée à un sous-groupe	I-63
5.5. Suite exacte de cohomologie associée à un sous-groupe distingué	I-66
5.6. Cas d'un sous-groupe abélien distingué	I-68
5.7. Cas d'un sous-groupe central	I-71
5.8. Compléments	I-73
5.9. Une propriété des groupes de dimension cohomologique ≤ 1	I-74
<u>Indications bibliographiques sur le Chapitre I</u>	I-78
<u>Annexe</u> (Quelques théorèmes de dualité)	I-79

Chapitre II. COHOMOLOGIE GALOISIENNE - CAS COMMUTATIF

§ 1. <u>Généralités</u>	II-1
1.1. Cohomologie galoisienne	II-1
1.2. Premiers exemples	II-3
§ 2. <u>Critères de dimension cohomologique</u>	II-3
2.1. Un résultat auxiliaire	II-4
2.2. Cas où p est égal à la caractéristique	II-4
2.3. Cas où p est différent de la caractéristique	II-6
§ 3. <u>Corps de dimension ≤ 1</u>	II-7
3.1. Définition	II-7
3.2. Relation avec la propriété (C_1)	II-9
3.3. Exemples de corps de dimension ≤ 1	II-10
§ 4. <u>Théorèmes de transition</u>	II-13
4.1. Extensions algébriques	II-13
4.2. Extensions transcendantes	II-13
4.3. Corps locaux	II-15
4.4. Dimension cohomologique du groupe de Galois d'un corps de nombres algébriques	II-16
4.5. La propriété (C_r)	II-18
§ 5. <u>Corps p-adiques</u>	II-20
5.1. Rappels	II-20
5.2. Cohomologie des G_k -modules finis	II-21
5.3. Premières applications	II-25
5.4. Caractéristique d'Euler-Poincaré (cas élémentaire)	II-26
5.5. Cohomologie non ramifiée	II-27
5.6. Le groupe de Galois de la p -extension maximale de k	II-29
5.7. Caractéristiques d'Euler-Poincaré	II-34
5.8. Groupes de type multiplicatif	II-39
§ 6. <u>Corps de nombres algébriques</u>	II-44
6.1. Modules finis - définition des groupes $P^i(k, A)$	II-44
6.2. Le théorème de propreté	II-46
6.3. Énoncés des théorèmes de Poitou et Tate	II-48
<u>Indications bibliographiques sur le Chapitre II</u>	II-50

Chapitre III. COHOMOLOGIE GALOISIENNE NON COMMUTATIVE

§ 1. <u>Formes</u>	III-1
1.1. Tenseurs	III-2
1.2. Exemples	III-4
1.3. Variétés, groupes algébriques, etc	III-6

§ 2. <u>Corps de dimension ≤ 1</u>	III-7
2.1. Rappel sur les groupes linéaires	III-8
2.2. Nullité de H^1 pour les groupes linéaires connexes	III-10
2.3. Une conjecture	III-14
2.4. Points rationnels dans les espaces homogènes	III-16
§ 3. <u>Corps de dimension ≤ 2</u>	III-23
3.1. Enoncé des conjectures	III-23
3.2. Exemples	III-24
3.3. Questions voisines	III-26
§ 4. <u>Théorèmes de finitude</u>	III-27
4.1. La condition (F)	III-27
4.2. Corps de type (F)	III-29
4.3. Finitude de la cohomologie des groupes linéaires	III-30
4.4. Finitude d'orbites	III-33
4.5. Le cas réel	III-35
4.6. Corps de nombres algébriques (théorème de Borel)	III-37
4.7. Un contre-exemple au "principe de Hasse"	III-38
<u>Indications bibliographiques sur le Chapitre III</u>	III-45

DUALITÉ DANS LA COHOMOLOGIE DES GROUPES PROFINIS

(par Jean-Louis VERDIER)

1. Modules induits et co-induits	V-1
2. Homomorphismes locaux	V-7
3. Le théorème de dualité	V-11
4. Application du théorème de dualité	V-19

BIBLIOGRAPHIE	B-1
---------------	-----

ERRATA	E-1
--------	-----

SUPPLÉMENTS	...	S-1
-------------	-----	-----