Lecture Notes in Mathematics

A collection of informal reports and seminars
Edited by A. Dold, Heidelberg and B. Eckmann, Zürich

Series: Mathematisches Institut der Universität Erlangen-Nürnberg
Advisers: H. Bauer and K. Jacobs

65

Dietrich Kölzow

Mathematisches Institut der Universität
Erlangen-Nürnberg

Differentiation von Maßen

Habilitationsschrift, Saarbrücken 1967

1968

Springer-Verlag Berlin · Heidelberg · New York

Library of Congress Catalog Card Number 68 - 55621. Printed in Germany. Title No. 3671

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. Willi Rinow,
zum sechzigsten Geburtstag, am 28. Februar 1967, gewidmet.

Einleitung

Die Differentiationstheorie für Maße enthält bekanntlich einen globalen und einen punktualen Zweig. Im globalen Zweig wird die Ableitung durch Integrationsbedingungen, im punktualen Zweig hingegen durch Differentiationsbedingungen bezüglich einer Ableitungsbasis definiert.

Der globale Zweig erfuhr durch die Resultate von SEGAL [23] eine weitgehende Abrundung, indem dieser für die Gültigkeit des Hauptsatzes dieses Zweiges, des Satzes von RADON-NIKODYM, eine Reihe von hinreichenden und notwendigen Bedingungen angab. Im Anschluß hieran brachten ZAANEN [24] und KELLEY [11] weitere Charakterisierungen dieses Satzes, allerdings mit etwas anderen Ableitungsbegriffen.

In dieser Arbeit wird auf zwei der SEGALschen Bedingungen Bezug genommen, nämlich auf eine Endlichkeitsbedingung und auf ein Lokalisationsprinzip.

Ein Maßraum genügt der SEGALschen Endlichkeitsbedingung, wenn er isomorph einem Maßraum ist, der seinerseits direkte Summe von endlichen Maßräumen ist. Hierbei bedeutet Isomorphie von zwei Maßräumen, daß ihre Maßringe, das sind die Restklassenverbände der meßbaren Mengen nach den lokalen Nullmengen, isomorph sind.

Für einen Maßraum gilt das SEGALsche Lokalisationsprinzip, wenn zu jedem bedingten σ-Ideal $\mathfrak{i}$ summierbarer Mengen, grob gesprochen, eine meßbare Approximierende $E_{\mathfrak{i}}$ für die Vereinigung der Mengen aus $\mathfrak{i}$ existiert.

Der punktuale Zweig erhielt durch de POSSEL [20] eine abstrakte, das heißt, von topologischen Begriffen freie Begründung. Diese abstrakte Theorie wurde von HAUPT und PAUC weiterentwickelt (siehe HAUPT-AUMANN-PAUC [8], Bd. III, und die dort angegebene Literatur). Hierbei erwies sich die Frage nach der Existenz einer schwachen oder einer starken VITALIschen Ableitungsbasis als entscheidend für die Anwendbarkeit.

Die de POSSELsche Theorie setzt die totale σ-Endlichkeit des Maßraumes voraus. Der einzige wesentliche Grund hierfür ist der, die Gültigkeit des Satzes von RADON-NIKODYM zu sichern. Die ganze Theorie läßt sich nämlich auch unter der alleinigen Voraussetzung

dieses Satzes durchführen. Hierfür ist es nur nötig, alles lokal, das heißt, mit den lokalen an Stelle der gewöhnlichen Nullmengen zu formulieren.

Aus diesem Grunde wäre es wünschenswert, die Existenz von VITALIschen Ableitungsbasen unter ähnlich allgemeinen Voraussetzungen beweisen zu können, wie solchen, welche für die Gültigkeit des Satzes von RADON-NIKODYM charakteristisch sind, also zum Beispiel unter der SEGALschen Endlichkeitsbedingung.

Die vorhandenen hinreichenden Bedingungen für die Existenz von VITALIschen Ableitungsbasen enthalten alle die totale σ-Endlichkeit und noch zusätzliche Voraussetzungen topologischer oder abstrakter Art (siehe HAUPT-AUMANN-PAUC [8], Bd. III, 9.3.).

In dieser Arbeit wird eine Reihe von hinreichend und notwendigen Bedingungen für die Existenz von VITALIschen Ableitungsbasen angegeben. Unter diesen befindet sich auch eine Endlichkeitsbedingung, welche die Existenz einer sogenannten Zerlegung fordert, und schon in [13] untersucht wurde *). Sie besagt, daß der Maßraum bis auf eine lokale Nullmenge direkte Summe von endlichen Maßräumen sei, ist also schwächer als die totale σ-Endlichkeit und impliziert andererseits die SEGALsche Endlichkeitsbedingung. Daher folgt aus der Existenz einer VITALIschen Ableitungsbasis die Gültigkeit des Satzes von RADON-NIKODYM.

Es entsteht also die Frage, welche weitergehenden Konsequenzen die Existenz von VITALIschen Ableitungsbasen für die globale Theorie hat. Diese Frage wird in der Form beantwortet, daß für den Satz von RADON-NIKODYM wie auch für das SEGALsche Lokalisationsprinzip Verschärfungen angegeben werden, welche zur Existenz von VITALIschen Ableitungsbasen äquivalent sind.

Die Verschärfung des SEGALschen Lokalisationsprinzips besteht in der Monotoniebedingung, daß eine solche Lokalisation $\iota \to E_\iota$ existiere, wofür gilt

$$E_{\iota_1} \subseteq E_{\iota_2}, \text{ wenn } \iota_1 \subseteq \iota_2.$$

Es läßt sich zeigen, daß diese Verschärfung der Existenz einer Zerlegung äquivalent ist.

*) DINCULEANU [6] nennt sie "direct sum property".

Für den Satz von RADON-NIKODYM werden zwei Verschärfungen angegeben: Die eine besteht ebenfalls in einer Monotoniebedingung: Zu jedem stetigen Maß ψ existiere eine solche Ableitung f_ψ, daß gilt

$$f_{\psi_1} \leq f_{\psi_2}, \text{ wenn } \psi_1 \leq \psi_2.$$

Diese Bedingung erweist sich als äquivalent mit der monotonen Verschärfung des SEGALschen Lokalisationsprinzips, also auch mit der Existenz einer Zerlegung. Die andere Verschärfung besteht in folgender Linearitätsbedingung: Zu jedem stetigen Maß ψ existiere eine solche Ableitung f_ψ, daß gilt

$$f_\psi = \alpha_1 f_{\psi_1} + \alpha_2 f_{\psi_2}, \text{ wenn } \psi = \alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2, \text{ wobei } \alpha_1, \alpha_2 \in R^+.$$

Eine solche lineare Differentiation $\psi \to f_\psi$ ist auch monoton. Aus der Existenz einer monotonen Differentiation folgt aber auch die Existenz einer linearen Differentiation (die jedoch mit der gegebenen monotonen nicht identisch zu sein braucht). Also ist auch die lineare Verschärfung des Satzes von RADON-NIKODYM mit allen vorher genannten Bedingungen äquivalent.

Auch für den Satz von RIESZ ergeben die Monotonie-, die Linearitäts- und eine Isometriebedingung den obigen Aussagen äquivalente Verschärfungen. Für den Satz von DUNFORD-PETTIS gilt Entsprechendes ebenfalls mit der Linearitäts- und der bekannten Isometriebedingung.

Das wichtigste Hilfsmittel für den Nachweis der Äquivalenz der genannten Aussagen ist, neben dem SEGALschen Lokalisationsprinzip, das von NEUMANNsche Lifting. Hierbei handelt es sich, kategorisch ausgedrückt, um einen Schnitt des kanonischen Homomorphismus der BOOLEschen Algebra $\mathfrak{m}$ der meßbaren Mengen eines Maßraumes in die BOOLEsche Restklassenalgebra von $\mathfrak{m}$ nach dem Ideal der lokalen Nullmengen des Maßraumes. Von NEUMANN [18] bewies die Existenz eines solchen Liftings zunächst für das LEBESGUEsche Maß auf dem Einheitsintervall der reellen Zahlen. MAHARAM [16] bewies dann die Existenz eines Liftings für jeden vollständigen endlichen Maßraum. IONESCU-TULCEA [9] gaben hierfür einen neuen Beweis und folgerten die Existenz eines Liftings für jedes reguläre BORELsche Maß auf einem lokal kompakten Raum, unter Benutzung der Zerlegungseigenschaft dieser Maße. Es läßt

sich nun zeigen (RYAN [21]), daß ein Maßraum (welcher gleich seiner CARATHÉODORYschen Erweiterung ist) genau dann ein Lifting besitzt, wenn er eine Zerlegung hat.

Eine einfache Anwendung des Liftings auf die Differentiation wird ermöglicht durch den Übergang zu einem Lifting l auf dem System der meßbaren Funktionen: Ist nämlich $\varphi \to f_\varphi$ eine beliebige Differentiation, so wird durch

$$\varphi \to l(f_\varphi)$$

eine lineare und monotone Differentiation definiert. Diese Überlegung läßt sich noch präzisieren: Die monotone Verschärfung des Satzes von RADON-NIKODYM gilt genau dann, wenn der Satz von RADON-NIKODYM schlechthin gilt und ein sogenanntes monotones Lifting existiert. Zur Unterscheidung vom monotonen Lifting wird das von NEUMANNsche Lifting in dieser Arbeit lineares Lifting genannt. Für die Gültigkeit der linearen Verschärfung des Satzes von RADON-NIKODYM ist die Existenz eines (linearen) Liftings allein schon hinreichend und notwendig; denn aus der Existenz eines Liftings folgt die Zerlegungseigenschaft und hieraus die Gültigkeit des Satzes von RADON-NIKODYM.

Die erste Anwendung des von NEUMANNschen Liftings auf die Differentiationstheorie machte DIEUDONNÉ [4], [5] bei seiner Untersuchung des Satzes von DUNFORD-PETTIS, indem er die Voraussetzung der Separabilität des zugrundegelegten BANACHraumes durch die Voraussetzung eines Liftings in $\mathcal{L}^\infty$ ersetzte und zeigte, daß die Existenz eines solchen Liftings mit der Gültigkeit des durch die Isometriebedingung verschärften Satzes von DUNFORD-PETTIS sogar äquivalent ist (vergleiche BOURBAKI [3], chap. VI, sowie IONESCU-TULCEA [9] und [10]). Letztere zeigten, daß im Falle des BOURBAKI-Integrals über einem RADONschen Maße stets ein solches Lifting existiert, hier also der Satz von DUNFORD-PETTIS mit der Isometriebedingung gilt.

Den ersten Hinweis auf einen Zusammenhang zwischen Liftings und VITALIschen Ableitungsbasen liefert bereits der Beweis des von NEUMANNschen Liftingsatzes. Dort wird nämlich wesentlich vom Dichtesatz für die klassische Ableitungsbasis der Intervalle Gebrauch gemacht. Nach de POSSEL gilt aber für eine Ableitungsbasis der Dichtesatz (lokal) genau dann, wenn diese eine schwache

VITALIsche Ableitungsbasis ist. Diese Tatsache ergibt, in Verbindung mit einem einschlägigen Liftingsatz für BOOLEsche Algebren, den von NEUMANN und STONE [19] bewiesen, daß die Existenz einer schwachen VITALIschen Ableitungsbasis allein schon hinreichend für die Existenz eines Liftings ist.

Hiervon wird auch die Umkehrung bewiesen: Aus der Existenz eines Liftings folgt die Existenz sogar einer starken VITALIschen Ableitungsbasis.

Also sind für einen Maßraum die Existenz einer Zerlegung, die Existenz eines Liftings, die Existenz einer schwachen oder einer starken VITALIschen Ableitungsbasis und die Gültigkeit der genannten Verschärfungen des SEGALschen Lokalisationsprinzips sowie der Sätze von RADON-NIKODYM, DUNFORD-PETTIS und RIESZ äquivalente Aussagen.

Für die Konstruktion einer starken VITALIschen Ableitungsbasis mit Hilfe eines Liftings wird ein Satz von MAHARAM [16] für liftingsinvariante meßbare Mengen benutzt, welcher besagt, daß die Vereinigung beliebig vieler solcher Mengen meßbar ist. Dieser Satz wird zunächst zum Beweis eines Überdeckungssatzes vom LINDELÖFschen Typ für jene Mengen verwendet. Hierfür diente ein entsprechender Überdeckungssatz für das (abstrakte) BOURBAKI-Integral als Vorbild, den der Verfasser in [14] bewies.

Der Satz von MAHARAM und der Überdeckungssatz ermöglichen außerdem einen anschaulichen Beweis des SEGALschen Lokalisationsprinzips mit Hilfe eines Liftings: Bezeichnet L die durch ein Lifting gegebene Abbildung des Systems der meßbaren Mengen in sich, so sei jedem bedingten σ-Ideal $\mathfrak{k}$ summierbarer Mengen als Lokalisierende die Menge

$$E_{\mathfrak{k}} = \cup \{ L(I) : I \in \mathfrak{k} \}$$

zugeordnet. Hierdurch wird eine Lokalisation definiert, die auch monoton ist. In dieser Form findet das SEGALsche Lokalisationsprinzip übrigens implizite auch Anwendung in dem Existenzbeweis von IONESCU-TULCEA [9] für das Lifting.

Der Satz von MAHARAM wurde von IONESCU-TULCEA [10] auf Funktionen erweitert und dadurch ergänzt, daß sie die Stetigkeit des wesentlichen Integrals für gerichtete Familien liftinginvarianter meßbarer Funktionen nachwiesen.

Diese Resultate von MAHARAM und IONESCU-TULCEA sowie die geschilderte Lokalisation ermöglichen es schließlich, mit Hilfe eines Liftings eine einfache Konstruktion für die Ableitung endlicher stetiger Maße anzugeben, welche der Monotonie- und der Linearitätsbedingung genügt. Die Konstruktion ist der von LEPTIN [15] verwandt.

Im zweiten Teil der Arbeit wird der Begriff der Ableitung näher untersucht. Dem ersten Teil liegt, in Übereinstimmung mit SEGAL [23], kurz gesagt, folgender zugrunde: Eine meßbare Funktion $f \geq 0$ heißt eine Ableitung des Maßes ψ nach dem Maß φ, wenn

$$\text{(I)} \qquad \psi(M) = \overline{\int_M} f \, d\varphi$$

für jede φ-summierbare Menge M gilt**). Wenn (I) sogar für jede meßbare Menge M gilt, so wird f eine reguläre Ableitung von ψ nach φ genannt. Das bekannte Beispiel von SAKS [22] zeigt, daß nicht jede Ableitung regulär ist. Eine reguläre Ableitung f von ψ nach φ genügt den beiden Forderungen:

(II) Für jede meßbare Menge M folgt aus der φ-Summierbarkeit von $f\chi_M$, daß M ψ-summierbar ist und (I) gilt.

(III) Für jede ψ-summierbare Menge M ist $f\chi_M$ φ-summierbar, und (I) gilt.

Für eine Ableitung f von ψ nach φ lassen sich diese beiden Bedingungen wie folgt charakterisieren: Für Bedingung (II) ist hinreichend und notwendig, daß f bis auf eine ψ-Nullmenge positiv ist. Für Bedingung (III) erweist sich folgende Dichtheitsrelation als charakteristisch:

> Zu jeder ψ-summierbaren Menge S gibt es abzählbar viele φ-summierbare Mengen S_n, so daß $S - \bigcup S_n$ eine ψ-Nullmenge ist und f hierauf verschwindet.

Der Regularität sowie jeder der Bedingungen (II) und (III) entspricht wieder eine Verschärfung des Satzes von RADON-NIKODYM, was in dieser Arbeit aber nicht weiter verfolgt wird.

Im dritten Teil der Arbeit werden die Spezialfälle des STONE-Integrals, des BOURBAKI-Integrals, des wesentlichen Maßes und des zu einem STONE- oder zu einem BOURBAKI-Integral gehörigen wesentlichen Integrals untersucht.

**) Hierbei bedeute $\overline{\int}$ das obere Integral. Die genaue Definition der Ableitung wird in § 1 gegeben.

Bei dem STONE-Integral und dem BOURBAKI-Integral bezieht sich der Begriff der Ableitung stets auf Funktionale Φ und Ψ auf einem gemeinsamen Definitionsbereich $\mathfrak{B}$ von Funktionen, dessen Vervollständigung bezüglich der Φ- oder der Ψ-Halbnorm die Φ- beziehungsweise die Ψ-summierbaren Funktionen liefert.

Diese Besonderheit hat zur Folge, daß im Falle des STONE-Integrals jede Ableitung f von Ψ nach Φ die obige Dichtheitsrelation und deshalb die (III) entsprechende Bedingung erfüllt. Im Falle des BOURBAKI-Integrals ist, wegen der Verwendung von gerichteten Familien statt gewöhnlicher Folgen bei der Vervollständigung von $\mathfrak{B}$, mit dem entsprechenden Sachverhalt nicht zu rechnen.

Dieser Unterschied zwischen STONE- und BOURBAKI-Integral ist aber insofern nicht wesentlich, als er für die zu den beiden gehörigen wesentlichen Integrale nicht vorhanden ist. Vielmehr erweist sich hierfür jede Ableitung sogar als regulär.

Dafür zeigt sich hier aber ein anderer Unterschied: Im Falle des STONE-Integrals ist eine Funktion f eine Ableitung von Ψ nach Φ genau dann, wenn f eine Ableitung des zu Ψ gehörigen wesentlichen Integrals nach dem zu Φ gehörigen wesentlichen Integral ist. Entsprechendes ist im Falle des BOURBAKI-Integrals nicht zu erwarten.

Die Eigentümlichkeit des Ableitungsbegriffs bei dem STONE- und dem BOURBAKI-Integral wirft weiter die Frage nach dem Zusammenhang mit den zugehörigen Maßen auf.

Zu dem Funktional Φ, nach welchem differenziert wird, gehört ein eindeutig bestimmtes Maß φ, so daß die Integralerweiterung von Φ mit der von φ übereinstimmt.

Nun läßt sich in beiden Fällen zeigen, daß für Φ der Satz von RADON-NIKODYM (monoton und linear) genau dann gilt, wenn dasselbe für φ zutrifft. Für das BOURBAKI-Integral ist hierbei der Schluß von φ auf Φ wichtig ***). Denn in diesem Falle besitzt φ eine Zerlegung. Also gilt nach dem ersten Teil der Arbeit für φ der Satz von RADON-NIKODYM monoton und linear und somit für Φ ebenfalls.

***) Diese Richtung wird auch nur bewiesen. Die andere Richtung folgt mit Hilfe des in [12] durchgeführten Überganges von dem Ausgangssystem $\mathfrak{B}$ zu einem äquivalenten System $\overline{\mathfrak{B}}$, so daß für jedes φ-stetige Maß ψ jede Funktion aus $\overline{\mathfrak{B}}$ ψ-summierbar und das ψ-Integral stetig im Sinne von BOURBAKI auf $\overline{\mathfrak{B}}$ ist.

Bei dem wesentlichen Integral, welches zu einem BOURBAKI-Integral gehört, liegen die Verhältnisse ähnlich, weshalb auch hierfür der Satz von RADON-NIKODYM monoton und linear gilt. Hierbei wird benutzt, daß mit einem Maß auch stets das zugehörige wesentliche Maß eine Zerlegung besitzt.

Im Gegensatz zum BOURBAKI-Integral besitzt das zu einem STONE-Integral gehörige Maß im allgemeinen keine Zerlegung. Auch gilt hierfür der Satz von RADON-NIKODYM nicht allgemein.

Herrn Professor H. KÖNIG dankt der Verfasser herzlich für sein anhaltendes förderndes Interesse an dieser Arbeit.

Ebenso möchte der Verfasser Herrn Professor O. HAUPT, Herrn Professor H. BAUER und Herrn Professor D. PUPPE für die Aufmerksamkeit danken, welche sie diesen Untersuchungen entgegenbrachten.

INHALTSVERZEICHNIS