# UNITEXT – La Matematica per il 3+2

Volume 100

http://www.springer.com/series/5418

Alfio Quarteroni

# Modellistica Numerica per Problemi Differenziali

6a edizione

Springer

Alfio Quarteroni
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Losanna, Svizzera

ISSN versione cartacea: 2038-5722 ISSN versione elettronica: 2038-5757
UNITEXT – La Matematica per il 3+2
ISBN 978-88-470-5780-7 ISBN 978-88-470-5782-1 (eBook)
DOI 10.1007/978-88-470-5782-1

Springer Milan Heidelberg New York Dordrecht London


9 8 7 6 5 4 3 2 1

Layout copertina: Simona Colombo, Giochi di Grafica, Milano, Italia
Immagine di copertina: Risoluzione numerica con Isogeometric Analysis delle equazioni differenziali del quarto ordine di Cahn-Hilliard su una sfera: riportata è l'evoluzione temporale di due fasi (contraddistinte dai colori rosso e blu che ne indicano le concentrazioni). Al tempo iniziale le due fasi sono perfettamente mescolate, a meno di una perturbazione, e per tempi successivi si separano minimizzando l'energia libera e conservando le rispettive masse. (A cura di Andrea Bartezzaghi di CMCS-EPFL.)
Impaginazione: CompoMat srl, Configni (RI), Italia
Stampa: Grafiche Porpora, Segrate (MI), Italia

Questa edizione è pubblicata da SpringerNature
La società registrata è Springer-Verlag Italia Srl

*A Fulvia, Silvia e Marzia*

# Prefazione

Queste note sono tratte dalle lezioni di “Metodi Numerici per l’Ingegneria” tenute presso il Politecnico di Milano e da quelle di “Analyse Numérique des Équations aux Dérivées Partielles” svolte presso l’EPFL (École Polytechnique Fédérale de Lausanne).

Esse costituiscono una introduzione elementare alla modellistica numerica di problemi differenziali alle derivate parziali, sia stazionari che evolutivi. L’enfasi è posta soprattutto su problemi lineari, ellittici, parabolici e iperbolici. Tuttavia si considerano anche alcuni problemi non lineari, quali le leggi di conservazione e le equazioni di Navier-Stokes per la meccanica dei fluidi. Numerosi esempi di interesse fisico motivano i modelli differenziali che vengono illustrati. Di ognuna delle classi di problemi considerati si illustrano le principali proprietà matematiche e se ne fornisce la cosiddetta *formulazione debole*, o integrale, che sta alla base del metodo di Galerkin. Indi, come caso notevole del metodo di Galerkin, si introduce il metodo degli elementi finiti, dapprima per problemi ai limiti monodimensionali, quindi nel caso multidimensionale. Se ne analizzano le proprietà di stabilità e di convergenza, si illustrano gli aspetti algoritmici e quelli relativi alla implementazione su calcolatore. Altri metodi, quali le differenze finite ed i metodi spettrali, vengono pure considerati, nell’ambito della risoluzione numerica di problemi specifici. Numerosi esercizi corredano i diversi capitoli allo scopo di fornire al lettore la possibilità di acquisire maggiore consapevolezza sui principali argomenti trattati.

Il testo è diviso in Capitoli, Sezioni e Sottosezioni. Il Capitolo 1 è dedicato ad un breve richiamo delle equazioni alle derivate parziali ed alla loro classificazione. Nel Capitolo 2 vengono introdotte le equazioni ellittiche (quali i problemi di Laplace e Poisson) e la loro formulazione integrale per condizioni al bordo di tipo generale, dapprima nel caso monodimensionale, poi in quello multidimensionale. Il Capitolo 3 è dedicato al metodo di approssimazione di Galerkin in generale ed al metodo degli elementi finiti in particolare. Nel Capitolo 4 si illustrano i metodi spettrali, ovvero metodi di Galerkin con sottospazi di polinomi globali, e la loro generalizzazione ai metodi pseudo-spettrali (o di collocazione) da un lato ed al metodo degli elementi-spettrali dall’altro. Durante la lettura di questi capitoli il lettore troverà numerosi rinvii alle Appendici. In particolare, nell’Appendice 2 si introducono alcuni elementari concetti di analisi funzionale, di teoria delle distribuzioni e di spazi di Sobolev, necessari per una corretta comprensione della formulazione debole (o integrale) dei problemi ai limiti. Nell'Appendice 7 si richiamano invece alcuni fra gli algoritmi più frequentemente utilizzati per la risoluzione di sistemi lineari generati dalla discretizzazione di problemi alle derivate parziali. Nel Capitolo 5 si introducono i problemi di diffusione e trasporto, si illustrano le difficoltà che derivano dalla presenza di strati limite nella soluzione e si discutono metodi di stabilizzazione, basati su differenze finite ed elementi finiti con opportuna viscosità numerica. Il Capitolo 6 è dedicato ai problemi parabolici, descriventi processi di diffusione, per i quali si usano metodi di discretizzazione spaziale con elementi finiti e temporale con differenze finite. I Capitoli 7, 8 e 9 riguardano i problemi iperbolici, inerenti fenomeni di propagazione di onde. Ci concentreremo soprattutto sul caso dei problemi monodimensionali, al fine di analizzare in dettaglio le proprietà di dissipazione e di dispersione dei diversi schemi numerici che vengono considerati. Il Capitolo 10 è dedicato all'approssimazione delle equazioni di Navier-Stokes e ad una breve analisi dei problemi inerenti il soddisfacimento del vincolo di incomprimibilità. Infine nei Capitoli 8 e 6 (scritti in collaborazione con F. Saleri e L. Formaggia) si illustrano gli aspetti relativi alla programmazione del metodo degli elementi finiti.

Questo testo è stato scritto per gli studenti di discipline scientifiche, interessati alla modellistica per la risoluzione numerica di problemi differenziali, ma può essere utile anche a ricercatori e studiosi desiderosi di avvicinarsi a questo interessante ramo della matematica applicata.

Milano e Losanna, marzo 2000 Alfio Quarteroni

In questa seconda edizione tutti i Capitoli sono stati riveduti e ampliati. In particolare, al Capitolo 3 è stata aggiunta una Sezione sulla *analisi a posteriori* del metodo di Galerkin per problemi ellittici, mentre il precedente Capitolo 7 sulle equazioni iperboliche è stato notevolmente arricchito, per quanto riguarda l'analisi di problemi lineari e non lineari, dando origine a tre Capitoli. Inoltre, l'Indice Analitico è stato riorganizzato e arricchito di nuove voci.

Per la preparazione di queste note hanno dato un contributo determinante diversi miei colleghi e collaboratori. In particolare, Fausto Saleri, Luca Formaggia, Simona Perotto e Alessandro Veneziani, ma anche Marco Discacciati, Paolo Corna, Lorella Fatone, Paolo Zunino e Anna Zaretti. Ad essi va la mia riconoscenza ed il mio ringraziamento.

Milano e Losanna, novembre 2002 Alfio Quarteroni

In questa terza edizione sono stati riveduti ed ampliati tutti i Capitoli, ed in modo particolare il quarto dedicato ai metodi spettrali, il sesto per ciò che concerne l'analisi di problemi parabolici, l'ottavo relativamente all'approssimazione spettrale di problemi iperbolici, ed infine i Capitoli 11 e 12 concernenti gli aspetti implementativi del metodo agli elementi finiti. In particolare, il Capitolo 11 è scritto in collaborazione con A. Veneziani e L. Formaggia e riporta esempi di programmazione in C++ (un linguaggio orientato agli oggetti). Si è inoltre aggiunto un breve Capitolo, il 13, sull'introduzione al metodo dei volumi finiti.

Negli ultimi due anni sono usciti in questa stessa serie due monografie che possono essere considerate un importante compendio a questo testo: "*Equazioni a derivate parziali. Metodi, modelli e applicazioni*" di S. Salsa, in cui si introducono ed analizzano i problemi differenziali che vengono qui trattati, e "*Applicazioni ed esercizi di modellistica numerica per problemi differenziali*" di L. Formaggia, F. Saleri e A. Veneziani, che a tutti gli effetti può considerarsi di supporto a questo testo per ciò che concerne la risoluzione di problemi ed esercizi nonché per l'approfondimento delle tecniche qui presentate. Segnaliamo anche il testo "*Elementi di fluidodinamica*" di G. Riccardi e D. Durante che, illustrando i modelli differenziali basilari della dinamica dei fluidi, può essere considerato come complementare ai Capitoli 9 e 10 inerenti la fluidodinamica numerica.

Vorrei ringraziare in modo particolare Simona Perotto per il suo contributo davvero determinante, ma anche Alessandro Veneziani, Nicola Parolini e Paola Gervasio. Infine, ringrazio Francesca Bonadei di Springer per il costante aiuto e gli innumerevoli consigli finalizzati a migliorare questa nuova edizione.

Milano e Losanna, 9 luglio 2006 Alfio Quarteroni

In questa quarta edizione sono stati aggiunti due nuovi capitoli, il Capitolo 14 sul metodo di decomposizione dei domini e il Capitolo 15 sui problemi di controllo per equazioni alle derivate parziali.

Ringrazio Luca Dedè, Marco Discacciati, Nicola Parolini, Simona Perotto, Christoph Winkelmann e, in modo particolare, Luca Paglieri e Francesca Bonadei.

Milano e Losanna, agosto 2008 Alfio Quarteroni

In questa quinta edizione si è proceduto ad un riordino dei Capitoli. Nella nuova versione, dopo aver introdotto i concetti teorici di base (Capitoli 1-3), i Capitoli 4-8 sono dedicati all'introduzione, analisi e programmazione del metodo degli elementi finiti per problemi lineari ellittici e parabolici. Nei Capitoli 9 e 10 si introducono ed analizzano due metodi di approssimazione alternativi agli elementi finiti: i volumi finiti e i metodi spettrali. I Capitoli centrali 12-16 sono dedicati all'approssimazione di equazioni di base nella meccanica dei fluidi (le equazioni di trasporto-diffusione-reazione, quelle iperboliche, le leggi di conservazione non lineari, le equazioni di Navier-Stokes). Gli ultimi Capitoli sono dedicati ad argomenti più avanzati e specialistici. Tutti i Capitoli sono stati rivisti ed integrati, anche con nuovi risultati numerici. In particolare, è stato modificato ed ampliato il Capitolo 12 relativo alla soluzione di problemi di diffusione-trasporto. Abbiamo inoltre aggiunto un nuovo Capitolo (il Capitolo 11) contenente una presentazione organica (con relativa analisi) dei metodi di approssimazione discontinui, sia di tipo *discontinuous Galerkin*, sia di tipo *mortar*, sia nella versione agli elementi finiti che in quella agli elementi spettrali.

Ringrazio Paola Antonietti e Paola Gervasio per le loro preziose consulenze scientifiche, e Luca Paglieri e Francesca Bonadei per il loro fondamentale aiuto nella realizzazione editoriale di questa edizione.

Milano e Losanna, settembre 2012 Alfio Quarteroni

La sesta edizione ricalca in modo sostanziale la quinta, con diversi miglioramenti stilistici e con l'aggiunta di nuovi esempi e simulazioni numeriche.

Abbiamo inoltre aggiunto un nuovo capitolo, il Capitolo 19, dedicato al metodo delle Basi Ridotte per la risoluzione numerica di equazioni differenziali alle derivate parziali parametrizzate.

Ringrazio Andrea Manzoni per aver contribuito alla scrittura del Capitolo 19, nonché Francesca Bonadei e Francesca Ferrari di Springer per il loro prezioso aiuto nella realizzazione di questa nuova edizione.

Losanna, marzo 2016 Alfio Quarteroni

# Indice