Springer-Lehrbuch

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

Gilbert Strang

Lineare Algebra

Übersetzt aus dem Englischen von der djs² GmbH,
unter Mitarbeit von Michael Dellnitz

Springer

Professor Gilbert Strang
Massachusetts Institute of Technology
Department of Mathematics
Cambridge, MA 02139-4307
USA
e-mail: gs@math.mit.edu
URL: http://ocw.mit.edu
http://web.mit.edu/18.06/www

Übersetzer
djs² GmbH
Technologiepark 32
33100 Paderborn
Deutschland

Titel der englischen Originalausgabe: *Introduction to Linear Algebra*, erschienen bei Wellesley-Cambridge Press, 1998

Mathematics Subject Classification (2000): 15

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

ISBN 978-3-540-43949-3 ISBN 978-3-642-55631-9 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-55631-9

Satz: Datenerstellung durch den Übersetzer unter Verwendung eines Springer TEX-Makropakets
Einbandgestaltung: *design & production* GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier 46/3111ck – 5 4 3 2 1 SPIN 11319801

Vorwort

Dies ist ein einführendes Lehrbuch zur linearen Algebra, in dem deren Theorie gemeinsam mit Anwendungen dargestellt wird. Die zentralen Gegenstände sind lineare Gleichungssysteme $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ und das Eigenwertproblem $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Es ist einfach verblüffend, wie viel es zu diesen beiden Gleichungen zu sagen (und zu lernen) gibt. Dieses Buch ist als das Resultat jahrelangen Lehrens, Organisierens und Nachdenkens über den Kurs zur linearen Algebra zu sehen — und doch kommt mir das Thema immer wieder neu und sehr lebendig vor.

Ich bin wirklich froh darüber, dass die lineare Algebra weithin als wichtige Disziplin anerkannt ist. Sie ist *definitiv* ebenso wichtig wie die Differentialrechnung. Hier werde ich um nichts nachgeben, insbesondere wenn ich mir ansehe, wie Mathematik tatsächlich angewendet wird. So viele der aktuellen Anwendungen sind diskreter statt kontinuierlicher Natur, digital anstatt analog, linearisierbar anstatt erratisch und chaotisch. In diesen Fällen sind Vektoren und Matrizen die mathematische Beschreibung der Wahl.

In der Gleichung $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ werden diese Begriffe direkt verwendet. Auf der linken Seite finden wir eine Matrix A und einen unbekannten Vektor $\mathbf{x}$. **Ihr Produkt $A\mathbf{x}$ ist eine Kombination der Spalten von A.** Hierin besteht die beste Sichtweise, die Multiplikation zu betrachten; die Gleichung fragt nach derjenigen Kombination, die den Vektor $\mathbf{b}$ erzeugt. Wir können die Lösung auf drei Beschreibungsebenen finden, die alle sehr wichtig sind:

1. ***Direkte Lösung*** durch Vorwärtseliminieren und Rücksubstitution.
2. ***Matrix–Lösung*** durch $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ unter Verwendung der inversen Matrix A^{-1}.
3. ***Vektorraum–Lösung*** durch Bestimmung aller Linearkombinationen der Spalten von A und aller Lösungen der Gleichung $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Wir betrachten hierbei den Spaltenraum und den Kern.

Es gibt noch eine weitere Möglichkeit: *Es könnte sein, dass die Gleichung $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ keine Lösung hat.* Der direkte Weg über das Eliminationsverfahren kann auf eine Gleichung der Form $0 = 1$ führen. Der Weg über die Matrix A^{-1} kann fehlschlagen, weil diese Matrix nicht bestimmt werden kann. Auf dem Weg über die Vektorräume betrachtet man alle Kombinationen der Spalten. Es kann aber sein, dass $\mathbf{b}$ nicht in diesem Spaltenraum liegt. Ein Teil der Mathematik wird helfen zu verstehen, unter welchen Umständen eine Gleichung lösbar ist und wann nicht.

Ein weiterer Teil besteht darin, Vektoren zu visualisieren. Bei einem Vektor $\mathbf{v}$ mit zwei Komponenten ist das nicht schwierig. Dessen Komponenten v_1 und v_2 geben an, wie weit man zur Seite und nach oben gehen muss — damit können wir einen Pfeil zeichnen. Ein zweiter Vektor $\mathbf{w}$ könnte zum Beispiel rechtwinklig zu $\mathbf{v}$ sein (in Kapitel 1 lernen Sie, wann genau). Haben die Vektoren jedoch sechs Komponenten, so können wir sie nicht länger zeichnen, obwohl wir in unserer Vorstellung genau dies weiter versuchen. Wir können uns sogar im sechsdimensionalen Raum einen rechten Winkel vorstellen. Wir können auch $2\mathbf{v}$ (doppelt so lang) und $-\mathbf{w}$ (in die $\mathbf{w}$ entgegengesetzte Richtung) sehen. Wir können uns *beinahe* Kombinationen wie $2\mathbf{v}-\mathbf{w}$ vorstellen.

Am Wichtigsten ist das Bemühen, sich ***alle Kombinationen von*** $c\mathbf{v}$ ***und*** $d\mathbf{w}$ vorzustellen. Diese Kombinationen erzeugen eine Art „zweidimensionaler Ebene" innerhalb des sechsdimensionalen Raums. Während ich diese Worte schreibe, bin ich mir überhaupt nicht sicher, ob ich diesen Unterraum sehen kann. Die lineare Algebra bietet aber eine einfache Möglichkeit, mit Vektoren und Matrizen jeglicher Größe zu arbeiten. Haben wir es mit sechs Strömen in einem Netzwerk oder mit sechs Kräften auf eine Struktur zu tun, oder mit sechs Preisen für unsere Produkte, so befinden wir uns sicherlich in einem sechsdimensionalen Raum. Für die lineare Algebra ist ein sechsdimensionaler Raum noch verhältnismäßig klein.

Sie erkennen an diesem Vorwort bereits den Stil dieses Buches und seine Zielsetzung. Es ist im Stil informell, in seiner Zielsetzung aber absolut ernsthaft. Bei der linearen Algebra handelt es sich um großartige Mathematik, die ich so klar wie möglich zu erklären versuche. Ich hoffe, dass der Professor, der diesen Kurs unterrichtet, dabei etwas Neues lernt. Der Autor tut dies jedes mal. Studierende werden bemerken, dass in den Anwendungen die Ideen nochmals verdeutlicht werden. Dies ist der Hauptpunkt für uns alle: zu Lernen, wie man denkt. Ich hoffe, sie erkennen, wie dieses Buch voranschreitet, *schrittweise, aber unaufhaltsam.*

In der Mathematik wird man ständig dazu angehalten, über den Einzelfall hinauszublicken und das allgemeine Prinzip zu erkennen. Ob wir es mit Pixel–Intensitäten auf einem Fernsehschirm zu tun haben oder mit Kräften auf ein Flugzeug, oder auch mit den Flugplänen für die Piloten, immer haben wir es mit Vektoren zu tun, die mit Matrizen multipliziert werden. Es lohnt sich also, die lineare Algebra gut zu studieren.

Die Struktur des Lehrbuchs

Ich möchte fünf Anmerkungen zum Aufbau dieses Buchs machen:

1. Kapitel 1 bietet eine kurze Einführung in die wesentlichen Ideen hinter Vektoren, Matrizen und Skalarprodukten. Wenn der Kurs mit diesen Begriffen bereits vertraut ist, stellt es kein Problem dar, direkt mit Kapitel 2 zu beginnen, in dem die Lösung eines $n \times n$–Gleichungssystems $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ behandelt wird.

2. Ich verwende die *reduzierte Zeilen–Treppenform* für rechteckige Matrizen nun häufiger als zuvor. In MATLAB erhält man sie über das Kommando $R = \mathbf{rref}(A)$. Durch die Reduktion von A auf R erhält man Basen des Zeilen– und des Spaltenraums. Darüber hinaus liefert die Reduktion der erweiterten Matrix $[\,A\ I\,]$ die vollständige Information über alle vier fundamentalen Unterräume.
3. Diese vier Unterräume bieten eine wunderbare Möglichkeit, die Begriffe lineare Unabhängigkeit, Dimension und Basis zu verstehen. Diese Beispiele sind so natürlich und ganz ungezwungen der Schlüssel zu den Anwendungen. Ich möchte mir keine Vektorräume ausdenken, wo es doch so viele wichtige gibt, die man wirklich braucht. Hat der Kurs erst zahlreiche Beispiele zur Unabhängigkeit und Abhängigkeit von Vektoren gesehen, so wird die Definition praktisch im Voraus verstanden. Die Spalten einer Matrix A sind unabhängig, wenn $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ die einzige Lösung der Gleichung $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ist.
4. In Abschnitt 6.1 werden Eigenwerte für 2×2–Matrizen eingeführt. Oft besteht der Wunsch, Eigenwerte früh zu behandeln (um sie für andere Fächer verfügbar zu machen, oder um zu vermeiden, dass sie ganz ausgelassen werden). Deshalb ist es kein Problem, von Kapitel 3 direkt in den Abschnitt 6.1 zu springen. Für eine 2×2–Matrix ist die Determinante sehr einfach, und das Konzept der Eigenwerte wird klar erkennbar.
5. Jeder Abschnitt der Kapitel 1 bis 7 endet mit einer hervorgehobenen Wiederholung der *Wesentlichen Punkte.* Der Leser erhält damit die Möglichkeit, den Inhalt des Textes zu rekapitulieren, indem er diese Wiederholung sorgfältig durchgeht.

Ein einsemestriger Kurs, der ununterbrochen voranschreitet, kann bis zu den Eigenwerten gelangen. Die Hauptidee besteht darin, *eine Matrix zu diagonalisieren.* Für die meisten quadratischen Matrizen erhält man dabei die Faktorisierung $S^{-1}AS$ mit der Eigenvektormatrix S. Für symmetrische Matrizen erhält man Q^TAQ. Ist A eine allgemeine rechteckige Matrix, so benötigen wir die Form U^TAV. Ich versuche, die Singulärwertzerlegung so gut ich kann zu erklären, weil sie extrem nützlich geworden ist. Ich habe bei diesem Kurs und seiner Aufnahme durch die Studierenden ein sehr gutes Gefühl.

Struktur des Kurses

Die Kapitel 1–6 enthalten das Herzstück eines einführenden Kurses zur linearen Algebra — *die Theorie sowie auch Anwendungen.* Die Schönheit äußert sich in der Weise, in der diese beiden Teile ineinander verzahnt sind. Die Theorie wird benötigt und Anwendungen finden sich überall.

Mittlerweile verwende ich eine Webseite, um den Inhalt, Hausaufgaben und Lösungen zu Klausuren zu veröffentlichen:

http://web.mit.edu/18.06/www

Ich hoffe, Sie finden diese Seite nützlich. Sie hat fast 30.000 Besucher gehabt. Machen Sie regen Gebrauch davon, und geben Sie mir Anregungen, auf welche Weise man sie noch verbessern und erweitern kann.

In Kapitel 7 wird erklärt, wie Matrizen mit linearen Abbildungen zusammenhängen. Die Matrix hängt von der Wahl einer Basis ab! Wir zeigen, wie sich Vektoren und Matrizen ändern, wenn die Basis gewechselt wird, und wir zeigen auch die lineare Abbildung, die hinter der Matrix steht. Ich beginne den Kurs nicht mit dieser (tiefer liegenden) Idee, weil es besser ist, zunächst Unterräume zu verstehen.

In Kapitel 8 werden wichtige Anwendungen präsentiert — ich wähle oft die Markov–Matrizen für eine Vorlesung ohne Klausur. In Kapitel 9 wenden wir die Aufmerksamkeit wieder der numerischen linearen Algebra zu, und erklären, wie die Gleichungen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ und $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ tatsächlich gelöst werden. In Kapitel 10 machen wir den Schritt von reellen zu komplexen Zahlen als Einträge in Matrizen und Vektoren. Das ganze Buch ist für einen zweisemestrigen Kurs angemessen — es beginnt schrittweise und geht immer weiter voran.

Berechnungen in der linearen Algebra

Der Text räumt dem wunderbaren Softwaresystem MATLAB den ersten Rang ein, das speziell für die lineare Algebra entwickelt wurde. Es stellt die Programmiersprache bereit, in der unsere *Unterrichtscodes* von Cleve Moler für die erste und von Steven Lee für diese [zweite amerikanische, Anm. d. Übers.] Ausgabe geschrieben wurden. Die Unterrichtscodes befinden sich auf der Webseite, zusammen mit den Hausaufgaben für MATLAB, Referenzmaterial und einer kurzen Einführung. Die beste Art, hiermit zu beginnen, besteht darin, Aufgaben zu lösen!

Wir bieten auch eine ähnliche Sammlung von Unterrichtscodes für Maple und für Mathematica an. Am Ende des Buches befindet sich eine Liste dieser Codes. Sie führen genau die Schritte aus, die wir im Text beschreiben. Der Leser kann die Matrix–Theorie damit auf zwei Weisen kennenlernen — die Algebra, und auch die Algorithmen. Sie fügen sich wunderbar zusammen. Dieses Buch kann einem Kurs, der algorithmische Aspekte einschließt, ebenso als Grundlage dienen wie einem Kurs, der dies nicht tut.

Es gibt so viel gute Mathematik zu lernen und zu betreiben.

Danksagungen

Ich habe viel Hilfe bei der Entstehung dieses Buches erfahren. Eine große Anzahl von Lesern hat mir Vorschläge per E–Mail geschickt; ich danke Ihnen dafür!

Steven Lee kam dreimal vom Oak Rigde National Laboratory an das MIT zu Besuch, um den Kurs 18.06 Lineare Algebra nach diesem Buch zu unterrichten. Er entwarf die Webseite **http://web.mit.edu/18.06/www**, und er fügte den MATLAB Unterrichtscodes, die von Cleve Moler für die erste Ausgabe geschrieben worden waren, weitere hinzu. (Alle Unterrichtscodes sind am Schluss des Buches aufgeführt.) Ich finde, diese kurzen Programme illustrieren die wesentlichen Schritte der lineare Algebra auf eine sehr klare Weise. Wenn Sie Hilfe irgendwelcher Art benötigen, schauen Sie bitte auf der Webseite nach.

Ich möchte meinen tiefsten Dank für das Entstehen dieses Buches fünf Freunden aussprechen. Die erste Ausgabe von 1993 wurde von Kai Borre und Frank Jensen in Dänemark in das LaTeX2ϵ–Format gebracht. Es folgte die hervorragende Arbeit von Sueli Rocha an der neuen Ausgabe. Zunächst am MIT, und dann in Hong Kong, hat sie all die Aufregung, das Beinahe–Herzversagen und schließlich das Triumphgefühl mitgemacht, die zur Veröffentlichung eines Buches dazugehören. Vasily Strela war erfolgreich damit, die Abbildungen in einen druckfertigen Zustand zu bringen (irgendwie, indem er die PostScript–Dateien gelesen hat). Im entscheidenden letzten Schritt hat Amy Hendrickson alles getan, was nötig war, um die Gestaltung zu vollenden. Sie ist ein Profi ebenso sehr wie ein Freund. Ich hoffe, Sie werden die Wiederholung der Wesentlichen Punkte am Ende eines jeden Abschnitts mögen, und die deutlichen Kästchen in den Definitionen und Sätzen. Durch die Wiederholungen und die Kästchen wird das Wichtigste herausgehoben, und meine Studenten erinnerten sich gut daran.

Es gibt noch einen anderen besonderen Teil an diesem Buch: *Den vorderen Buchdeckel*[1]. Vor etwa einem Monat erhielt ich eine seltsame Email von Ed Curtis an der University of Washington. Er bestand darauf, dass ich das Buch *Great American Quilts: Book 5* kaufe, ohne zu sagen, warum. Es ist vielleicht überflüssig zuzugeben, dass ich noch nicht besonders viele Quilts[2] hergestellt habe. Auf Seite 131 dieses Buches fand ich einen erstaunlichen Quilt, hergestellt von Chris Curtis. Sie hatte die erste Ausgabe dieses Buches gesehen, auf dessen Einband geneigte Häuser zu sehen waren. Sie illustrieren, was lineare Transformationen bewirken können, siehe Abschnitt 7.1. Chris

[1] Anm. d. Übers.: Dies bezieht sich auf die zweite amerikanische Ausgabe. Der Bucheinband ist im Internet abgebildet, zum Beispiel auf der Homepage des Autors.

[2] Anm. d. Übers.: Eine Art Flickendecke; bei der Verwendung des Wortes so wie hier wird allerdings mehr Gewicht auf dessen künstlerische Gestaltung gelegt, als man es mit dem deutschen Wort ausdrücken könnte.

Curtis mochte diese Häuser, und sie machte sie schön. Möglicherweise sind sie jetzt nichtlinear — aber das ist Kunst.

Ich bin dankbar dafür, dass Oxmoor House der Verwendung des Quilts auf diesem Buch zugestimmt hat. Die Farbe wurde einhellig von zwei Personen ausgewählt. Ich bin glücklich, Tracy Baldwin für die Gestaltung ihres dritten Einbands für Wellesley-Cambridge Press danken zu können.

Ich möchte dieses Buch meinen Enkeln widmen. Es ist mir eine Freude, die Namen derer zu nennen, die ich bislang kenne: Roger, Sophie, Kathryn, Alexander, Scott, Jack, William und Caroline. Ich hoffe, dass Ihr alle eines Tages diesen Kurs über lineare Algebra besuchen werdet. *Bitte besteht ihn, wie auch immer.* Der Autor ist stolz auf Euch.

Februar 2003 Gilbert Strang

Inhaltsverzeichnis