

# Lecture Notes in Mathematics

1901

**Editors:**

J.-M. Morel, Cachan

F. Takens, Groningen

B. Teissier, Paris

Olivier Wittenberg

# Intersections de deux quadriques et pinceaux de courbes de genre 1

Intersections of two quadrics  
and pencils of curves of genus 1

Author

Olivier Wittenberg  
Department of Mathematics, MS 136  
Rice University  
6100 S. Main Street  
Houston, TX 77251-1892  
USA

*e-mail: olivier.wittenberg@rice.edu;  
olivier.wittenberg@normalesup.org*

Library of Congress Control Number: 2006939005

Mathematics Subject Classification (2000): Primary: 11G35; Secondary: 14J20, 14J27, 14J26, 11D09, 11D25, 14G05, 14G25, 14D10

ISSN print edition: 0075-8434

ISSN electronic edition: 1617-9692

ISBN-10 3-540-69137-5 Springer Berlin Heidelberg New York

ISBN-13 978-3-540-69137-2 Springer Berlin Heidelberg New York

DOI 10.1007/3-540-69137-5

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically the rights of translation, reprinting, reuse of illustrations, recitation, broadcasting, reproduction on microfilm or in any other way, and storage in data banks. Duplication of this publication or parts thereof is permitted only under the provisions of the German Copyright Law of September 9, 1965, in its current version, and permission for use must always be obtained from Springer. Violations are liable for prosecution under the German Copyright Law.

Springer is a part of Springer Science+Business Media  
springer.com

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007

The use of general descriptive names, registered names, trademarks, etc. in this publication does not imply, even in the absence of a specific statement, that such names are exempt from the relevant protective laws and regulations and therefore free for general use.

Typesetting by the author and SPi using a Springer L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X macro package

Cover design: WMXDesign GmbH, Heidelberg

Printed on acid-free paper SPIN: 11961260 VA41/3100/SPi 5 4 3 2 1 0

## Note to the English reader

In an effort to make the contents of this French-language volume accessible to a wider audience, we have supplemented the original text with an extensive introduction written in English. The idea was the Springer Lecture Notes in Mathematics series editors', and I am grateful to them for suggesting it. As a side effect, this monograph contains two introductions. They are not translations of each other; rather, they are complementary, in spite of their more than substantial overlap. The emphasis in the English-language introduction is on the context, while the French-language introduction more systematically describes precise results and refers to the existing literature.

## Remerciements

Le contenu de cet ouvrage reprend celui de ma thèse de doctorat de l'Université Paris-Sud, et j'ai plaisir à remercier encore une fois tous ceux qui ont contribué d'une manière ou d'une autre à son élaboration. Ma gratitude va en premier lieu à Jean-Louis Colliot-Thélène, qui a dirigé mon travail et a toujours trouvé le temps de répondre à mes questions. Je suis reconnaissant envers Peter Swinnerton-Dyer pour ses encouragements et pour les nombreux échanges mathématiques que nous avons eus. L'influence sur le contenu de cet ouvrage des idées qu'il a introduites et publiées depuis une douzaine d'années saurait difficilement être surestimée. Je tiens enfin à remercier David Harari de m'avoir transmis [34], sur lequel les résultats du troisième chapitre reposent, et Per Salberger, Jean-Pierre Serre et Alexei Skorobogatov pour l'intérêt qu'ils portent à ce travail.

Houston, octobre 2006

*Olivier Wittenberg*

---

# Table des matières

<b>General introduction</b> .....	1
<b>Introduction générale</b> .....	7
<b>Conventions</b> .....	15
<b>Chapitre 1. Arithmétique des pinceaux semi-stables de courbes de genre 1 (première partie)</b> .....	19
1.1 Introduction .....	19
1.2 Hypothèses et notations .....	22
1.3 Explicitation de la condition (D) .....	27
1.4 Symétrisation du calcul de Selmer .....	34
1.5 Preuve du théorème 1.4 .....	37
1.5.1 Triplets préadmissibles, admissibles .....	38
1.5.2 Calcul symétrique des groupes de Selmer en famille ....	40
1.5.3 Admissibilité et existence de points adéliques .....	48
1.5.4 Fin de la preuve .....	50
1.6 Condition (D), groupe $\mathcal{D}$ et groupe de Brauer .....	57
1.7 Applications à l'existence de points rationnels .....	61
1.7.1 Obstruction de Brauer-Manin .....	61
1.7.2 Surfaces quartiques diagonales .....	63
1.8 Secondes descentes et approximation faible .....	65
1.9 Application aux courbes elliptiques de rang élevé .....	70
<b>Chapitre 2. Arithmétique des pinceaux semi-stables de courbes de genre 1 (seconde partie)</b> .....	73
2.1 Introduction .....	73
2.2 Énoncé du résultat principal et applications .....	75
2.3 Preuve du théorème 2.2 .....	84
2.3.1 Couples admissibles, préadmissibles .....	85
2.3.2 Prélude à l'étude des groupes de Selmer en famille ....	86

2.3.3	Dualité locale pour les courbes $\mathcal{E}'_x, \mathcal{E}''_x$ .....	89
2.3.4	Réciprocités et existence de points locaux .....	93
2.3.5	Finitude de $\mathfrak{S}'_{D_0}$ et $\mathfrak{S}''_{D_0}$ .....	96
2.3.6	Fin de la preuve .....	97
<b>Chapitre 3. Principe de Hasse pour les surfaces de del Pezzo</b>		
	<b>de degré 4</b> .....	109
3.1	Introduction .....	109
3.2	Obstruction de Brauer-Manin verticale et points adéliques dans les fibres d'un morphisme vers $\mathbf{P}^n$ .....	116
3.3	Généralités sur les pinceaux de quadriques dans $\mathbf{P}^n$ .....	136
3.4	Surfaces de del Pezzo de degré 4 .....	140
3.4.1	Notations, énoncés des résultats .....	140
3.4.2	Groupe de Brauer des surfaces de del Pezzo de degré 4 ..	143
3.4.3	La construction de Swinnerton-Dyer .....	147
3.4.4	Calculs explicites .....	159
3.4.5	Spécialisation de la condition (D) .....	166
3.4.6	Vérification de la condition (D) générique .....	180
3.4.7	Preuve du théorème 3.36 .....	189
3.4.8	Groupe de Brauer et obstruction à la méthode .....	193
3.5	Intersections de deux quadriques dans $\mathbf{P}^n$ pour $n \geq 5$ .....	195
3.5.1	Un résultat de monodromie .....	195
3.5.2	Preuve du théorème 3.3 .....	199
<b>Annexe</b> .....		201
<b>Bibliographie</b> .....		209
<b>Index des notations</b> .....		215
<b>Index terminologique</b> .....		217