Lecture Notes in Mathematics

A collection of informal reports and seminars
Edited by A. Dold, Heidelberg and B. Eckmann, Zürich

64

Hubert Berens

Rhein.-Westf. Technische Hochschule Aachen
Johannes-Gutenberg-Universität Mainz

Interpolationsmethoden zur Behandlung von Approximationsprozessen auf Banachräumen

1968

Springer-Verlag Berlin · Heidelberg · New York

Library of Congress Catalog Card Number 68-55374 Printed in Germany. Title No. 3670

VORWORT

In der klassischen Theorie der besten Approximation von stetigen periodischen Funktionen durch trigonometrische Polynome spielen die "direkten Sätze" von D. Jackson und die "Umkehrsätze" von S. Bernstein eine fundamentale Rolle. Ein Hauptanliegen der vorliegenden Abhandlung ist es, sich von den trigonometrischen Polynomen bester Approximation loszulösen und entsprechende Sätze über Folgen von beschränkten linearen Transformationen, wie z. B. Summationsprozessen von Fourierreihen, zu beweisen, die gewisse Bedingungen erfüllen. Diese Bedingungen sollen sicherstellen, daß das Phänomen der Saturation, welches bei allen gängigen Prozessen gegeben ist, auftritt. Die Behandlung selbst erfolgt im abstrakten Rahmen der Theorie der Banachräume.

Damit gelangt der Verfasser zu einem zentralen Problem, das letztlich darin besteht, den fundamentalen Satz von Banach-Steinhaus über Folgen von beschränkten linearen Operatoren, und zwar die Aussage über notwendige und hinreichende Bedingungen für die Konvergenz dieser Folgen gegen den Identitätsoperator, so zu verschärfen, daß er eine Aussage über die Konvergenzgeschwindigkeit liefert. Dieses grundlegende Problem ist schon seit mehreren Jahren in der Diskussion und wird vom Verfasser dahingehend behandelt, daß er in Banachunterräumen arbeitet, die sich als Interpolationsräume charakterisieren lassen.

Bisherige Untersuchungen solcher Probleme haben sich besonders auf Halbgruppen von beschränkten linearen Operatoren konzentriert. In einer kürzlich erschienen Monographie in den "Grundlehren der mathematischen Wissenschaften" haben H. Berens und P. L. Butzer sowohl direkte als auch inverse Approximationssätze für diese Familien von Operatoren gegeben, die sich sowohl auf "optimale" als auch auf "nicht-optimale" Approximation beziehen. Die Theorie wurde nicht nur in der klassischen Form aufge-

baut, sondern auch im Rahmen der Theorie der intermediären Räume. Der Verfasser arbeitet in der vorliegenden Abhandlung auf Interpolationsräumen, in die durch die Definition der Norm die Approximationsgeschwindigkeit eingebaut ist, und macht sich von der speziellen Halbgruppeneigenschaft frei, indem er die auf dieser Eigenschaft aufgebauten Beweiselemente auf ihren wesentlichen, nicht spezifisch halbgruppentheoretischen Kern reduziert. Von dieser Seite her betrachtet, kann die vorliegende Abhandlung einerseits als weiteres Kapitel der obigen Monographie gesehen werden, andererseits ist sie jedoch so angelegt, daß sie auch unabhängig davon zu lesen ist, gewisse Grundbegriffe vorausgesetzt.

Eine fundamentale Rolle spielt bei der Behandlung der Saturation der Begriff der relativen Vervollständigung. Er erlaubt es, das Saturationsproblem als ein zweites zentrales Problem dieser Abhandlung für die hier zugelassenen Prozesse generell zu lösen. Dieser Begriff ist stärker als die Abschließung und schwächer als die Kompaktifizierung, und er ist dem Phänomen der Saturation genau angepaßt. Auf diesem Wege erhält das Saturationsproblem eine eindrucksvolle Deutung und Einordnung sowohl in die Approximationstheorie als auch in die Theorie der intermediären Räume.

Aachen, April 1968 **P. L. Butzer**

INHALTSVERZEICHNIS