This series aims at speedy, informal, and high level information on new developments in mathematical research and teaching. Considered for publication are:

1. Preliminary drafts of original papers and monographs

2. Special lectures on a new field, or a classical field from a new point of view

3. Seminar reports

4. Reports from meetings

Out of print manuscripts satisfying the above characterization may also be considered, if they continue to be in demand.

The timeliness of a manuscript is more important than its form, which may be unfinished and preliminary. In certain instances, therefore, proofs may only be outlined, or results may be presented which have been or will also be published elsewhere.

The publication of the "*Lecture Notes*" Series is intended as a service, in that a commercial publisher, Springer-Verlag, makes house publications of mathematical institutes available to mathematicians on an international scale. By advertising them in scientific journals, listing them in catalogs, further by copyrighting and by sending out review copies, an adequate documentation in scientific libraries is made possible.

Manuscripts
Since manuscripts will be reproduced photomechanically, they must be written in clean typewriting. Handwritten formulae are to be filled in with indelible black or red ink. Any corrections should be typed on a separate sheet in the same size and spacing as the manuscript. All corresponding numerals in the text and on the correction sheet should be marked in pencil. Springer-Verlag will then take care of inserting the corrections in their proper places. Should a manuscript or parts thereof have to be retyped, an appropriate indemnification will be paid to the author upon publication of his volume. The authors receive 25 free copies.

Manuscripts in English, German or French should be sent to Prof. Dr. A. Dold, Mathematisches Institut der Universität Heidelberg, Tiergartenstraße or Prof. Dr. B. Eckmann, Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich.

Die „*Lecture Notes*" sollen rasch und informell, aber auf hohem Niveau, über neue Entwicklungen der mathematischen Forschung und Lehre berichten. Zur Veröffentlichung kommen:

1. Vorläufige Fassungen von Originalarbeiten und Monographien.

2. Spezielle Vorlesungen über ein neues Gebiet oder ein klassisches Gebiet in neuer Betrachtungsweise.

3. Seminarausarbeitungen.

4. Vorträge von Tagungen.

Ferner kommen auch ältere vergriffene spezielle Vorlesungen, Seminare und Berichte in Frage, wenn nach ihnen eine anhaltende Nachfrage besteht.

Die Beiträge dürfen im Interesse einer größeren Aktualität durchaus den Charakter des Unfertigen und Vorläufigen haben. Sie brauchen Beweise unter Umständen nur zu skizzieren und dürfen auch Ergebnisse enthalten, die in ähnlicher Form schon erschienen sind oder später erscheinen sollen.

Die Herausgabe der „*Lecture Notes*" Serie durch den Springer-Verlag stellt eine Dienstleistung an die mathematischen Institute dar, indem der Springer-Verlag für ausreichende Lagerhaltung sorgt und einen großen internationalen Kreis von Interessenten erfassen kann. Durch Anzeigen in Fachzeitschriften, Aufnahme in Kataloge und durch Anmeldung zum Copyright sowie durch die Versendung von Besprechungsexemplaren wird eine lückenlose Dokumentation in den wissenschaftlichen Bibliotheken ermöglicht.

Lecture Notes in Mathematics

A collection of informal reports and seminars
Edited by A. Dold, Heidelberg and B. Eckmann, Zürich

91

N.N. Janenko

Akademie der Wissenschaften der UdSSR
Sibirische Sektion, Rechenzentrum, Nowosibirsk

Die Zwischenschrittmethode zur Lösung mehrdimensionaler Probleme der mathematischen Physik

Übersetzt aus dem Russischen von
K. Roesner, Göttingen

1969

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

ISBN 978-3-540-04610-3 ISBN 978-3-540-36100-8 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-540-36100-8

Titel der russischen Originalausgabe: Metod drobnykh shagov resheniia mnogomernykh zadach matematicheskoi fiziki.
Verlag „Nauka". Sibirische Sektion. Nowosibirsk 1967

Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1969
Library of Congress Catalog Card Number 73- 82431. Title No. 3697

Vorwort

Den Gegenstand des vorliegenden Buches bildet die „Zwischenschrittmethode", deren Entdeckung einige Jahre zurückliegt und die eine stürmische Entwicklung als Methode zur Konstruktion rationeller Differenzenschemata erfahren hat.

Mit der Zwischenschrittmethode konnte man Aufgaben lösen, für die die gewöhnlichen Differenzenverfahren unbrauchbar waren. Diese stellen nämlich einfache Näherungen dar, bei denen beim Übergang von einem Zeitpunkt zu einem anderen die Stabilitäts- und Approximationsbedingungen simultan erfüllt werden. Das führt auf sehr einfache Formeln. Trotzdem erweist sich ein solches Schema als weniger flexibel und besitzt auch eine kleinere Zahl freier Parameter als die Zwischenschrittmethode, weshalb ein gewöhnliches Differenzenverfahren nicht alle Forderungen erfüllen kann, die ihm auferlegt werden. Im Gegensatz dazu besitzt die Zwischenschrittmethode bei ihrer Anwendung eine Menge Parameter, durch die die Wahl rationeller und genauer Differenzenschemata ermöglicht wird.
Die Zwischenschrittmethode teilt den Übergang von einer Gitterpunktschicht zur nächsten in eine Reihe von Zwischenschritten ein, verlangt dabei aber nicht für jeden Zwischenschritt die notwendige Erfüllung der Approximationseigenschaften der Ausgangsgleichung sowie der Stabilität.

Die Zwischenschrittmethode gibt eine Antwort auf die reale Forderung an die numerische Mathematik, einfache, rationelle Schemata zur Lösung komplizierter, mehrdimensionaler Aufgaben der mathematischen Physik bereitzustellen.

Die ersten Arbeiten auf diesem Gebiet stammen von Peaceman, Rachford und Douglas (1955). Diese Methode wurde dann in den folgenden Arbeiten amerikanischer und sowjetischer Wissenschaftler weiter entwickelt und weiter untersucht: Douglas, Rachford, Baker, Oliphant, K. A. Bagrinowski und S. K. Godunow, E. G. Djakonow, G. I. Martschuk, A. A. Samarski und andere.

Heute ist die Zwischenschrittmethode ein integraler Bestandteil der Konstruktion von Differenzenschemata zur Lösung komplizierter, mehrdimensionaler Aufgaben der mathematischen Physik. Abgesehen davon, daß sich die Zwischenschrittmethode fortgesetzt weiter entwickelt und noch keine abschließende theoretische Begründung erfahren hat, dient sie schon jetzt nicht nur als Hilfsmittel zur Konstruktion optimaler Algorithmen, sondern auch als Hilfsmittel zur theoretischen Untersuchung von Differenzen- und Differentialgleichungen.

Das Buch stützt sich auf einen Vorlesungskurs, den der Verfasser an den staatlichen Universitäten in Swerdlowsk, Nowosibirsk, Tomsk und Alma-Ata seit 1959 gehalten hat und bis heute hält. Das Buch stellt einen Versuch dar, nach Möglichkeit eine zusammenfassende, einheitliche Darstellung zahlreicher Schemata mit Zwischenschritten zu geben und darüber hinaus diejenigen Verfahren zu beschreiben, die man sonst nur in Zeitschriften und Sammelbänden findet.

Der Verfasser war bestrebt, nach Möglichkeit alle diejenigen Arbeiten zu berücksichtigen, die für die Entwicklung der Zwischenschrittmethode von Bedeutung sind. Natürlich wird der Gegenstand auf verschiedene Weisen interpretiert und gibt die persönliche Auffassung des Verfassers wieder. Insbesondere sind in dem Buch nicht die Arbeiten behandelt, die auf den Methoden der apriori-Abschätzungen basieren. Der Verfasser hat sich in der Hauptsache auf die einfachere Methode der harmonischen Analyse der Stabilität beschränkt. Sehr kurz ist auch die Theorie der lokalen Stabilitätskriterien dargestellt. Das Hauptaugenmerk ist auf die Methode zur Konstruktion effektiver Differenzenschemata gerichtet.

In dem Buch sind Überlegungen und Ergebnisse des Verfassers selbst sowie seiner Mitarbeiter verwendet. Dem Verfasser ist es eine besonders angenehme Pflicht, die gemeinsame Arbeit mit einem Kollektiv junger Mathematiker zu erwähnen, die die ersten impliziten Aufspaltungsschmemata zur Lösung verschiedener Aufgaben der mathematischen Physik erarbeitet und in Rechnungen verwendet haben. In erster Linie sind hier zu nennen: N. N. Anutschina, W. A. Jenalski, A. S. Scharikow, A. I. Sujew, A. N. Konowalow, W. J. Njeuwaschajew, J. J. Pogodin, W. A. Sutschkow und W. D. Frolow.

Im Jahre 1962 fand eine Diskussion statt, an der die Wissenschaftler J. G. Djakonow, A. A. Samarski und B. L. Roschdjestwjenski teilnahmen. Diese Aussprache hat zu einem tieferen Verständnis der Bedeutung der Randbedingungen bei der Genauigkeitsabschätzung von Differenzenschemata mit Zwischenschritten beigetragen und auch als Impuls für eine Anzahl weiterer Arbeiten gedient.

Die gemeinsame Arbeit und die zahlreichen Diskussionen mit G. I. Martschuk sowie den Mitarbeitern des Rechenzentrums der sibirischen Sektion der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, J. J. Bojarinzew, G. W. Demidow, W. P. Ilin, B. G. Kusnezow, M. M. Lawrentjew, W. W. Pjenenko und J. N. Watolin,haben zu weiteren Anwendungen der Zwischenschrittmethode und ihrer theoretischen Begründung beigetragen. Bei der Abfassung des Manuskripts stand mir Herr A. N. Waliullin hilfreich zur Seite. Allen diesen Kollegen sagt der Verfasser seinen herzlichen Dank.

Der Verfasser hofft, daß dieses Buch für Wissenschaftler, die sich mit der Berechnung mehrdimensionaler Probleme der Mechanik und Physik befassen, und auch für Studenten höherer Semester an Universitäten eine Hilfe sein wird, soweit sie sich auf die numerische Mathematik spezialisiert haben.

Der Verfasser ist schon im voraus den Lesern des Buches dankbar für Hinweise auf mögliche Fehler und Unzulänglichkeiten.

Nowosibirsk
Akademgorodok
November 1965

I n h a l t s v e r z e i c h n i s