

UNITEXT – La Matematica per il 3+2

Volume 100

Editor-in-chief

A. Quarteroni

Series editors

L. Ambrosio

P. Biscari

C. Ciliberto

M. Ledoux

W.J. Runggaldier

<http://www.springer.com/series/5418>

Alfio Quarteroni

Modellistica Numerica per Problemi Differenziali

6a edizione

 Springer

Alfio Quarteroni
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Losanna, Svizzera

ISSN versione cartacea: 2038-5722 ISSN versione elettronica: 2038-5757
UNITEXT – La Matematica per il 3+2
ISBN 978-88-470-5780-7 ISBN 978-88-470-5782-1 (eBook)
DOI 10.1007/978-88-470-5782-1

Springer Milan Heidelberg New York Dordrecht London
©Springer-Verlag Italia 2016

Quest'opera è protetta dalla legge sul diritto d'autore e la sua riproduzione è ammessa solo ed esclusivamente nei limiti stabiliti dalla stessa. Le fotocopie per uso personale possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascun volume dietro pagamento alla SIAE del compenso previsto dall'art. 68. Le riproduzioni per uso non personale e/o oltre il limite del 15% potranno avvenire solo a seguito di specifica autorizzazione rilasciata da AIDRO, Corso di Porta Romana n.108, Milano 20122, e-mail segreteria@aidro.org e sito web www.aidro.org. Tutti i diritti, in particolare quelli relativi alla traduzione, alla ristampa, all'utilizzo di illustrazioni e tabelle, alla citazione orale, alla trasmissione radiofonica o televisiva, alla registrazione su microfilm o in database, o alla riproduzione in qualsiasi altra forma (stampata o elettronica) rimangono riservati anche nel caso di utilizzo parziale. La violazione delle norme comporta le sanzioni previste dalla legge. L'utilizzo in questa pubblicazione di denominazioni generiche, nomi commerciali, marchi registrati, ecc. anche se non specificatamente identificati, non implica che tali denominazioni o marchi non siano protetti dalle relative leggi e regolamenti.

9 8 7 6 5 4 3 2 1

Layout copertina: Simona Colombo, Giochi di Grafica, Milano, Italia

Immagine di copertina: Risoluzione numerica con Isogeometric Analysis delle equazioni differenziali del quarto ordine di Cahn-Hilliard su una sfera: riportata è l'evoluzione temporale di due fasi (contraddistinte dai colori rosso e blu che ne indicano le concentrazioni). Al tempo iniziale le due fasi sono perfettamente mescolate, a meno di una perturbazione, e per tempi successivi si separano minimizzando l'energia libera e conservando le rispettive masse. (A cura di Andrea Bartezzaghi di CMCS-EPFL.)

Impaginazione: CompoMat srl, Configni (RI), Italia

Stampa: Grafiche Porpora, Segrate (MI), Italia

Questa edizione è pubblicata da SpringerNature
La società registrata è Springer-Verlag Italia Srl

A Fulvia, Silvia e Marzia

Prefazione

Queste note sono tratte dalle lezioni di “Metodi Numerici per l’Ingegneria” tenute presso il Politecnico di Milano e da quelle di “Analyse Numérique des Équations aux Dérivées Partielles” svolte presso l’EPFL (École Polytechnique Fédérale de Lausanne).

Esse costituiscono una introduzione elementare alla modellistica numerica di problemi differenziali alle derivate parziali, sia stazionari che evolutivi. L’enfasi è posta soprattutto su problemi lineari, ellittici, parabolici e iperbolici. Tuttavia si considerano anche alcuni problemi non lineari, quali le leggi di conservazione e le equazioni di Navier-Stokes per la meccanica dei fluidi. Numerosi esempi di interesse fisico motivano i modelli differenziali che vengono illustrati. Di ognuna delle classi di problemi considerati si illustrano le principali proprietà matematiche e se ne fornisce la cosiddetta *formulazione debole*, o integrale, che sta alla base del metodo di Galerkin. Indi, come caso notevole del metodo di Galerkin, si introduce il metodo degli elementi finiti, dapprima per problemi ai limiti monodimensionali, quindi nel caso multidimensionale. Se ne analizzano le proprietà di stabilità e di convergenza, si illustrano gli aspetti algoritmici e quelli relativi alla implementazione su calcolatore. Altri metodi, quali le differenze finite ed i metodi spettrali, vengono pure considerati, nell’ambito della risoluzione numerica di problemi specifici. Numerosi esercizi corredano i diversi capitoli allo scopo di fornire al lettore la possibilità di acquisire maggiore consapevolezza sui principali argomenti trattati.

Il testo è diviso in Capitoli, Sezioni e Sottosezioni. Il Capitolo 1 è dedicato ad un breve richiamo delle equazioni alle derivate parziali ed alla loro classificazione. Nel Capitolo 2 vengono introdotte le equazioni ellittiche (quali i problemi di Laplace e Poisson) e la loro formulazione integrale per condizioni al bordo di tipo generale, dapprima nel caso monodimensionale, poi in quello multidimensionale. Il Capitolo 3 è dedicato al metodo di approssimazione di Galerkin in generale ed al metodo degli elementi finiti in particolare. Nel Capitolo 4 si illustrano i metodi spettrali, ovvero metodi di Galerkin con sottospazi di polinomi globali, e la loro generalizzazione ai metodi pseudo-spettrali (o di collocazione) da un lato ed al metodo degli elementi-spettrali dall’altro. Durante la lettura di questi capitoli il lettore troverà numerosi rinvii alle Appendici. In particolare, nell’Appendice 2 si introducono alcuni elementari con-

cetti di analisi funzionale, di teoria delle distribuzioni e di spazi di Sobolev, necessari per una corretta comprensione della formulazione debole (o integrale) dei problemi ai limiti. Nell'Appendice 7 si richiamano invece alcuni fra gli algoritmi più frequentemente utilizzati per la risoluzione di sistemi lineari generati dalla discretizzazione di problemi alle derivate parziali. Nel Capitolo 5 si introducono i problemi di diffusione e trasporto, si illustrano le difficoltà che derivano dalla presenza di strati limite nella soluzione e si discutono metodi di stabilizzazione, basati su differenze finite ed elementi finiti con opportuna viscosità numerica. Il Capitolo 6 è dedicato ai problemi parabolici, descrittivi processi di diffusione, per i quali si usano metodi di discretizzazione spaziale con elementi finiti e temporale con differenze finite. I Capitoli 7, 8 e 9 riguardano i problemi iperbolici, inerenti fenomeni di propagazione di onde. Ci concentreremo soprattutto sul caso dei problemi monodimensionali, al fine di analizzare in dettaglio le proprietà di dissipazione e di dispersione dei diversi schemi numerici che vengono considerati. Il Capitolo 10 è dedicato all'approssimazione delle equazioni di Navier-Stokes e ad una breve analisi dei problemi inerenti il soddisfacimento del vincolo di incomprimibilità. Infine nei Capitoli 8 e 6 (scritti in collaborazione con F. Saleri e L. Formaggia) si illustrano gli aspetti relativi alla programmazione del metodo degli elementi finiti.

Questo testo è stato scritto per gli studenti di discipline scientifiche, interessati alla modellistica per la risoluzione numerica di problemi differenziali, ma può essere utile anche a ricercatori e studiosi desiderosi di avvicinarsi a questo interessante ramo della matematica applicata.

Milano e Losanna, marzo 2000

Alfio Quarteroni

In questa seconda edizione tutti i Capitoli sono stati riveduti e ampliati. In particolare, al Capitolo 3 è stata aggiunta una Sezione sulla *analisi a posteriori* del metodo di Galerkin per problemi ellittici, mentre il precedente Capitolo 7 sulle equazioni iperboliche è stato notevolmente arricchito, per quanto riguarda l'analisi di problemi lineari e non lineari, dando origine a tre Capitoli. Inoltre, l'Indice Analitico è stato riorganizzato e arricchito di nuove voci.

Per la preparazione di queste note hanno dato un contributo determinante diversi miei colleghi e collaboratori. In particolare, Fausto Saleri, Luca Formaggia, Simona Perotto e Alessandro Veneziani, ma anche Marco Discacciati, Paolo Corna, Lorella Fatone, Paolo Zunino e Anna Zaretti. Ad essi va la mia riconoscenza ed il mio ringraziamento.

Milano e Losanna, novembre 2002

Alfio Quarteroni

In questa terza edizione sono stati riveduti ed ampliati tutti i Capitoli, ed in modo particolare il quarto dedicato ai metodi spettrali, il sesto per ciò che concerne l'analisi di problemi parabolici, l'ottavo relativamente all'approssimazione spettrale di problemi iperbolici, ed infine i Capitoli 11 e 12 concernenti gli aspetti implementativi del metodo agli elementi finiti. In particolare, il Capitolo 11 è scritto in collaborazione con A. Veneziani e L. Formaggia e riporta esempi di programmazione in C++ (un linguaggio orientato agli oggetti). Si è inoltre aggiunto un breve Capitolo, il 13, sull'introduzione al metodo dei volumi finiti.

Negli ultimi due anni sono usciti in questa stessa serie due monografie che possono essere considerate un importante compendio a questo testo: *“Equazioni a derivate parziali. Metodi, modelli e applicazioni”* di S. Salsa, in cui si introducono ed analizzano i problemi differenziali che vengono qui trattati, e *“Applicazioni ed esercizi di modellistica numerica per problemi differenziali”* di L. Formaggia, F. Saleri e A. Veneziani, che a tutti gli effetti può considerarsi di supporto a questo testo per ciò che concerne la risoluzione di problemi ed esercizi nonché per l'approfondimento delle tecniche qui presentate. Segnaliamo anche il testo *“Elementi di fluidodinamica”* di G. Riccardi e D. Durante che, illustrando i modelli differenziali basilari della dinamica dei fluidi, può essere considerato come complementare ai Capitoli 9 e 10 inerenti la fluidodinamica numerica.

Vorrei ringraziare in modo particolare Simona Perotto per il suo contributo davvero determinante, ma anche Alessandro Veneziani, Nicola Parolini e Paola Gervasio. Infine, ringrazio Francesca Bonadei di Springer per il costante aiuto e gli innumerevoli consigli finalizzati a migliorare questa nuova edizione.

Milano e Losanna, 9 luglio 2006

Alfio Quarteroni

In questa quarta edizione sono stati aggiunti due nuovi capitoli, il Capitolo 14 sul metodo di decomposizione dei domini e il Capitolo 15 sui problemi di controllo per equazioni alle derivate parziali.

Ringrazio Luca Dedè, Marco Discacciati, Nicola Parolini, Simona Perotto, Christoph Winkelmann e, in modo particolare, Luca Paglieri e Francesca Bonadei.

Milano e Losanna, agosto 2008

Alfio Quarteroni

In questa quinta edizione si è proceduto ad un riordino dei Capitoli. Nella nuova versione, dopo aver introdotto i concetti teorici di base (Capitoli 1-3), i Capitoli 4-8 sono dedicati all'introduzione, analisi e programmazione del metodo degli elementi finiti per problemi lineari ellittici e parabolici. Nei Capitoli 9 e 10 si introducono ed

analizzano due metodi di approssimazione alternativi agli elementi finiti: i volumi finiti e i metodi spettrali. I Capitoli centrali 12-16 sono dedicati all'approssimazione di equazioni di base nella meccanica dei fluidi (le equazioni di trasporto-diffusione-reazione, quelle iperboliche, le leggi di conservazione non lineari, le equazioni di Navier-Stokes). Gli ultimi Capitoli sono dedicati ad argomenti più avanzati e specialistici. Tutti i Capitoli sono stati rivisti ed integrati, anche con nuovi risultati numerici. In particolare, è stato modificato ed ampliato il Capitolo 12 relativo alla soluzione di problemi di diffusione-trasporto. Abbiamo inoltre aggiunto un nuovo Capitolo (il Capitolo 11) contenente una presentazione organica (con relativa analisi) dei metodi di approssimazione discontinui, sia di tipo *discontinuous Galerkin*, sia di tipo *mortar*, sia nella versione agli elementi finiti che in quella agli elementi spettrali.

Ringrazio Paola Antonietti e Paola Gervasio per le loro preziose consulenze scientifiche, e Luca Paglieri e Francesca Bonadei per il loro fondamentale aiuto nella realizzazione editoriale di questa edizione.

Milano e Losanna, settembre 2012

Alfio Quarteroni

La sesta edizione ricalca in modo sostanziale la quinta, con diversi miglioramenti stilistici e con l'aggiunta di nuovi esempi e simulazioni numeriche.

Abbiamo inoltre aggiunto un nuovo capitolo, il Capitolo 19, dedicato al metodo delle Basi Ridotte per la risoluzione numerica di equazioni differenziali alle derivate parziali parametrizzate.

Ringrazio Andrea Manzoni per aver contribuito alla scrittura del Capitolo 19, nonché Francesca Bonadei e Francesca Ferrari di Springer per il loro prezioso aiuto nella realizzazione di questa nuova edizione.

Losanna, marzo 2016

Alfio Quarteroni

Indice

1	Richiami sulle equazioni alle derivate parziali	1
1.1	Definizioni ed esempi	1
1.2	Necessità della risoluzione numerica	3
1.3	Classificazione delle EDP	5
1.3.1	Forma quadratica associata ad una EDP	8
1.4	Esercizi	9
2	Richiami di analisi funzionale	11
2.1	Funzionali e forme bilineari	11
2.2	Differenziazione in spazi lineari	13
2.3	Richiami sulle distribuzioni	15
2.3.1	Le funzioni a quadrato sommabile	17
2.3.2	Derivazione nel senso delle distribuzioni	18
2.4	Gli spazi di Sobolev	20
2.4.1	Regolarità degli spazi $H^k(\Omega)$	21
2.4.2	Lo spazio $H_0^1(\Omega)$	21
2.4.3	Gli operatori di traccia	23
2.5	Lo spazio $L^\infty(\Omega)$ e gli spazi $L^p(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$	24
2.6	Operatori aggiunti di un operatore lineare	25
2.7	Spazi di funzioni dipendenti dal tempo	27
2.8	Esercizi	28
3	Equazioni di tipo ellittico	31
3.1	Un esempio di problema ellittico: l'equazione di Poisson	31
3.2	Il problema di Poisson nel caso monodimensionale	32
3.2.1	Problema di Dirichlet omogeneo	33
3.2.2	Problema di Dirichlet non omogeneo	39
3.2.3	Problema di Neumann	39
3.2.4	Problema misto omogeneo	40
3.2.5	Condizioni al bordo miste (o di Robin)	40

3.3	Il problema di Poisson nel caso bidimensionale	41
3.3.1	Il problema di Dirichlet omogeneo	41
3.3.2	Equivalenza, nel senso delle distribuzioni, tra la forma debole e la forma forte del problema di Dirichlet	43
3.3.3	Il problema con condizioni miste non omogenee	44
3.3.4	Equivalenza, nel senso delle distribuzioni, tra la forma debole e la forma forte per il problema di Neumann	47
3.4	Problemi ellittici più generali	48
3.4.1	Teorema di esistenza e unicità	50
3.5	Operatore aggiunto e problema aggiunto	52
3.5.1	Il caso non lineare	55
3.6	Esercizi	56
4	Il metodo di Galerkin-elementi finiti per problemi ellittici	61
4.1	Approssimazione con il metodo di Galerkin	61
4.2	Analisi del metodo di Galerkin	63
4.2.1	Esistenza e unicità	63
4.2.2	Stabilità	64
4.2.3	Convergenza	64
4.3	Il metodo degli elementi finiti nel caso monodimensionale	67
4.3.1	Lo spazio X_h^1	67
4.3.2	Lo spazio X_h^2	69
4.3.3	L'approssimazione con elementi finiti lineari	71
4.3.4	Interpolazione e stima dell'errore di interpolazione	73
4.3.5	Stima dell'errore nella norma H^1	75
4.4	Elementi finiti, semplici e coordinate baricentriche	76
4.4.1	Una definizione di elemento finito nel caso Lagrangiano ..	77
4.4.2	Semplici	78
4.4.3	Coordinate baricentriche	79
4.5	Il metodo degli elementi finiti nel caso multidimensionale	80
4.5.1	Risoluzione del problema di Poisson con elementi finiti ..	82
4.5.2	Condizionamento della matrice di rigidezza	86
4.5.3	Stima dell'errore di approssimazione nella norma dell'energia	89
4.5.4	Stima dell'errore di approssimazione in norma L^2	96
4.6	Il problema dell'adattività della griglia	100
4.6.1	Adattività a priori basata sulla ricostruzione delle derivate.	100
4.6.2	Adattività a posteriori	103
4.6.3	Esempi numerici di adattività	107
4.6.4	Stime a posteriori dell'errore nella norma L^2	111
4.6.5	Stime a posteriori di un funzionale dell'errore	113
4.7	Esercizi	114

5	Equazioni paraboliche	121
5.1	Formulazione debole e sua approssimazione	122
5.2	Stime a priori	125
5.3	Analisi di convergenza del problema semi-discreto	127
5.4	Analisi di stabilità del θ -metodo	130
5.5	Analisi di convergenza del θ -metodo	134
5.6	Il caso dell'approssimazione spettrale G-NI	137
5.7	Esercizi	138
6	Generazione di griglie in 1D e 2D	141
6.1	La generazione di griglia in 1D	141
6.2	Reticolazione di un dominio poligonale	143
6.3	Generazione di griglie strutturate	146
6.4	Generazione di griglie non strutturate	149
6.4.1	Triangolazione di Delaunay	150
6.4.2	Tecnica di avanzamento del fronte	154
6.5	Tecniche di regolarizzazione	156
6.5.1	Scambio delle diagonali	157
6.5.2	Spostamento dei nodi	158
7	Algoritmi di risoluzione di sistemi lineari	161
7.1	Metodi diretti	161
7.2	Metodi iterativi	164
8	Cenni di programmazione degli elementi finiti	171
8.1	Fasi operative di un codice a elementi finiti	171
8.1.1	Un breve cenno al codice utilizzato	174
8.2	Calcolo numerico degli integrali	175
8.2.1	Le coordinate baricentriche	178
8.3	Memorizzazione di matrici sparse	181
8.4	La fase di assemblaggio	185
8.4.1	Codifica delle informazioni geometriche	187
8.4.2	Codifica delle informazioni funzionali	191
8.4.3	Mappatura tra elemento di riferimento e elemento fisico ..	192
8.4.4	La costruzione dei sistemi locali e di quello globale	196
8.4.5	La prescrizione delle condizioni al bordo	200
8.5	L'integrazione in tempo	203
8.6	Un esempio completo	206
9	Il metodo dei volumi finiti	217
9.1	Alcuni principi elementari	218
9.2	La costruzione dei volumi di controllo per schemi <i>vertex-centered</i> ..	220
9.3	Discretizzazione di un problema di diffusione-trasporto-reazione...	223
9.4	Analisi dell'approssimazione ai volumi finiti (cenno)	225
9.5	Implementazione delle condizioni al bordo	226

10	I metodi spettrali	229
10.1	Il metodo di Galerkin spettrale per problemi ellittici	229
10.2	Polinomi ortogonali e integrazione numerica gaussiana	233
10.2.1	Polinomi ortogonali di Legendre	233
10.2.2	Integrazione gaussiana	236
10.2.3	Le formule di Gauss-Legendre-Lobatto	237
10.3	Metodi G-NI in una dimensione	240
10.3.1	Interpretazione algebrica del metodo G-NI	241
10.3.2	Condizionamento della matrice di rigidità del metodo G-NI	243
10.3.3	Equivalenza tra il metodo G-NI e un metodo di collocazione	244
10.4	Generalizzazione al caso bidimensionale	248
10.4.1	Convergenza del metodo G-NI	250
10.5	Metodo G-NI e MES-NI per un problema modello monodimensionale	258
10.5.1	Il metodo G-NI	259
10.5.2	Il metodo MES-NI	263
10.6	Metodi spettrali su triangoli e tetraedri	266
10.7	Esercizi	270
11	Metodi con elementi discontinui	271
11.1	Il metodo di Galerkin discontinuo (DG) per il problema di Poisson ..	271
11.2	Il metodo mortar	277
11.2.1	Caratterizzazione dello spazio dei vincoli per elementi spettrali (MES)	280
11.2.2	Caratterizzazione dello spazio dei vincoli per elementi finiti	281
11.3	Formulazione mortar del problema di Poisson	281
11.4	Scelta delle funzioni di base	283
11.5	Scelta delle formule di quadratura per elementi spettrali	285
11.6	Scelta delle formule di quadratura per elementi finiti	286
11.7	Risoluzione del sistema lineare del metodo mortar	287
11.8	Il metodo mortar per l'accoppiamento di elementi finiti ed elementi spettrali	288
11.9	Generalizzazione del metodo mortar a decomposizioni con più domini	290
11.10	Risultati numerici per il metodo mortar	291
12	Equazioni di diffusione-trasporto-reazione	295
12.1	Formulazione debole del problema	295
12.2	Analisi di un problema di diffusione-trasporto monodimensionale ..	299
12.3	Analisi di un problema di diffusione-reazione monodimensionale ..	303
12.4	Relazioni tra elementi finiti e differenze finite	305
12.5	Diagonalizzazione della matrice di massa (<i>mass-lumping</i>)	306

12.6	Schemi decentrati e diffusione artificiale	309
12.7	Autovalori del problema di diffusione-trasporto	312
12.8	Metodi di stabilizzazione	314
12.8.1	Diffusione artificiale e schemi decentrati agli elementi finiti	315
12.8.2	Il metodo di Petrov-Galerkin	317
12.8.3	Il metodo della diffusione artificiale e della <i>streamline-diffusion</i> nel caso bidimensionale	317
12.8.4	Consistenza ed errore di troncamento per i metodi di Galerkin e di Galerkin generalizzato	319
12.8.5	Parte simmetrica e antisimmetrica di un operatore	320
12.8.6	Metodi fortemente consistenti (GLS, SUPG)	321
12.8.7	Sulla scelta del parametro di stabilizzazione	323
12.8.8	Analisi del metodo GLS	325
12.8.9	Stabilizzazione tramite funzioni a bolla	332
12.9	Il metodo DG per le equazioni di diffusione-trasporto	335
12.10	Metodi mortar per le equazioni di diffusione-trasporto	336
12.11	Alcuni test numerici per problemi di diffusione-trasporto	338
12.12	Un esempio di adattività <i>goal-oriented</i>	342
12.13	Esercizi	345
13	Differenze finite per equazioni iperboliche	349
13.1	Un problema di trasporto scalare	349
13.1.1	Una stima a priori	351
13.2	Sistemi di equazioni iperboliche lineari	353
13.2.1	L'equazione delle onde	355
13.3	Il metodo delle differenze finite	357
13.3.1	Discretizzazione dell'equazione scalare	358
13.3.2	Discretizzazione di sistemi iperboliche lineari	359
13.3.3	Trattamento del bordo	360
13.4	Analisi dei metodi alle differenze finite	361
13.4.1	Consistenza e convergenza	361
13.4.2	Stabilità	361
13.4.3	Analisi di von Neumann e coefficienti di amplificazione	366
13.4.4	Dissipazione e dispersione	370
13.5	Equazioni equivalenti	372
13.5.1	Il caso dello schema upwind	372
13.5.2	Il caso dei metodi di Lax-Friedrichs e Lax-Wendroff	377
13.5.3	Sul significato dei coefficienti nelle equazioni equivalenti	378
13.5.4	Equazioni equivalenti e analisi dell'errore	379
13.6	Esercizi	380
14	Elementi finiti e metodi spettrali per equazioni iperboliche	383
14.1	Discretizzazione temporale	383
14.1.1	Gli schemi di Eulero in avanti e all'indietro	383

14.1.2	Gli schemi upwind, di Lax-Friedrichs e Lax-Wendroff	385
14.2	Gli schemi Taylor-Galerkin	388
14.3	Il caso multidimensionale	393
14.3.1	Semi-discretizzazione: trattamento forte e trattamento debole delle condizioni al bordo	394
14.3.2	Discretizzazione temporale	397
14.4	Elementi finiti discontinui	400
14.4.1	Il caso unidimensionale	400
14.4.2	Il caso multidimensionale	405
14.5	Approssimazione con metodi spettrali	408
14.5.1	Il metodo G-NI in un singolo intervallo	408
14.5.2	Il metodo DG-SEM-NI	412
14.6	Trattamento numerico delle condizioni al bordo per sistemi iperbolici	414
14.6.1	Trattamento debole delle condizioni al bordo	418
14.7	Esercizi	420
15	Cenni a problemi iperbolici non lineari	421
15.1	Equazioni scalari	421
15.2	Approssimazione alle differenze finite	426
15.3	Approssimazione con elementi finiti discontinui	428
15.4	Sistemi iperbolici non-lineari	434
16	Le equazioni di Navier-Stokes	441
16.1	Formulazione debole delle equazioni di Navier-Stokes	443
16.2	Le equazioni di Stokes e la loro approssimazione	448
16.3	Problemi di punto-sella	452
16.3.1	Formulazione del problema	452
16.3.2	Analisi del problema	453
16.3.3	Approssimazione con il metodo di Galerkin ed analisi di stabilità e convergenza	457
16.4	Formulazione algebrica del problema di Stokes	460
16.5	Un esempio di problema stabilizzato	465
16.6	Un esempio numerico	466
16.7	Discretizzazione in tempo delle equazioni di Navier-Stokes	468
16.7.1	Metodi alle differenze finite	469
16.7.2	Metodi alle caratteristiche (o Lagrangiani)	471
16.7.3	Metodi a passi frazionari	472
16.8	Risoluzione del sistema di Stokes e metodi di fattorizzazione algebrica	475
16.9	Problemi di fluidi a superficie libera	479
16.9.1	Equazioni di Navier-Stokes con densità e viscosità variabili	480
16.9.2	Condizioni al contorno	481
16.9.3	Applicazioni ai fluidi a superficie libera	482
16.10	Modelli per l'evoluzione dell'interfaccia	484

16.10.1	Rappresentazione dell'interfaccia con metodi espliciti	484
16.10.2	Rappresentazione dell'interfaccia con metodi impliciti . . .	484
16.11	Approssimazione a volumi finiti	489
16.12	Esercizi	492
17	Introduzione al controllo ottimale per equazioni a derivate parziali . . .	495
17.1	Definizione del problema di controllo ottimale	495
17.2	Un problema di controllo per sistemi lineari	497
17.3	Alcuni esempi di problemi di controllo ottimale per il problema di Laplace	498
17.4	Alcuni risultati per minimi di funzionali	499
17.5	La teoria del controllo ottimale per problemi ellittici	502
17.6	Alcuni esempi di problemi di controllo ottimale	506
17.6.1	Un problema di Dirichlet con controllo distribuito	506
17.6.2	Un problema di Neumann con controllo distribuito	507
17.6.3	Un problema di Neumann con controllo di frontiera	508
17.7	Test numerici	508
17.8	Formulazione di problemi di controllo mediante lagrangiana	513
17.8.1	Ottimizzazione vincolata per funzioni in \mathbb{R}^n	514
17.8.2	L'approccio mediante Lagrangiana	515
17.9	Risoluzione del problema di controllo: il metodo iterativo	517
17.10	Esempi numerici	522
17.10.1	Dissipazione di calore da un'aletta termica (<i>thermal fin</i>) . .	522
17.10.2	Inquinamento termico in un fiume	524
17.11	Alcune considerazioni su osservabilità e controllabilità	527
17.12	Due paradigmi di risoluzione: "discretizzare–poi–ottimizzare" oppure "ottimizzare–poi–discretizzare"	528
17.13	Approssimazione numerica di un problema di controllo ottimale per equazioni di diffusione–trasporto	530
17.13.1	Gli approcci: "ottimizzare–poi–discretizzare" e "discretizzare–poi–ottimizzare"	532
17.13.2	Stima a posteriori dell'errore	533
17.13.3	Un problema test: controllo delle emissioni di inquinanti . .	536
17.14	Esercizi	538
18	Il metodo di decomposizione dei domini	539
18.1	Alcuni classici metodi iterativi basati su DD	540
18.1.1	Il metodo di Schwarz	540
18.1.2	Il metodo di Dirichlet-Neumann	542
18.1.3	Il metodo di Neumann-Neumann	544
18.1.4	Il metodo di Robin-Robin	545
18.2	Formulazione multi-dominio del problema di Poisson ed equazioni di interfaccia	545
18.2.1	L'operatore di Steklov-Poincaré	546

18.2.2	Equivalenza tra il metodo di Dirichlet-Neumann e il metodo di Richardson	548
18.3	Approssimazione con elementi finiti del problema di Poisson e formulazione per sotto-domini	550
18.3.1	Il complemento di Schur	553
18.3.2	L'operatore di Steklov-Poincaré discreto	554
18.3.3	Equivalenza tra il metodo di Dirichlet-Neumann e il metodo di Richardson preconditionato: il caso algebrico ..	556
18.4	Generalizzazione al caso di più sotto-domini	558
18.4.1	Alcuni risultati numerici	561
18.5	Precondizionatori nel caso di più sotto-domini	562
18.5.1	Il preconditionatore di Jacobi	564
18.5.2	Il preconditionatore di Bramble-Pasciak-Schatz	565
18.5.3	Il preconditionatore di Neumann-Neumann	566
18.6	I metodi iterativi di Schwarz	570
18.6.1	Forma algebrica dei metodi di Schwarz per una discretizzazione ad elementi finiti	571
18.6.2	Il metodo di Schwarz come preconditionatore	573
18.6.3	Metodi di Schwarz a due livelli	577
18.7	Un risultato astratto di convergenza	580
18.8	Condizioni all'interfaccia per altri problemi differenziali	581
18.9	Esercizi	584
19	Metodi a basi ridotte per l'approssimazione di EDP parametrizzate ..	589
19.1	EDP parametrizzate: il caso ellittico coercivo	591
19.1.1	Un esempio preliminare	593
19.2	Principali componenti di un metodo a basi ridotte	594
19.3	Il metodo a basi ridotte	597
19.3.1	Spazi a basi ridotte	598
19.3.2	Proiezione di Galerkin	599
19.3.3	Procedura Offline-Online	601
19.4	Interpretazione algebrica e geometrica del problema RB	602
19.4.1	Interpretazione algebrica del problema (G-RB)	603
19.4.2	Interpretazione geometrica del problema (G-RB)	605
19.4.3	Formulazioni alternative: problemi Least-Squares e di Petrov-Galerkin	608
19.5	Costruzione degli spazi ridotti	610
19.5.1	Algoritmo greedy	610
19.5.2	Proper Orthogonal Decomposition (POD)	613
19.6	Analisi a priori dell'errore	617
19.7	Stima a posteriori dell'errore	620
19.7.1	Una relazione tra l'errore e il residuo	620
19.7.2	Stimatore dell'errore	621
19.7.3	Calcolo della costante di coercività discreta	622

19.8	Valutazione efficiente della stima dell'errore	622
19.8.1	Calcolo della norma del residuo	624
19.8.2	Valutazione del fattore di stabilità	624
19.9	Un esempio numerico	625
19.10	Esercizi	629
Riferimenti bibliografici		631
Indice analitico		645