

Leitfäden der Informatik

Rolf Wanka

Approximationsalgorithmen

Leitfäden der Informatik

Herausgegeben von

Prof. Dr. Bernd Becker
Prof. Dr. Friedemann Mattern
Prof. Dr. Heinrich Müller
Prof. Dr. Wilhelm Schäfer
Prof. Dr. Dorothea Wagner
Prof. Dr. Ingo Wegener

Die Leitfäden der Informatik behandeln

- Themen aus der Theoretischen, Praktischen und Technischen Informatik entsprechend dem aktuellen Stand der Wissenschaft in einer systematischen fundierten Darstellung des jeweiligen Gebietes.
- Methoden und Ergebnisse der Informatik, aufgearbeitet und dargestellt aus Sicht der Anwendungen in einer für Anwender verständlichen, exakten und präzisen Form.

Die Bände der Reihe wenden sich zum einen als Grundlage und Ergänzung zu Vorlesungen der Informatik an Studierende und Lehrende in Informatik-Studiengängen an Hochschulen, zum anderen an „Praktiker“, die sich einen Überblick über die Anwendung der Informatik (-Methoden) verschaffen wollen; sie dienen aber auch in Wirtschaft, Industrie und Verwaltung tätigen Informatikern und Informatikerinnen zur Fortbildung in praxisrelevanten Fragestellungen ihres Faches.

Rolf Wanka

Approximations- algorithmen

Eine Einführung



Teubner

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <<http://dnb.ddb.de>> abrufbar.

Prof. Dr. Rolf Wanka

Geboren 1964 in Hagen. 1983-1989 Studium der Informatik mit Nebenfach Maschinenbau an der Universität Dortmund. Diplom 1989. 1989-2004 wissenschaftlicher Mitarbeiter, später wissenschaftlicher Assistent an der Universität Paderborn. 1994 Promotion. 1996/1997 PostDoc am International Computer Science Institute der University of California, Berkeley. Seit 2004 Professor für Effiziente Algorithmen und Kombinatorische Optimierung an der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg.

E-Mail: rwanka@cs.fau.de

1. Auflage Oktober 2006

Alle Rechte vorbehalten

© B.G. Teubner Verlag / GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2006

Lektorat: Ulrich Sandten / Kerstin Hoffmann

Der B.G. Teubner Verlag ist ein Unternehmen der Fachverlagsgruppe BertelsmannSpringer.
www.teubner.de



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: Ulrike Weigel, www.CorporateDesignGroup.de

Druck und buchbinderische Verarbeitung: Strauss Offsetdruck, Mörlenbach

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Printed in Germany

ISBN-10 3-519-00444-5

ISBN-13 978-3-519-00444-8

Im Andenken an meinen Vater

Vorwort

Die Theorie der NP-Vollständigkeit legt nahe, daß viele wichtige kombinatorische Probleme exakt nur durch langsame Algorithmen gelöst werden können. Bereits in ihrem legendären Buch „Computers and Intractability – A Guide to the Theory of NP-Completeness“ empfahlen Garey und Johnson, schnelle, aber suboptimale Verfahren zu entwerfen und zu benutzen.

Darauf aufbauend hat sich das hochinteressante Gebiet der Approximationsalgorithmen entwickelt. Viele Methoden zum Entwurf und zur Analyse von kombinatorischen Algorithmen, die schnell Lösungen berechnen, die zwar nicht optimal sind, aber beweisbare Qualität haben, wurden entwickelt. Eine reiche innere Struktur dieser Probleme entfaltet sich vor den Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern, die sich diesem schönen Gebiet widmen.

Dieses Buch entstand aus den Vorlesungen über Approximationsalgorithmen, die ich regelmäßig an der Universität Paderborn und der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg gehalten habe und halte. Für das gewissenhafte und erfrischend kritische Durcharbeiten einer frühen Version bin ich Silvia Götz sehr dankbar. Ihre Anmerkungen haben den Aufbau des Buchs erheblich beeinflußt.

Eine englische Übersetzung einer weiteren frühen Version fertigte Christian Scheideler an, die er als Grundlage seiner Vorlesung an der Johns Hopkins University in Baltimore benutzt hat. Für seine Anmerkungen bin ich ebenfalls sehr dankbar.

Die Voraussetzungen zum Verständnis dieses Buches sind eine Ausbildung in grundlegenden Algorithmen und die Kenntnis der Grundbegriffe der NP-Vollständigkeitstheorie, wie sie in den ersten zwei Jahren eines Informatik-Studiums vermittelt werden. Es richtet sich an Hörerinnen und Hörer eines universitären Masterstudiengangs der Informatik und an Hörerinnen und Hörer eines universitären Bachelorstudiengangs der Informatik im dritten Jahr.

Das Buch besteht aus zwei Teilen. Im ersten Teil werden die grundlegenden Begriffe vorgestellt und anhand ausführlicher Beispiele mit Leben erfüllt.

Der zweite Teil präsentiert Techniken, die beim Algorithmen-Design helfen, für neue Probleme Approximationsalgorithmen zusammen mit Qualitätsaussagen zu entwickeln. Randomisierte Verfahren, lineare Optimierung und Markov-Ketten seien als ein paar Schlagwörter genannt.

Die Leserin und der Leser soll interessante Algorithmen kennenlernen und in die Fachsprache

und Techniken der Approximationsalgorithmen eingeführt werden. Der Spaß und die Freude, die man bei der Entdeckung neuer Algorithmen und Beweise empfindet, soll nachvollziehbar werden. Mit dem Basiswissen aus diesem Buch hat die Leserin und der Leser das Rüstzeug gelernt, um die Veröffentlichungen – im Wissenschaftsjargon *Papers* genannt – auf den einschlägigen Konferenzen verfolgen und sie sich inhaltlich erschließen zu können. Solche Konferenzen sind die *International Workshops on Approximation Algorithms for Combinatorial Optimization Problems and on Randomization and Computation* (RANDOM-APPROX), der *Workshop on Approximation and Online Algorithms* (WAO) und die klassischen Theorie- und Algorithmen-Konferenzen wie das *ACM Symposium on Theory of Computing* (STOC), das *IEEE Symposium on Foundations of Computer Science* (FOCS), das *European Symposium on Algorithms* (ESA) und das *ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms* (SODA)

Mir persönlich gefällt am Gebiet der Approximationsalgorithmen am besten, daß man die berechnete Lösung zur optimalen Lösung in Beziehung setzen kann, ohne die optimale Lösung zu kennen. Neben der Vorstellung eines *richtigen* Resultats liegt mir auch daran, die *Schönheit*, die in diesen Algorithmen und ihren Analysen angelegt ist, der Leserin und dem Leser zu vermitteln.

Parallele Approximationsalgorithmen werden leider noch nicht abgedeckt. Die interessierte Leserin und der interessierte Leser findet sehr viel Material zu diesem spannenden Gebiet in der Monographie „Paradigms for fast parallel approximability“ von Díaz *et al.*

Dieses Buch ist in der klassischen Orthographie aufgeschrieben. Reiner Kunze hat in seiner Denkschrift zur Rechtschreibreform „Die Aura der Wörter“ meisterhaft dargelegt, daß man nicht verordnen kann, wie Wörter zu schreiben sind. Wörter *wollen* so geschrieben werden, wie sie geschrieben werden. Solange es vorkommt, daß man eine Aufgabe richtig stellen oder richtigstellen muß, solange wird auch die klassische Orthographie die richtige Orthographie bleiben.

Für alle Anmerkungen bin ich sehr dankbar. Diese können an rwanka@cs.fau.de geschickt werden.

Zu guter Letzt möchte ich Frau Hoffmann und Herrn Sandten vom Teubner Verlag für die Geduld und konstruktive Zusammenarbeit danken.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	VII
I Grundlagen	1
1 Schnelle Algorithmen und hartnäckige Probleme	3
1.1 Lösungen berechnen und überprüfen in Polynomialzeit: P vs. NP	4
1.2 Approximationsalgorithmen: Schnell, aber nicht optimal	10
1.3 Literatur zu Kapitel 1	12
Übungen zu Kapitel 1	14
2 Approximation mit absoluter Gütegarantie	17
2.1 Graphfärbbarkeit	18
2.1.1 Knotenfärbungen	19
Knotenfärbung beliebiger Graphen	19
Knotenfärbung planarer Graphen	22
2.1.2 Kantenfärbung beliebiger Graphen	24
2.2 Ein Unmöglichkeitsergebnis für das Rucksackproblem	28
2.3 Literatur zu Kapitel 2	30
Übungen zu Kapitel 2	31
3 Approximation mit relativer Gütegarantie	35
3.1 Das metrische <i>Traveling Salesperson Problem</i>	37
3.1.1 Einfüge-Heuristiken	38
3.1.2 Christofides' Algorithmus	42
3.1.3 Abschließende Bemerkungen	46

3.2	Unabhängige Mengen und noch einmal Knotenfärbungen	46
3.2.1	Das Independent Set Problem	46
	Allgemeine Analyse von GREEDYIS	48
	Analyse von GREEDYIS in Abhängigkeit von der chromatischen Zahl	50
3.2.2	Ein besserer Knotenfärbungsalgorithmus	51
3.3	Ein Unmöglichkeitsergebnis für das <i>Traveling Salesperson Problem</i>	52
3.4	Literatur zu Kapitel 3	55
	Übungen zu Kapitel 3	57
4	Approximationsschemata	65
4.1	Ein pseudopolynomieller exakter Algorithmus für das Rucksackproblem	67
4.2	Ein streng polynomielles Approximationsschema für das Rucksackproblem	70
4.3	Unmöglichkeitsergebnisse für Approximationsschemata	72
4.4	Literatur zu Kapitel 4	74
	Übungen zu Kapitel 4	76
5	Komplexitätstheoretische Zwischenbetrachtungen: Klassen & eine Hierarchie	81
5.1	Literatur zu Kapitel 5	85
	Übungen zu Kapitel 5	86
II	Techniken	89
6	Techniken für randomisierte Approximationsalgorithmen	91
6.1	Die probabilistische Methode	92
6.2	<i>Randomized Rounding</i>	96
6.2.1	Die Arithmetisierung von Max-SAT	96
6.2.2	Von der rationalen zur ganzzahligen Lösung	98
6.3	Der hybride Ansatz: Kombination mehrerer Verfahren	101
6.4	Semidefinite Optimierung	103
6.4.1	Definitionen und Resultate der Semidefiniten Optimierung	104
6.4.2	Das Problem des maximalen Schnitts	105
6.5	Derandomisierung: Die Methode der bedingten Erwartungswerte	111
6.6	Literatur zu Kapitel 6	116

Übungen zu Kapitel 6	118
7 Lineare Optimierung und Approximationsalgorithmen	125
7.1 Die Ganzzahligkeitslücke und ihre Beziehung zur relativen Güte	126
7.2 Das SETCOVER-Problem und seine Arithmetisierung	127
7.3 Deterministisches Runden	131
7.4 <i>Randomized Rounding</i> : Von Monte Carlo nach Las Vegas	132
7.5 Dualität	134
7.5.1 Grundlagen	135
7.5.2 Dualität und Approximationsalgorithmen	137
Einsatz im <i>Entwurf</i> von Algorithmen: Dual Fitting	139
Einsatz in der <i>Analyse</i> von Algorithmen	139
7.5.3 Anwendung der Dualität auf das Problem SETCOVER	139
Entwurf: Dual Fitting	140
Analyse: Ein besserer, vermutlich sogar der bestmögliche Ansatz . . .	143
7.6 Literatur zu Kapitel 7	145
Übungen zu Kapitel 7	147
8 <i>Approximate Counting</i> und die Monte-Carlo-Methode	151
8.1 Kombinatorische Zählprobleme und #P-Vollständigkeit	152
8.2 Relative Gütegarantie, die Expansion und die Wahl des Universums	154
8.3 Randomisierte Approximationsschemata und Wahrscheinlichkeitsverstärkung .	158
8.4 Die klassische Monte-Carlo-Methode	160
8.4.1 Der Monte-Carlo-Algorithmus und das Estimator-Theorem	161
8.4.2 #DNF und <i>Importance Sampling</i>	163
8.5 Die Markov-Ketten-Monte-Carlo-Methode	165
8.5.1 Ein Exkurs über Random Walks	165
8.5.2 Zählen zulässiger Knotenfärbungen	170
8.5.3 Weitere Anwendungen der Markov-Ketten-Monte-Carlo-Methode . . .	177
8.6 Dynamische Programmierung und die Monte-Carlo-Methode	178
8.7 Unmöglichkeitsergebnisse für #IS	182
8.8 Literatur zu Kapitel 8	184
Übungen zu Kapitel 8	187

A Die Landauschen Symbole	191
B Werkzeuge aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung	193
Literaturverzeichnis	197
Index	204