Algorithmische Mathematik

Helmut Harbrecht · Michael Multerer

Algorithmische Mathematik

Graphen, Numerik und Probabilistik

Springer Spektrum

Helmut Harbrecht
Departement Mathematik & Informatik
Universität Basel
Basel, Schweiz

Michael Multerer
Institute of Computational Science
Universita della Svizzera Italiana
Lugano, Schweiz

ISBN 978-3-642-41951-5 ISBN 978-3-642-41952-2 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-642-41952-2

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Planung/Lektorat: Annika Denkert
Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

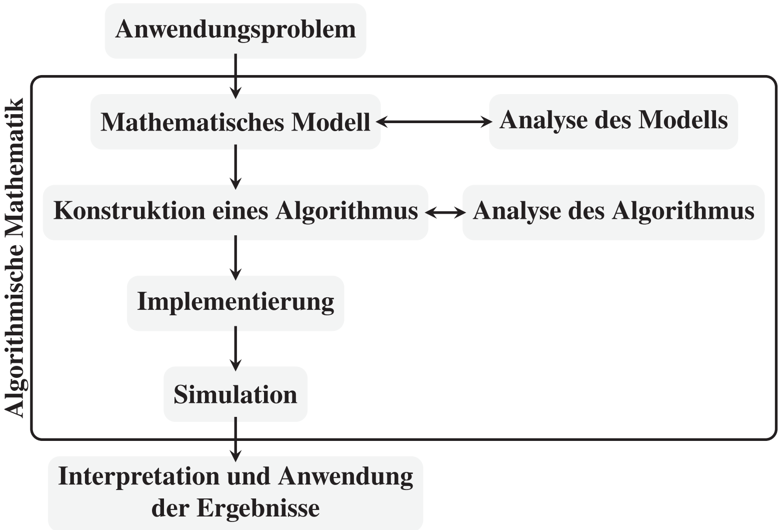
Unseren Familien

Vorwort

Gegenstand der Algorithmischen Mathematik ist die Konstruktion und Analyse effizienter Algorithmen zur Lösung mathematischer Problemstellungen mit Hilfe des Computers. Sie ist damit im Bereich der Angewandten Mathematik anzusiedeln.

Konkrete Problemstellungen ergeben sich oft aus technischen Anwendungen, aus den Naturwissenschaften oder aus den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften. Der typische Verfahrensablauf zur Lösung eines gegebenen Problems ist dabei immer sehr ähnlich und lässt sich folgendermaßen skizzieren:

Ausgehend von einem *Anwendungsproblem* wird ein *mathematisches Modell* entwickelt. Dieses Modell ist im Allgemeinen zu umfangreich, um es mit Stift und Papier behandeln zu können. In diesem Fall muss ein Computer zur numerischen Simulation des Modells herangezogen werden. Wie in der folgenden Abbildung dargestellt, ist dies die Domäne der Algorithmischen Mathematik.



Ist ein passendes mathematisches Modell entwickelt, so wird dieses zunächst analysiert. Basierend auf dieser Analyse lässt sich dann ein entsprechender *Algorithmus* konstruieren, um das Modell mit Hilfe eines Computers zu lösen. Dieser Algorithmus muss ebenfalls analysiert werden, um garantieren zu können, dass er korrekt arbeitet und zuverlässige Ergebnisse liefert. Wer möchte schon in ein Flugzeug steigen, dessen Flugtauglichkeit nur mit einem unzuverlässigen Algorithmus nachgewiesen wurde? Ist ein geeigneter Algorithmus gefunden, wird er am Computer *implementiert,* bevor das Anwendungsproblem schließlich numerisch *simuliert* werden kann. Die *Interpretation und Anwendung der Simulationsergebnisse* ist dann den jeweiligen Spezialisten überlassen.

Die Idee zu diesem Buch geht auf die Vorlesung *Algorithmische Mathematik* zurück, welche die Studierenden des Fachs Mathematik während des ersten Studienjahrs in die Angewandte Mathematik einführt. Sie findet an der Universität Bonn gleichberechtigt zur Analysis und zur Linearen Algebra als vierstündiger Jahreskurs statt. Der erste Autor dieses Buchs hat sie im Wintersemester 2007/2008 und im Sommersemester 2008 zum ersten Mal im dort neu eingeführten Bachelorstudiengang Mathematik gelesen. Der Zweitautor, damals noch selbst Student, hat sie tutoriert.

Ziel dieses Buchs ist es, Studierenden der Mathematik einen Einblick in unterschiedliche Gebiete der Angewandten Mathematik und in deren algorithmische Aspekte zu geben. Namentlich sind dies

- Graphentheorie,
- Numerik und
- Wahrscheinlichkeitstheorie.

Die einschlägige Lehrbuchliteratur befasst sich zumeist jeweils nur mit einem dieser Gebiete. Im Gegensatz dazu bemüht sich das vorliegende Buch um eine ganzheitliche Darstellung von Graphentheorie, Numerik und Wahrscheinlichkeitstheorie und möchte so ihre Gemeinsamkeiten und ihr Zusammenspiel herausarbeiten. Darüber hinaus ist es allerdings möglich, ausgewählte Kapitel losgelöst vom Rest des Buchs zu lesen. So folgen die Vorlesungen der beiden Autoren zur Numerischen Mathematik und zur Stochastik der Darstellung in diesem Buch. Obwohl die Curricula in Basel und Lugano eine Trennung dieser Vorlesungen vorsehen, sind die Autoren ausdrücklich der Überzeugung, dass gerade die Verschmelzung der unterschiedlichen Gebiete der Angewandten Mathematik zu einer modernen Ausbildung der Mathematik gehört. Es ist heutzutage unerlässlich, dass ein Numeriker ein grundlegendes Wissen über diskrete Algorithmen besitzt, wohingegen ein Stochastiker etwas von numerischer Simulation verstehen muss.

Beide Autoren sind keine Männer der großen Worte und haben sich deshalb dazu entschlossen, keine ausschweifenden Einführungen oder Erklärungen zu den jeweiligen Inhalten zu geben. Vielmehr bevorzugen sie eine knappe, auf das wesentlich beschränkte Darstellung, welche recht nahe am Inhalt einer Vorlesung ist. Insbesondere werden die ausgewählten Themen in diesem Buch bewusst nicht in der größtmöglichen Tiefe und Allgemeinheit behandelt. Ansonsten wäre dieses Buch wohl auch doppelt so dick geworden und hätte Studierende eher abgeschreckt. Dieses Buch will vielmehr einen breiten Überblick über die Angewandte Mathematik bieten. Eine Vertiefung in einzelne Themen ist zu einem späteren Zeitpunkt immer möglich und gegebenenfalls auch notwendig.

Die Entstehung dieses Buchs wäre nicht möglich gewesen ohne die exzellente Vorarbeit anderer Autoren, speziell im Hinblick auf die hier dargebotene gebietsübergreifende Fülle des Stoffs. Die Autoren wollen daher dem Leser die verwendeten Quellen offenlegen. So richten sich Aufbau und Darstellung von Kap. 1 über Zahlendarstellungen im Computer nach [Möh04]. Kap. 2 zur Fehleranalyse lehnt sich an [HB09, BM04] an. Die Sortierverfahren in Kap. 3 beruhen auf [Bai04, Blu04, CLRS09]. Die Graphentheorie aus den Kap. 4 und 5 folgt in weiten Teilen der Bonner Schule. Als Quellen sind hier [Bai04, Blu04, KV12] zu nennen. Kap. 6 kombiniert die numerische lineare Algebra mit der Graphentheorie. Eingeflossen sind hierin [KG11, Saa03, Sto05], aber auch [BR91] für den Abschnitt über irreduzible Matrizen. Das Lösen von linearen Gleichungssystemen ist Gegenstand von Kap. 7, welches sich in der Darstellung an [GV13, Sto05] orientiert. Die Matrixapproximationsverfahren in Kap. 8 stammen aus der Originalliteratur. Namentlich sind dies [Beb00] zur adaptiven Kreuzapproximation und [HPS12] zur pivotisierten Cholesky-Zerlegung. Ebenso benutzt Kap. 9 über graphenbasierte Löser die ursprünglichen Zeitschriftenartikel [Geo73, RTL76]. Kap. 10 zur Dreitermrekursion verwendet [DH19, HB09]. Die anschließenden vier Kapitel zur Wahrscheinlichkeitstheorie sind wesentlich von [Hof00] beeinflusst, aber auch [Kre05] ist an einigen Stellen eingegangen. Bei der Präsentation der Markov-Ketten in Kap. 16 lehnen sich die Autoren an [Häg02] an. Die Polynominterpolation in Kap. 17 basiert auf [HB09, Sto05], während die trigonometrische Interpolation in Kap. 18 und die Spline-Interpolation in Kap. 19 die Göttinger Schule widerspiegeln, vergleiche [Kre98, SW05]. Kap. 20 über Multilevelbasen findet man in dieser Form nirgendwo, gleiches gilt für die adaptive Quadratur und die Dünngitter-Quadratur in Kap. 21. Die klassischen Quadraturformeln und die letzten beiden Kapitel über lineare Ausgleichsprobleme und iterative Lösungsverfahren orientieren sich schließlich an den Ausführungen in [HB09, Sto05].

Die Autoren bedanken sich herzlich bei (in alphabetischer Reihenfolge) Rahel Brügger, Jürgen Dölz und Marc Schmidlin für das Korrekturlesen. Ferner bedankt sich vor allem der erste Autor für die ewige Geduld, die ihm der Springer-Verlag entgegengebracht hat. Das Buch war eigentlich schon für das Jahr 2010 geplant, auch ein Vertrag war bereits aufgesetzt. Weil aber durch den Weggang aus Bonn Inhalt und Stoff der Algorithmischen Mathematik in dieser Form nicht mehr den zu haltenden Lehrveranstaltungen entsprach, vergingen etliche Jahre bis eine klassische Stochastik, Numerik und Graphentheorie gelesen werden konnten, um die Inhalte abzurunden.

Die Autoren hoffen, mit diesen Ausführungen den Inhalt dieses neuartigen Lehrbuchs hinreichend motiviert zu haben. Möge der Leser so viel Spaß mit dem Stoff haben, wie die beiden Autoren!

Basel — H. Harbrecht
Lugano — M. Multerer
im Juni 2020

Inhaltsverzeichnis