

This series aims to report new developments in mathematical research and teaching – quickly, informally and at a high level. The type of material considered for publication includes:

1. Preliminary drafts of original papers and monographs
2. Lectures on a new field, or presenting a new angle on a classical field
3. Seminar work-outs
4. Reports of meetings, provided they are
 - a) of exceptional interest or
 - b) devoted to a single topic.

Texts which are out of print but still in demand may also be considered if they fall within these categories.

The timeliness of a manuscript is more important than its form, which may be unfinished or tentative. Thus, in some instances, proofs may be merely outlined and results presented which have been or will later be published elsewhere. If possible, a subject index should be included.

Manuscripts should comprise not less than 100 pages.

Publication of *Lecture Notes* is intended as a service to the international mathematical community, in that a commercial publisher, Springer-Verlag, can offer a wider distribution to documents which would otherwise have a restricted readership. Once published and copyrighted, they can be documented in the scientific literature. –

Manuscripts

Manuscripts are reproduced by a photographic process; they must therefore be typed with extreme care. Symbols not on the typewriter should be inserted by hand in indelible black ink. Corrections to the typescript should be made by sticking the amended text over the old one, or by obliterating errors with white correcting fluid. Authors receive 75 free copies.

The typescript is reduced slightly in size during reproduction; best results will not be obtained unless the text on any one page is kept within the overall limit of 18 x 26.5 cm (7 x 10½ inches). The publishers will be pleased to supply on request special stationery with the typing area outlined.

Manuscripts in English, German or French should be sent to Prof. Dr. A. Dold, Mathematisches Institut der Universität Heidelberg, 69 Heidelberg/Germany, Tiergartenstraße or Prof. Dr. B. Eckmann, Eidgenössische Technische Hochschule, CH-8006 Zürich/Switzerland.

Springer-Verlag, D-1000 Berlin 33, Heidelberger Platz 3

Springer-Verlag, D-6900 Heidelberg 1, Neuenheimer Landstraße 28-30

Springer-Verlag, 175 Fifth Avenue, New York, NY 10010/USA

Lecture Notes in Physics: Bisher erschienen/Already published

Vol. 1: J. C. Erdmann, Wärmeleitung in Kristallen, theoretische Grundlagen und fortgeschrittene experimentelle Methoden. II, 283 Seiten. 1969. DM 20,–

Vol. 2: K. Hepp, Théorie de la renormalisation. III, 215 pages. 1969. DM 18,–

Vol. 3: A. Martin, Scattering Theory: Unitarity, Analytic and Crossing. IV, 125 pages. 1969. DM 16,–

Vol. 4: G. Ludwig, Deutung des Begriffs physikalische Theorie und axiomatische Grundlegung der Hilbertraumstruktur der Quantenmechanik durch Hauptsätze des Messens. XI, 469 Seiten. 1970. DM 28,–

Vol. 5: M. Schaaf, The Reduction of the Product of Two Irreducible Unitary Representations of the Proper Orthochronous Quantummechanical Poincaré Group. IV, 120 pages. 1970. DM 16,–

Vol. 6: Group Representations in Mathematics and Physics. Edited by V. Bargmann. V, 340 pages. 1970. DM 24,–

Vol. 7: R. Balescu, J. L. Lebowitz, I. Prigogine, P. Résibois, Z. W. Salsburg, Lectures in Statistical Physics. V, 181 pages. 1971. DM 18,–

Vol. 8: Proceedings of the Second International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics. Edited by M. Holt. IX, 462 pages. 1971. DM 28,–

Vol. 9: D. W. Robinson, The Thermodynamic Pressure in Quantum Statistical Mechanics. V, 115 pages. 1971. DM 16,–

Vol. 10: J. M. Stewart, Non-Equilibrium Relativistic Kinetic Theory. III, 113 pages. 1971. DM 16,–

Vol. 11: O. Steinmann, Perturbation Expansions in Axiomatic Field Theory, III, 126 pages. 1971. DM 16,–

Vol. 12: Statistical Models and Turbulence. Edited by M. Rosenblatt and C. Van Atta. VIII, 492 pages. 1972. DM 28,–

Vol. 13: M. Ryan, Hamiltonian Cosmology. V, 169 pages. 1972. DM 18,–

Vol. 14: Methods of Local and Global Differential Geometry in General Relativity. Edited by D. Farnsworth, J. Fink, J. Porter and A. Thompson. VI, 188 pages. 1972. DM 18,–

Vol. 15: M. Fierz, Vorlesungen zur Entwicklungsgeschichte der Mechanik. V, 97 Seiten. 1972. DM 16,–

Vol. 16: H.-O. Georgii, Phasenübergang 1. Art bei Gittergasmodellen. IX, 167 Seiten. 1972. DM 18,–

Lecture Notes in Mathematics

A collection of informal reports and seminars

Edited by A. Dold, Heidelberg and B. Eckmann, Zürich

5

Jean-Pierre Serre

Collège de France, Paris/France

Cohomologie Galoisienne

Cours au Collège de France, 1962–1963

Quatrième Edition



Springer-Verlag

Berlin Heidelberg GmbH 1973

AMS Subject Classifications (1970): 12B20

ISBN 978-3-540-06084-0

ISBN 978-3-662-21553-1 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-662-21553-1

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically those of translation, reprinting, re-use of illustrations, broadcasting, reproduction by photocopying machine or similar means, and storage in data banks.

Under § 54 of the German Copyright Law where copies are made for other than private use, a fee is payable to the publisher, the amount of the fee to be determined by agreement with the publisher.

© by Springer Verlag Berlin Heidelberg 1973. Library of Congress Catalog Card Number 72-96043.

Originally published by Springer-Verlag Berlin · Heidelberg · New York in 1973

INTRODUCTION A LA PREMIÈRE ÉDITION

Ces notes reproduisent avec quelques modifications un cours fait au Collège de France pendant l'année 1962-1963. On y trouvera également un texte inédit de TATE (Annexe au Chap.I), et un autre de VERDIER, tous deux consacrés à la dualité des groupes profinis.

Une rédaction préliminaire de ces notes, due à Michel RAYNAUD, m'a été très utile ; je l'en remercie vivement.

INTRODUCTION A LA QUATRIÈME ÉDITION

Cette édition est la reproduction photographique de la première, corrigée, et augmentée de trois pages de Suppléments, donnant des indications sur quelques résultats récents.

Jean-Pierre Serre

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre I. COHOMOLOGIE DES GROUPES PROFINIS

<u>§ 1. Groupes profinis.</u>	I-1
1.1. Définition	I-1
1.2. Sous-groupes	I-2
1.3. Indices	I-3
1.4. Pro-p-groupes et p-groupes de Sylow	I-4
1.5. Pro-p-groupes libres	I-5
<u>§ 2. Cohomologie.</u>	I-8
2.1. Les G-modules discrets	I-8
2.2. Cochaines, cocycles, cohomologie	I-8
2.3. Basses dimensions	I-10
2.4. Fonctorialité	I-11
2.5. Modules induits	I-12
2.6. Compléments	I-14
<u>§ 3. Dimension cohomologique</u>	I-17
3.1. La p-dimension cohomologique	I-17
3.2. Dimension cohomologique stricte	I-18
3.3. Dimension cohomologique des sous-groupes et des extensions	I-20
3.4. Caractérisation des groupes profinis G tels que $\text{cd}_p(G) \leq 1$	I-23
3.5. Modules dualisants	I-27
<u>§ 4. Cohomologie des pro-p-groupes</u>	I-32
4.1. Modules simples	I-32
4.2. Interprétation de H_2^1 : générateurs	I-34
4.3. Interprétation de H^1 : relations	I-39
4.4. Un théorème de Šafaverič	I-42
4.5. Groupes de Poincaré	I-47
<u>§ 5. Cohomologie non abélienne</u>	I-56
5.1. Définition de H^0 et de H^1	I-56
5.2. Espaces principaux homogènes sur A - nouvelle définition de $H^1(G, A)$	I-57
5.3. Torsion	I-59
5.4. Suite exacte de cohomologie associée à un sous-groupe	I-63
5.5. Suite exacte de cohomologie associée à un sous-groupe distingué	I-66
5.6. Cas d'un sous-groupe abélien distingué	I-68
5.7. Cas d'un sous-groupe central	I-71
5.8. Compléments	I-73
5.9. Une propriété des groupes de dimension cohomologique ≤ 1	I-74
<u>Indications bibliographiques sur le Chapitre I</u>	I-78
<u>Annexe</u> (Quelques théorèmes de dualité)	I-79

Chapitre II. COHOMOLOGIE GALOISIENNE - CAS COMMUTATIF

<u>§ 1. Généralités</u>	II-1
1.1. Cohomologie galoisienne	II-1
1.2. Premiers exemples	II-3
<u>§ 2. Critères de dimension cohomologique</u>	II-3
2.1. Un résultat auxiliaire	II-4
2.2. Cas où p est égal à la caractéristique	II-4
2.3. Cas où p est différent de la caractéristique	II-6
<u>§ 3. Corps de dimension ≤ 1</u>	II-7
3.1. Définition	II-7
3.2. Relation avec la propriété (C_1)	II-9
3.3. Exemples de corps de dimension ≤ 1	II-10
<u>§ 4. Théorèmes de transition</u>	II-13
4.1. Extensions algébriques	II-13
4.2. Extensions transcendentes	II-13
4.3. Corps locaux	II-15
4.4. Dimension cohomologique du groupe de Galois d'un corps de nombres algébriques	II-16
4.5. La propriété (C_r)	II-18
<u>§ 5. Corps p-adiques</u>	II-20
5.1. Rappels	II-20
5.2. Cohomologie des G_K -modules finis	II-21
5.3. Premières applications	II-25
5.4. Caractéristique d'Euler-Poincaré (cas élémentaire)	II-26
5.5. Cohomologie non ramifiée	II-27
5.6. Le groupe de Galois de la p -extension maximale de k	II-29
5.7. Caractéristiques d'Euler-Poincaré	II-34
5.8. Groupes de type multiplicatif	II-39
<u>§ 6. Corps de nombres algébriques</u>	II-44
6.1. Modules finis - définition des groupes $P^j(k, A)$	II-44
6.2. Le théorème de propreté	II-46
6.3. Énoncés des théorèmes de Poitou et Tate	II-48
<u>Indications bibliographiques sur le Chapitre II</u>	II-50

Chapitre III. COHOMOLOGIE GALOISIENNE NON COMMUTATIVE

<u>§ 1. Formes</u>	III-1
1.1. Tenseurs	III-2
1.2. Exemples	III-4
1.3. Variétés, groupes algébriques, etc.	III-6

§ 2. Corps de dimension ≤ 1	III-7
2.1. Rappel sur les groupes linéaires	III-8
2.2. Nullité de H^1 pour les groupes linéaires connexes	III-10
2.3. Une conjecture	III-14
2.4. Points rationnels dans les espaces homogènes	III-16
§ 3. Corps de dimension ≤ 2	III-23
3.1. Énoncé des conjectures	III-23
3.2. Exemples	III-24
3.3. Questions voisines	III-26
§ 4. Théorèmes de finitude	III-27
4.1. La condition (F)	III-27
4.2. Corps de type (F)	III-29
4.3. Finitude de la cohomologie des groupes linéaires	III-30
4.4. Finitude d'orbites	III-33
4.5. Le cas réel	III-35
4.6. Corps de nombres algébriques (théorème de Borel)	III-37
4.7. Un contre-exemple au "principe de Hasse"	III-38
<u>Indications bibliographiques sur le Chapitre III</u>	III-45

DUALITÉ DANS LA COHOMOLOGIE DES GROUPES PROFINIS

(par Jean-Louis VERDIER)

1. Modules induits et co-induits	V-1
2. Homomorphismes locaux	V-7
3. Le théorème de dualité	V-11
4. Application du théorème de dualité	V-19
 BIBLIOGRAPHIE	 B-1
 ERRATA	 E-1
 SUPPLÉMENTS	 S-1