

# **UNITEXT – La Matematica per il 3+2**

Volume 105

## **Editor-in-Chief**

A. Quarteroni

## **Series Editors**

L. Ambrosio

P. Biscari

C. Ciliberto

C. De Lellis

M. Ledoux

V. Panaretos

W.J. Runggaldier

[www.springer.com/series/5418](http://www.springer.com/series/5418)

Alfio Quarteroni • Fausto Saleri • Paola Gervasio

# Calcolo Scientifico

Esercizi e problemi risolti  
con MATLAB e Octave

6a edizione

 Springer

Alfio Quarteroni  
École Polytechnique Fédérale (EPFL)  
Lausanne, Switzerland  
and Politecnico di Milano  
Milan, Italy

Paola Gervasio  
DICATAM  
Università degli Studi di Brescia  
Brescia, Italy

Fausto Saleri (1965–2007)  
MOX  
Politecnico di Milano  
Milan, Italy

ISSN versione cartacea: 2038-5722  
UNITEXT – La Matematica per il 3+2  
ISBN 978-88-470-3952-0  
DOI 10.1007/978-88-470-3953-7

ISSN versione elettronica: 2038-5757  
ISBN 978-88-470-3953-7 (eBook)

Springer Milan Heidelberg New York Dordrecht London

© Springer-Verlag Italia Srl. 2002, 2004, 2006, 2008, 2012, 2017

Quest'opera è protetta dalla legge sul diritto d'autore e la sua riproduzione è ammessa solo ed esclusivamente nei limiti stabiliti dalla stessa. Le fotocopie per uso personale possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascun volume dietro pagamento alla SIAE del compenso previsto dall'art. 68. Le riproduzioni per uso non personale e/o oltre il limite del 15% potranno avvenire solo a seguito di specifica autorizzazione rilasciata da AIDRO, Corso di Porta Romana n. 108, Milano 20122, e-mail [segreteria@aidro.org](mailto:segreteria@aidro.org) e sito web [www.aidro.org](http://www.aidro.org).

Tutti i diritti, in particolare quelli relativi alla traduzione, alla ristampa, all'utilizzo di illustrazioni e tabelle, alla citazione orale, alla trasmissione radiofonica o televisiva, alla registrazione su microfilm o in database, o alla riproduzione in qualsiasi altra forma (stampata o elettronica) rimangono riservati anche nel caso di utilizzo parziale. La violazione delle norme comporta le sanzioni previste dalla legge.

L'utilizzo in questa pubblicazione di denominazioni generiche, nomi commerciali, marchi registrati, ecc. anche se non specificatamente identificati, non implica che tali denominazioni o marchi non siano protetti dalle relative leggi e regolamenti.

*Immagine di copertina:* La figura di copertina rappresenta l'approssimazione di un'autofunzione dell'operatore di Laplace ottenuta con il metodo degli elementi spettrali.

Questa edizione è pubblicata da SpringerNature  
La società registrata è Springer-Verlag Italia Srl

*A Fausto*




---

## Prefazione alle precedenti edizioni

Questo testo è una introduzione al Calcolo Scientifico. In esso vengono illustrati metodi numerici per la risoluzione con il calcolatore di alcune classi di problemi della Matematica che non si possono risolvere con “carta e penna”. In particolare, mostreremo come calcolare gli zeri o l’integrale di funzioni continue, come risolvere sistemi lineari, come approssimare funzioni con polinomi, ma anche come trovare delle buone approssimazioni della soluzione di equazioni differenziali ordinarie e di problemi ai limiti.


A tale scopo, nel Capitolo 1 illustreremo le principali regole del gioco che i calcolatori seguono quando memorizzano i numeri reali ed i numeri complessi, i vettori e le matrici, e come operano con essi.

Al fine di rendere concreta ed incisiva la nostra trattazione adotteremo il linguaggio di programmazione MATLAB<sup>®1</sup> come fedele compagno di viaggio. Scopriremo gradualmente i suoi principali comandi e costrutti. Grazie ad esso mostreremo come rendere esecutivi tutti gli algoritmi che via via introdurremo e potremo immediatamente fornire un riscontro “quantitativo” alle loro proprietà teoriche, quali stabilità, accuratezza e complessità. Saremo inoltre in grado di risolvere al calcolatore numerosi quesiti e problemi che verranno posti attraverso esercizi ed esempi, anche con riferimento a specifiche applicazioni.

Per rendere più agevole la lettura useremo alcuni accorgimenti tipografici.<sup>2</sup> A margine del testo riporteremo il comando MATLAB in corrispondenza della linea in cui tale comando è richiamato per la prima volta. Inoltre, useremo il simbolo  per segnalare degli esercizi, il simbolo  per segnalare un programma ed il simbolo  per attirare

<sup>1</sup> MATLAB è un marchio registrato di The MathWorks, Inc. Per ulteriori informazioni su MATLAB si prega di contattare: The MathWorks, 3 Apple Hill Drive, Natick, MA 01760 20098, Tel: 001+508-647-7000, Fax: 001+508-647-7001.

<sup>2</sup> Per le icone utilizzate si veda il sito <http://www.iconarchive.com>.


l'attenzione su un comportamento critico o sorprendente di un algoritmo o di un procedimento. Le formule particolarmente rilevanti sono incorniciate. Infine, il simbolo  segnala la presenza di una scheda riassuntiva dei concetti e delle conclusioni esposte nei paragrafi immediatamente precedenti.

Alla fine di ogni capitolo è situato un paragrafo nel quale si menzionano gli argomenti non trattati e si indicano dei riferimenti bibliografici per l'approfondimento del materiale presentato. Le soluzioni di tutti gli esercizi sono raccolte nel capitolo conclusivo.

Faremo spesso riferimento ai testi [QSS07] e [QSSG14] per i rimandi di carattere teorico o per gli approfondimenti, mentre per una descrizione completa di MATLAB rimandiamo a [HH17]. Tutti i programmi presenti nel volume possono essere trovati all'indirizzo:

[mox.polimi.it/qs](http://mox.polimi.it/qs).

Questo testo è espressamente concepito per i corsi brevi del nuovo ordinamento delle Facoltà di Ingegneria e di Scienze. Non è richiesto nessun particolare requisito, fatta eccezione ovviamente per un corso elementare di Analisi Matematica.

In ogni caso nel primo capitolo richiamiamo i principali risultati di Analisi e di Geometria di cui verrà fatto uso nel testo. Gli argomenti meno elementari, non indispensabili cioè ad un percorso formativo introduttivo, sono segnalati con il simbolo .

La terza edizione si differenzia dalla precedente per la presenza di un maggior numero di problemi applicativi e per diverse integrazioni riguardanti la risoluzione di sistemi lineari e non lineari e l'approssimazione di equazioni differenziali ordinarie. Desideriamo ringraziare tutti i nostri colleghi e collaboratori del MOX (Centro di Modellistica e Calcolo Scientifico) del Politecnico di Milano che hanno consentito di rendere più ricco ed interessante questo volume. Ringraziamo inoltre Paola Gervasio, Carlo D'Angelo e Nicola Parolini che si sono prestati ad un'attenta rilettura della terza edizione, contribuendo a migliorarne la chiarezza espositiva.

Losanna e Milano  
febbraio 2006

*Alfio Quarteroni*  
*Fausto Saleri*

La quarta edizione di questo testo si caratterizza per numerose e significative novità.

L'ambiente MATLAB è stato affiancato da Octave, una reimplementazione di MATLAB distribuita gratuitamente secondo le condizioni d'uso della GNU General Public License. Tutti gli esercizi e i problemi sono risolti con programmi che possono essere eseguiti in entrambi gli ambienti.

I capitoli relativi all'approssimazione di problemi alle derivate parziali, ellittici, parabolici ed iperbolici, sono stati notevolmente arricchiti da nuovi tipi di equazioni (fra cui quelle di trasporto e di diffusione-trasporto) nonché da nuovi metodi di discretizzazione alle differenze finite ed agli elementi finiti.

Sono stati eliminati alcuni accorgimenti tipografici a margine del testo, al fine di rendere più fruibile ed autonomo l'approccio agli argomenti trattati da parte del lettore, sia esso docente o studente.

Infine sono stati aggiunti nuovi problemi di interesse applicativo e numerosi esercizi con relative tracce di soluzioni.

Tutto questo è stato reso possibile grazie al contributo straordinario (per quantità e qualità) di Paola Gervasio. A lei va il mio ringraziamento e la mia stima.

Losanna e Milano  
giugno 2008

*Alfio Quarteroni*

La quinta edizione si caratterizza per l'aggiunta di un nuovo capitolo sull'ottimizzazione numerica. In esso vengono presentate, discusse ed analizzate diverse famiglie di metodi per la minimizzazione di funzioni di una o più variabili. Per problemi di minimizzazione non vincolata sono presentati i metodi *derivative free*, quelli di discesa (o di tipo *line search*) e quelli di tipo *trust region*. Per quanto riguarda la minimizzazione vincolata abbiamo limitato la scelta a due metodi, quello della penalizzazione e quello della Lagrangiana aumentata.

Coerentemente con lo stile del libro, anche questo capitolo è corredato di esempi, esercizi e programmi eseguibili negli ambienti MATLAB ed Octave.

L'introduzione di questo argomento ha reso necessario rinumerare alcuni capitoli rispetto alle edizioni precedenti. Inoltre alcuni capitoli sono stati arricchiti con nuove sezioni di carattere sia teorico che pratico.

Ricordiamo infine ai lettori che tutti i programmi presentati in questo volume possono essere scaricati dalla pagina web

<http://mox.polimi.it/qs>

Losanna, Milano e Brescia  
luglio 2012

*Alfio Quarteroni*  
*Paola Gervasio*



---

## Prefazione alla sesta edizione

In questa sesta edizione abbiamo rivisitato gli ambienti di programmazione MATLAB e Octave, aggiornandoli e unificandoli, laddove possibile, sotto un unico *logo* a cui è stato dato il nome di fantasia МАТЕСОСТ. Questo stratagemma ci ha consentito di operare numerose semplificazioni a livello espositivo.

Diversi capitoli sono stati integrati con nuovi sviluppi. In particolare segnaliamo: l'introduzione della formula di interpolazione baricentrica nel Capitolo 3 e del Metodo Monte Carlo per l'integrazione numerica nel Capitolo 4; una nuova e più efficace presentazione dei metodi iterativi per sistemi lineari nel Capitolo 5; una più approfondita analisi di stabilità per il problema di Cauchy nel Capitolo 8; un approfondimento dell'analisi del metodo degli elementi finiti nel Capitolo 9. Inoltre sono stati introdotti nuovi esempi, con particolare riferimento ad applicazioni di interesse reale e svariati esercizi con relative soluzioni.

Come sempre, i lettori possono scaricare tutti i programmi presentati in questo volume dalla pagina web

<http://mox.polimi.it/qs>

Losanna, Milano e Brescia  
giugno 2017

*Alfio Quarteroni*  
*Paola Gervasio*

---

# Indice

<b>1</b>	<b>Quel che non si può non sapere</b>	1
1.1	Gli ambienti MATLAB e Octave	1
1.2	I numeri reali	3
1.2.1	Come si rappresentano	4
1.2.2	Come si opera con i numeri floating-point	6
1.3	I numeri complessi	9
1.4	Le matrici	11
1.4.1	I vettori	15
1.4.2	Autovalori e autovettori di una matrice	17
1.5	Le strutture e i cell-array	17
1.6	Le funzioni	19
1.6.1	Gli zeri	22
1.6.2	I polinomi	23
1.6.3	L'integrale e la derivata	25
1.7	Errare non è solo umano	28
1.7.1	Parliamo di costi	32
1.8	Qualche parola in più su MATLAB e Octave	35
1.9	Programmare in MATLAB e Octave	39
1.10	Cosa non vi abbiamo detto	43
1.11	Esercizi	44
<b>2</b>	<b>Equazioni non lineari</b>	47
2.1	Alcuni problemi	47
2.2	Il metodo di bisezione	50
2.3	Il metodo di Newton	54
2.3.1	Come arrestare il metodo di Newton	56
2.4	Il metodo delle secanti	58
2.5	I sistemi di equazioni non lineari	59
2.6	Iterazioni di punto fisso	64
2.6.1	Come arrestare un'iterazione di punto fisso	69

2.7	Accelerazione con il metodo di Aitken . . . . .	70
2.8	Polinomi algebrici . . . . .	74
	2.8.1 Il metodo di Hörner . . . . .	75
	2.8.2 Il metodo di Newton-Hörner . . . . .	77
2.9	Cosa non vi abbiamo detto . . . . .	79
2.10	Esercizi . . . . .	81
<b>3</b>	<b>Approssimazione di funzioni e di dati . . . . .</b>	<b>85</b>
3.1	Alcuni problemi . . . . .	85
3.2	Approssimazione con i polinomi di Taylor . . . . .	87
3.3	Interpolazione . . . . .	89
	3.3.1 Interpolazione polinomiale di Lagrange . . . . .	90
	3.3.2 Stabilità dell'interpolazione polinomiale . . . . .	95
	3.3.3 Interpolazione rispetto ai nodi di Chebyshev . . . . .	96
	3.3.4 Formula di interpolazione baricentrica . . . . .	98
	3.3.5 Interpolazione trigonometrica e FFT . . . . .	101
3.4	Interpolazione lineare composta . . . . .	107
3.5	Approssimazione con funzioni <i>spline</i> . . . . .	108
3.6	Il metodo dei minimi quadrati . . . . .	113
3.7	Cosa non vi abbiamo detto . . . . .	118
3.8	Esercizi . . . . .	119
<b>4</b>	<b>Differenziazione ed integrazione numerica . . . . .</b>	<b>123</b>
4.1	Alcuni problemi . . . . .	123
4.2	Approssimazione delle derivate . . . . .	126
4.3	Integrazione numerica . . . . .	130
	4.3.1 La formula del punto medio . . . . .	130
	4.3.2 La formula del trapezio . . . . .	133
	4.3.3 La formula di Simpson . . . . .	134
4.4	Formule di quadratura interpolatorie . . . . .	135
4.5	La formula di Simpson adattiva . . . . .	140
4.6	Metodi Monte Carlo per l'integrazione numerica . . . . .	143
4.7	Cosa non vi abbiamo detto . . . . .	145
4.8	Esercizi . . . . .	146
<b>5</b>	<b>Sistemi lineari . . . . .</b>	<b>151</b>
5.1	Alcuni problemi . . . . .	151
5.2	Sistemi e complessità . . . . .	156
5.3	Il metodo di fattorizzazione LU . . . . .	158
5.4	La tecnica del pivoting . . . . .	169
	5.4.1 Il <i>fill-in</i> di una matrice . . . . .	172
5.5	Quanto è accurata la risoluzione di un sistema lineare? . . . . .	174
5.6	Come risolvere un sistema tridiagonale . . . . .	178
5.7	Sistemi sovradeterminati . . . . .	179
5.8	Cosa si nasconde dietro al comando <code>\</code> . . . . .	182

5.9	Metodi iterativi . . . . .	183
5.9.1	Come costruire un metodo iterativo . . . . .	184
5.10	I metodi del Gradiente e del Gradiente Coniugato . . . . .	190
5.10.1	Precondizionatori e metodi iterativi precondizionati . . . . .	197
5.10.2	Il caso non simmetrico . . . . .	204
5.11	Quando conviene arrestare un metodo iterativo . . . . .	208
5.12	Ed ora: metodi diretti o iterativi? . . . . .	211
5.13	Cosa non vi abbiamo detto . . . . .	216
5.14	Esercizi . . . . .	217
<b>6</b>	<b>Autovalori ed autovettori . . . . .</b>	<b>221</b>
6.1	Alcuni problemi . . . . .	222
6.2	Il metodo delle potenze . . . . .	226
6.2.1	Analisi di convergenza . . . . .	229
6.3	Generalizzazione del metodo delle potenze . . . . .	231
6.4	Come calcolare lo shift . . . . .	234
6.5	Calcolo di tutti gli autovalori . . . . .	237
6.6	Cosa non vi abbiamo detto . . . . .	240
6.7	Esercizi . . . . .	241
<b>7</b>	<b>Ottimizzazione numerica . . . . .</b>	<b>243</b>
7.1	Alcuni problemi . . . . .	244
7.2	Ottimizzazione non vincolata . . . . .	247
7.3	Metodi <i>derivative free</i> . . . . .	249
7.3.1	I metodi della sezione aurea e dell'interpolazione quadratica . . . . .	249
7.3.2	Il metodo di Nelder e Mead . . . . .	254
7.4	Il metodo di Newton . . . . .	257
7.5	Metodi di discesa o <i>line-search</i> . . . . .	258
7.5.1	Direzioni di discesa . . . . .	259
7.5.2	Strategie per il calcolo del passo $\alpha_k$ . . . . .	261
7.5.3	Il metodo di discesa con direzioni di Newton . . . . .	267
7.5.4	Metodi di discesa con direzioni quasi-Newton . . . . .	268
7.5.5	Metodi di discesa del gradiente e del gradiente coniugato . . . . .	270
7.6	Metodi di tipo <i>trust region</i> . . . . .	272
7.7	Il metodo dei minimi quadrati non lineari . . . . .	280
7.7.1	Il metodo di Gauss-Newton . . . . .	281
7.7.2	Il metodo di Levenberg-Marquardt . . . . .	284
7.8	Ottimizzazione vincolata . . . . .	285
7.8.1	Il metodo di penalizzazione . . . . .	291
7.8.2	Il metodo della Lagrangiana aumentata . . . . .	296
7.9	Cosa non vi abbiamo detto . . . . .	300
7.10	Esercizi . . . . .	300

<b>8</b>	<b>Equazioni differenziali ordinarie</b> .....	303
8.1	Alcuni problemi .....	303
8.2	Il problema di Cauchy .....	306
8.3	I metodi di Eulero e il metodo di Crank-Nicolson .....	308
8.4	Convergenza, Consistenza, Stabilità .....	311
	8.4.1 Consistenza .....	311
	8.4.2 Stabilità .....	313
	8.4.3 Analisi di convergenza per il metodo di Eulero in avanti .....	315
	8.4.4 Stimatori dell'errore per il metodo di Eulero in avanti .....	318
	8.4.5 Analisi di convergenza per metodi ad un passo ..	320
8.5	Stabilità su intervalli illimitati .....	322
	8.5.1 La regione di assoluta stabilità .....	325
8.6	L-stabilità .....	326
8.7	L'assoluta stabilità controlla le perturbazioni .....	328
8.8	Adattività del passo per il metodo di Eulero in avanti ..	334
8.9	Metodi di ordine elevato .....	339
	8.9.1 I metodi Runge-Kutta .....	339
	8.9.2 I metodi multistep .....	342
	8.9.3 I metodi predictor-corrector .....	347
8.10	Sistemi di equazioni differenziali .....	350
	8.10.1 Equazioni differenziali di ordine superiore a uno	352
8.11	Alcuni problemi <i>stiff</i> .....	356
8.12	Alcuni esempi .....	362
	8.12.1 Il pendolo sferico .....	362
	8.12.2 Il problema dei tre corpi .....	365
	8.12.3 Cinetica chimica .....	368
8.13	Cosa non vi abbiamo detto .....	369
8.14	Esercizi .....	370
<b>9</b>	<b>Metodi numerici per problemi ai limiti stazionari ed evolutivi</b> .....	373
9.1	Alcuni problemi .....	374
9.2	Il problema di Poisson con condizioni di Dirichlet e di Neumann .....	376
9.3	Approssimazione alle differenze finite del problema di Poisson monodimensionale .....	378
	9.3.1 Analisi dell'approssimazione con differenze finite del problema di Poisson monodimensionale .....	380
9.4	Approssimazione alle differenze finite di un problema di diffusione-trasporto a trasporto dominante .....	383
9.5	Approssimazione agli elementi finiti del problema di Poisson monodimensionale .....	385
	9.5.1 Cenni all'analisi del metodo agli elementi finiti ..	388

9.6	Approssimazione agli elementi finiti di un problema di diffusioni-trasporto a trasporto dominante . . . . .	391
9.7	Approssimazione alle differenze finite del problema di Poisson in 2 dimensioni . . . . .	393
9.7.1	Analisi dell'approssimazione con differenze finite del problema di Poisson in 2 dimensioni. . . . .	399
9.8	Approssimazione dell'equazione del calore monodimensionale . . . . .	401
9.8.1	Approssimazione alle differenze finite dell'equazione del calore monodimensionale . . . . .	401
9.8.2	Approssimazione ad elementi finiti dell'equazione del calore monodimensionale . . . . .	407
9.9	Equazioni iperboliche: un problema di trasporto scalare. . . . .	411
9.9.1	Metodi alle differenze finite per la discretizzazione dell'equazione scalare iperbolica . . . . .	413
9.9.2	Analisi dei metodi alle differenze finite per l'equazione scalare iperbolica . . . . .	416
9.9.3	Discretizzazione in spazio dell'equazione scalare iperbolica con elementi finiti. . . . .	422
9.10	L'equazione delle onde . . . . .	423
9.10.1	Discretizzazione dell'equazione delle onde . . . . .	425
9.11	Cosa non vi abbiamo detto . . . . .	430
9.12	Esercizi . . . . .	430
<b>10</b>	<b>Soluzione degli esercizi proposti . . . . .</b>	<b>435</b>
10.1	Capitolo 1 . . . . .	435
10.2	Capitolo 2 . . . . .	439
10.3	Capitolo 3 . . . . .	451
10.4	Capitolo 4 . . . . .	457
10.5	Capitolo 5 . . . . .	464
10.6	Capitolo 6 . . . . .	474
10.7	Capitolo 7 . . . . .	477
10.8	Capitolo 8 . . . . .	485
10.9	Capitolo 9 . . . . .	495
	<b>Riferimenti bibliografici . . . . .</b>	<b>507</b>
	<b>Indice analitico . . . . .</b>	<b>515</b>

---

## Indice dei programmi MATLAB ed Octave

Tutti i programmi presenti in questo volume sono eseguibili in entrambi gli ambienti MATLAB ed Octave e possono essere scaricati dalla pagina

<http://mox.polimi.it/qs>

2.1	<b>bisection</b> : il metodo di bisezione .....	52
2.2	<b>newton</b> : il metodo di Newton .....	57
2.3	<b>newtonsys</b> : il metodo di Newton per un sistema non lineare .....	60
2.4	<b>broyden</b> : il metodo di Broyden .....	62
2.5	<b>aitken</b> : il metodo di Aitken .....	72
2.6	<b>horner</b> : il metodo di divisione sintetica .....	76
2.7	<b>newtonhorner</b> : il metodo di Newton-Hörner .....	78
3.1	<b>barycentric</b> : interpolazione baricentrica .....	100
3.2	<b>cubicspline</b> : spline cubica interpolante .....	110
4.1	<b>midpointc</b> : formula composta del punto medio .....	132
4.2	<b>simpsonc</b> : formula composta di Simpson .....	135
4.3	<b>simpadpt</b> : formula di Simpson adattiva .....	142
5.1	<b>lugauss</b> : la fattorizzazione LU di Gauss .....	164
5.2	<b>itermeth</b> : metodo iterativo generico .....	187
5.3	<b>gradient</b> : il metodo del gradiente (precondizionato) ....	200
5.4	<b>cg</b> : il metodo del gradiente coniugato (precondizionato) .	202
6.1	<b>eigpower</b> : il metodo delle potenze .....	227
6.2	<b>invshift</b> : il metodo delle potenze inverse con shift .....	232
6.3	<b>gershcircles</b> : i cerchi di Gershgorin .....	234
6.4	<b>qrbasic</b> : il metodo delle iterazioni QR .....	238
7.1	<b>golden</b> : il metodo della sezione aurea .....	251
7.2	<b>backtrack</b> : la strategia di backtracking .....	264

7.3	<b>descent</b> : il metodo di discesa .....	265
7.4	<b>trustregion</b> : il metodo trust region .....	277
7.5	<b>gaussnewton</b> : il metodo di Gauss-Newton .....	282
7.6	<b>penalty</b> : il metodo di penalizzazione .....	293
7.7	<b>auglagrange</b> : il metodo della Lagrangiana aumentata...	297
8.1	<b>feuler</b> : il metodo di Eulero in avanti .....	309
8.2	<b>beuler</b> : il metodo di Eulero all'indietro .....	309
8.3	<b>cranknic</b> : il metodo di Crank-Nicolson .....	310
8.4	<b>predcor</b> : un generico metodo predictor-corrector .....	349
8.5	<b>feonestep</b> : un passo del metodo di Eulero in avanti .....	350
8.6	<b>beonestep</b> : un passo del metodo di Eulero all'indietro ..	350
8.7	<b>cnonestep</b> : un passo del metodo di Crank-Nicolson .....	350
8.8	<b>newmark</b> : il metodo di Newmark .....	355
8.9	<b>fvinc</b> : termine forzante per il problema del pendolo sferico .....	363
8.10	<b>threebody</b> : termine forzante per il problema semplificato dei tre corpi .....	367
9.1	<b>bvp_fd_dir_1d</b> : approssimazione di un problema ai limiti di diffusione, trasporto e reazione con il metodo delle differenze finite .....	380
9.2	<b>bvp_fe_dir_1d</b> : approssimazione di un problema ai limiti di diffusione, trasporto e reazione con il metodo degli elementi finiti di grado 1 .....	392
9.3	<b>poisson_fd_2d</b> : approssimazione del problema di Poisson con condizioni di Dirichlet usando il metodo delle differenze finite a 5 punti .....	397
9.4	<b>heat_fd_1d</b> : $\theta$ -metodo e differenze finite per l'equazione del calore monodimensionale .....	404
9.5	<b>heat_fe_1d</b> : $\theta$ -metodo ed elementi finiti di grado 1 per l'equazione del calore monodimensionale .....	410
9.6	<b>newmarkwave</b> : metodo di Newmark per l'equazione delle onde .....	426
10.1	<b>fixedpoint</b> : il metodo di punto fisso .....	450
10.2	<b>glcomp1</b> : formula composta di quadratura di Gauss-Legendre con $n = 1$ .....	459
10.3	<b>itermethb</b> : metodo iterativo per sistemi lineari .....	472
10.4	<b>rk2</b> : metodo Runge-Kutta esplicito di ordine 2 (o di Heun)	489
10.5	<b>rk3</b> : metodo Runge-Kutta esplicito di ordine 3 .....	489
10.6	<b>bvp_fd_neu_1d</b> : approssimazione di un problema ai limiti di Neumann con differenze finite .....	498
10.7	<b>bvp_fd_upwind_1d</b> : approssimazione del problema di diffusione-trasporto con differenze finite upwind .....	499
10.8	<b>hyper</b> : gli schemi Lax-Friedrichs, Lax-Wendroff e upwind	505