

Claus Wilhelm Turtur

**Prüfungstrainer Mathematik –
mit vollständigen Musterlösungen**

Claus Wilhelm Turtur

**Prüfungstrainer
Mathematik –
mit vollständigen
Musterlösungen**

Klausur- und Übungsaufgaben



Teubner

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <<http://dnb.ddb.de>> abrufbar.

Prof. Dr. rer. nat. Claus Wilhelm Turtur

Geboren 1961 in Bonn, Nordrhein-Westfalen. Studium der Mathematik und Physik an der Universität Bonn, Diplomarbeit bei Prof. Dr. T. Mayer-Kuckuk. Promotion an der Universität Regensburg bei Prof. Dr. H. Hoffmann. Praktische Industrietätigkeit bei einem Zulieferer der Automobilindustrie. Seit 1998 Professor an der Fachhochschule Braunschweig-Wolfenbüttel.

1. Auflage März 2006

Alle Rechte vorbehalten

© B.G. Teubner Verlag / GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2006

Lektorat: Ulrich Sandten / Kerstin Hoffmann

Der B.G. Teubner Verlag ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media.

www.teubner.de



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: Ulrike Weigel, www.CorporateDesignGroup.de

Druck und buchbinderische Verarbeitung: Strauss Offsetdruck, Mörlenbach

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Printed in Germany

ISBN 3-8351-0023-8

Vorwort

„Rechnen lernt man durch Rechnen“ – diesen plakativen Satz gab uns als Studenten einer unserer Professoren mit auf den Weg. Der Satz geleitete mich durch mein Studium und blieb mir bis heute in Erinnerung, denn er bringt den Kern des Lernerfolgs auf den Punkt: Zuerst hören die Studierenden in der Vorlesung die fachlichen Inhalte, danach erst kommt der Hauptteil des Lernens, das eigene Üben.

Aus diesem Grunde stelle ich seit Anbeginn meiner Lehrtätigkeit meinen Studierenden eine umfangreiche Übungsaufgabensammlung mit vollständig ausgearbeiteten Musterlösungen zur Verfügung, anhand derer sie den Vorlesungsstoff zuhause aufbereiten können. Viele Studierende haben mir bestätigt, dass diese Aufgabensammlung einen wichtigen Beitrag zur Senkung der Durchfallquoten bei den Klausuren leistet. Die große Beliebtheit dieser Aufgabensammlung bei den eigenen Studierenden brachte mich auf die Idee, die Aufgabensammlung als Buch auch Studierenden anderer Hochschulen zur Verfügung zu stellen.

Das didaktische Konzept des Buches ist so einfach wie sein Ziel:

Es soll den Studierenden zu genau den Fähigkeiten und Rechentechniken verhelfen, die sie brauchen, um gute Klausuren im Fach Mathematik schreiben zu können. Dass sie damit das nötige Grundwissen erwerben, um später die Mathematik in ihren eigentlichen Hauptfächern sinnvoll einzusetzen, ist ein durchaus erwünschter Nebeneffekt.

Im Übrigen ist das Buch nicht als Lehrbuch, sondern als Übungsbuch gedacht. Sinnvollerweise werden die Studierenden den Lehrstoff in den Vorlesungen hören, um das zu Erlernende dann mit Hilfe des vorliegenden Buches vorlesungsbegleitend umfangreich zu üben.

Mein besonderer Dank gilt

- meiner Ehefrau für die Idee, meine Übungsaufgabensammlung in Form eines Buches den Studierenden vieler Hochschulen zugänglich zu machen, und die mich unermüdlich durch ihre praktische Hilfe unterstützt hat,
- Herrn Sandten, Frau Domnick und Herrn Kühn von Burgsdorff sowie den anderen Mitarbeitern des Teubner Verlages für die ausgezeichnete Unterstützung bei der Ausarbeitung dieses Buches. Besonders hervorheben möchte ich das immerfort besonders freundliche kreative Miteinander, das wesentlich zum Erfolg dieses Buchs beigetragen hat.
- Schließlich seien an dieser Stelle auch noch diejenigen Kollegen an verschiedenen Hochschulen erwähnt, die mir über den Teubner Verlag Klausuren aus ihrem Original-Prüfungsprogramm zur Verfügung gestellt haben.

Zum richtigen Gebrauch dieses Buches

Achtung:
Der richtige Umgang mit dem Buch entscheidet über den Lernerfolg !

„Rechnen lernt man durch Rechnen“ – das Motto zur Entstehung dieser Aufgabensammlung beschreibt auch den richtigen Umgang mit ihr. Nur wer die Aufgaben selbst durchrechnet, erlernt die Lösungstechniken. Wer nur die Lösungswege liest und nachvollzieht, verschenkt den eigentlichen Wert des Buches. Damit ist der richtige Umgang klar (siehe Bild 0-1):

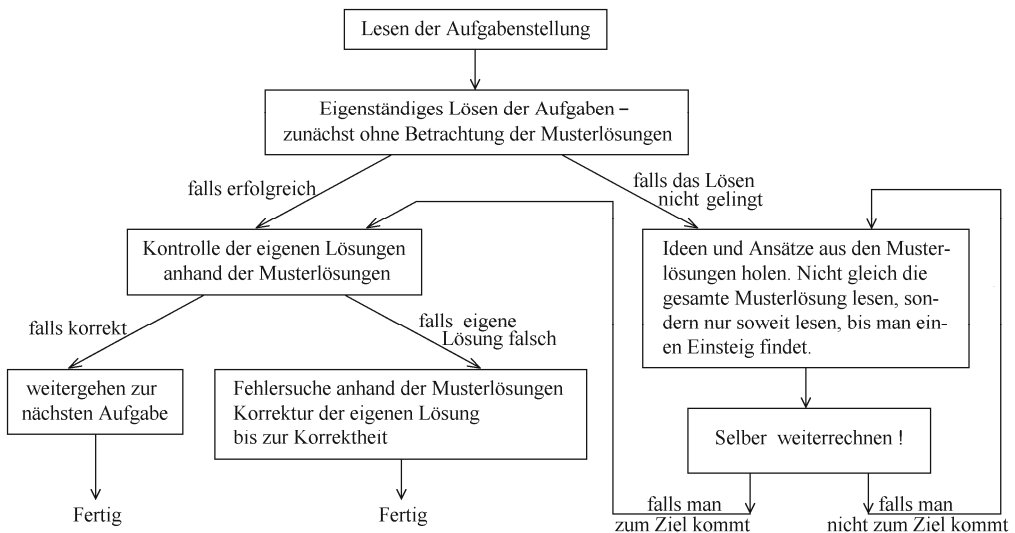


Bild 0-1 Empfohlene Vorgehensweise zur Benutzung der Aufgaben und der Musterlösungen

Bei vielen Aufgaben existieren mehrere Teilaufgaben des gleichen Typs. Dahinter steckt ein doppelter Sinn: Einerseits soll dadurch die Übung vertieft werden, andererseits soll all denjenigen Übenden, die nicht ohne Musterlösung mit dem Aufgabentyp zurechtkommen, die Möglichkeit gegeben werden, sich anhand der ersten Teilaufgabe durch Betrachten der Musterlösung mit dem Aufgabentyp vertraut zu machen, und darauf basierend dann die weiteren ähnlichen Teilaufgaben selbstständig zu lösen. Dieser Aspekt ist sehr wichtig: Wer eine Aufgabe nicht aus eigener Kraft lösen kann, der betrachte noch nicht gleich die gesamte Musterlösung, sondern nur deren Anfang bzw. deren ersten Teil !

Vorlesungsbegleitendes Üben der Rechentechniken

Um die Vorgehensweise des eigenen Übens (siehe Bild 0-1) zu unterstützen, sind zu Beginn jeder einzelnen Aufgabenstellung und ebenso zu Beginn jeder zugehörigen Musterlösung dicke schwarze „Balken“ angebracht. Diese dienen dazu, den Leser sofort erkennen zu lassen, an welcher Stelle die Musterlösung beginnt, noch bevor er den Text oder die Formeln gelesen hat. Damit wird bezweckt, dass niemand aus Versehen die Musterlösungen zu früh betrachtet. Man braucht also nur die Musterlösungen mit einem Blatt Papier abzudecken, und beim Lesen der Aufgabenstellungen dieses nicht über den nächsten schwarzen Balken hinaus zu schieben.

Darüber hinaus existieren zusätzliche Erläuterungen wie „Arbeitshinweise“ oder „Stolperfallen“, die grau unterlegt sind. Graue Unterlegungen werden auch zum Markieren von Erläuterungen benutzt, die man sich im Hinblick auf Prüfungssituationen besonders merken sollte.

Sogenannte Arbeitshinweise

erklären bei komplizierten Lösungswegen die prinzipielle Vorgehensweise und strukturieren die Arbeitsgänge.

Sogenannte Stolperfallen

weisen auf typische Stellen hin, die bei Anfängern häufig zu Fehlern führen. Hier sehen Studierende, worauf sie aufpassen sollen, um im Falle einer Prüfung einen unnötigen Verlust von Pluspunkten zu vermeiden.

Konkrete Klausurvorbereitung:

Zusammenstellen eigener Übungs- und Trainings-Klausuren

Studierende, die einen gewissen Übungsstand erreicht haben, möchten oftmals gerne kontrollieren, ob sie schon „fit für die Klausur“ sind. Dazu können sie sich eigene Testklausuren zusammenstellen, indem sie eine Reihe geeigneter Übungsaufgaben auswählen.

Die Eignung der auszuwählenden Übungsaufgaben für solche Testklausuren ergibt sich natürlich einerseits aus dem thematischen Inhalt der zu erwartenden eigenen Klausuren. Andererseits achte man aber sinnvollerweise auch darauf, nicht nur all zu einfache Aufgaben auszuwählen. Den Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe erkennt man an der Anzahl der Gewichtsheber im Kopf der Aufgabe (siehe Bild 0-2)

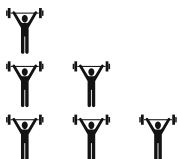


Bild 0-2 Piktogramme für Schwierigkeitsgrade

Zur Interpretation der Skala:

Grad 1: Einstiegsniveau – kommt in Klausuren nicht allzu oft vor

Grad 2: Übungsniveau – durchschnittliche Klausuraufgaben

Grad 3: Leistungsniveau – jede Klausur sollte einige solche Aufgaben enthalten

Wichtig beim Zusammenstellen eigener Übungs- und Trainings-Klausuren ist auch die Zeitplanung. Man weiß, wie lange die eigene Klausur zu erwarten ist – auf eine entsprechende Zeit sollte man auch die eigenen Übungs- und Trainings-Klausuren einrichten. Hilfsmittel dazu bietet das Buch in Form von Zeitangaben an, die neben dem Piktogramm einer Uhr im Kopf jeder einzelnen Aufgabe zu sehen sind (siehe Bild 0-3).



X min

Bild 0-3 Piktogramm für die Bearbeitungszeit:

Neben der Uhr ist die typische Bearbeitungsdauer der einzelnen Aufgaben in Minuten angegeben (hier „X“ Minuten). Anhand dieser Angabe lässt sich die Aufgabenmenge für eigene Musterklausuren abschätzen.

Selbstkontrolle durch Bewertung der eigenen Lösungen

Nachdem man die solchermaßen zusammengestellte eigene Testklausur in der gegebenen Zeit bearbeitet hat, korrigiert man die eigene Lösung und bewertet sie anhand der in den Musterlösungen des Buches am Papierrand aufgeführten Punktezahlen. Zu jedem Rechenschritt ist dort eine zugehörige Punkteangabe vorhanden, die man sich im Falle der korrekten Bearbeitung zuerkennen kann. Als Beispiel hierfür betrachte man die Angabe „x P“ neben dem vorliegenden Absatz. Dies bedeutet, dass man sich für die korrekte Bearbeitung eines solchen Absatzes „x Punkte“ zuerkennen kann.

Zählt man am Schluss der Selbstkontrolle alle erreichten Punkte zusammen, so erkennt man nicht nur den eigenen Leistungsstand (die Aufgaben sind so ausgelegt, dass man etwa 50 % der Punkte zur Note 4.0 und knapp 100 % der Punkte zur Note 1.0 benötigt), sondern auch eigene Stärken und Schwächen, die ggf. einen entsprechenden Übungsbedarf aufzeigen.

Ein Sonderzeichen dieses Buches

Soweit möglich und sinnvoll werden Ergebnisse und Zwischenschritte exakt angegeben. So wird z.B. ein Ausdruck wie „ $\sqrt{\pi}$ “ normalerweise nicht mit dem Taschenrechner ausgerechnet um Rundungsfehler zu vermeiden, die entstehen, weil der Taschenrechner reelle Zahlen auf nahegelegene rationale Zahlen abbildet.

Es gibt aber manchmal Situationen, in denen solch ein ungefähres Ausrechnen numerischer Werte mit dem Taschenrechner unvermeidbar ist, z.B. weil man sie für den weiteren Fortgang der Aufgabe benötigt. In solchen Fällen ist das Rechenzeichen „=“ nicht wirklich richtig, angebracht wäre eher ein „ \approx “. Um den Grund für den Gebrauch des letztgenannten Zeichens nicht aus den Augen zu verlieren, sind diejenigen Stellen, bei denen Rundungsfehler aufgrund des Gebrauchs eines Taschenrechners (kurz „TR“) auftreten, mit einem „ \approx^{TR} “ markiert. Wenn man sich solchermaßen bewusst macht, an welchen Stellen Rundungsfehler auftreten, dann ist es auch weitgehend unwichtig, wie viele Nachkommastellen man angibt.

Hinweis: Kürzen und Vereinfachen von Ausdrücken

Mitunter findet man Terme, die sich sehr bequem kürzen oder vereinfachen lassen, manchmal aber auch Erweiterungen in Brüchen sind. Oftmals sind diese in grau gedruckt (anstatt in schwarz), um den Lesern das Erkennen der jeweiligen Umformungsschritte zu erleichtern.

Noch eine Bitte an alle Leserinnen und Leser

Für Anregungen und Verbesserungsvorschläge ist der Autor immer dankbar. Schon bei der Entstehung dieses Buches wurden mannigfaltige Anregungen seitens der Studierenden berücksichtigt. So wurden zum Beispiel Erläuterungen gerade an den Stellen angebracht, an denen die Studierenden erfahrungsgemäß Verständnisschwierigkeiten haben. Hier können Leserhinweise helfen, spätere Auflagen dieses Buches zu optimieren. Auch Hinweise auf Tippfehler werden dankbar aufgenommen um spätere Auflagen zu verbessern.

Hinweis: Nicht aller Leser verstehen alle Aufgaben

Vorlesungsinhalte unterscheiden sich von Hochschule zu Hochschule, von Fachbereich zu Fachbereich und natürlich auch von Semester zu Semester. (Im ersten Semester wird ein anderer Stoff behandelt als im dritten.) Empfohlen wird daher, nur solche Aufgaben zu bearbeiten, deren Thema man aus der eigenen Vorlesung kennt oder kennen sollte. Ggf. kann der eigene Dozent auf Fragen der Studenten hin Hinweise geben. Das Buch ist nicht als Lehrbuch zum „Neu-erlernen“ des Stoffes konzipiert, sondern als Begleitwerk zu Vorlesungen. Deshalb wird auch vorausgesetzt, dass grundlegende Kenntnisse aus den entsprechenden Vorlesungen vorhanden sind.

In diesem Sinne wurde bei der Auswahl der Aufgaben bewusst **nicht** versucht, einen vollständigen Überblick über alle Themengebiete der Mathematik zu erarbeiten. Vielmehr wurden die Aufgaben thematisch derart ausgewählt, dass möglichst viele Studenten an möglichst vielen Hochschulen maximalen Nutzen für ihre persönlich Klausur-Vorbereitung daraus ziehen können.

Inhalt

Vorwort	5
Zum richtigen Gebrauch dieses Buches	6
Inhalt	11
1 Mengenlehre	19
Aufgabe 1.1 Verknüpfung von Mengen	19
Aufgabe 1.2 Verknüpfung von Mengen	21
Aufgabe 1.3 Bestimmung einer Zahlenmenge	22
Aufgabe 1.4 Bekannte Zahlen-Grundmengen	24
Aufgabe 1.5 Mengen-Operationssymbole	24
2 Elementarmathematik	27
Aufgabe 2.1 Periodische Dezimalbrüche	27
Aufgabe 2.2 Gauß'sche Summenformel	28
Aufgabe 2.3 Betragsgleichungen mit Fallunterscheidungen	30
Aufgabe 2.4 pq-Formel in den reellen und komplexen Zahlen	34
Aufgabe 2.5 Ungleichungen mit Fallunterscheidungen	35
Aufgabe 2.6 Wurzelgleichungen	42
Aufgabe 2.7 Rechnen mit Logarithmen	45
Aufgabe 2.8 Gleichungen mit Logarithmen	47
Aufgabe 2.9 Anwendungsbeispiel zu Logarithmen	48
Aufgabe 2.10 Zahlensysteme verschiedener Basen	49
Aufgabe 2.11 Bruchrechnung in S-adischen Systemen	52
Aufgabe 2.12 Rechnen im Dualsystem	57
Aufgabe 2.13 B-Komplement-Darstellung	60
Aufgabe 2.14 Ungleichungen mit Fallunterscheidungen	62
Aufgabe 2.15 Binomialkoeffizienten	65
Aufgabe 2.16 Binomialkoeffizienten	66
Aufgabe 2.17 Der binomische Lehrsatz	67
Aufgabe 2.18 Winkelfunktionen, Additionstheoreme	68
Aufgabe 2.19 Polynomdivision	71
Aufgabe 2.20 Faktorisierung von Polynomen	71
Aufgabe 2.21 Polynomdivision mittels Horner-Schema	73
Aufgabe 2.22 Nullstellen von Polynomen	74

Aufgabe 2.23 Symmetrie von Funktionen.....	75
Aufgabe 2.24 Bildung von Umkehrfunktionen	76
Aufgabe 2.25 Funktionsdarstellung in Polarkoordinaten	77
Aufgabe 2.26 Geradengleichung	79
Aufgabe 2.27 Logarithmische Funktionsdarstellung.....	80
Aufgabe 2.28 Bestimmung einer Parabel	81
Aufgabe 2.29 Textbeispiel – Exponentialfunktion	81
Aufgabe 2.30 Textbeispiel – Cosinus Hyperbolicus.....	83
Aufgabe 2.31 Goniometrische Gleichungen	84
Aufgabe 2.32 Vollständige Induktion	88
3 Aussagelogik.....	91
Vorbemerkung zur Nomenklatur	91
Aufgabe 3.1 Erstellen von Wahrheitstabeln	92
Aufgabe 3.2 Konjunktive und disjunktive Normalform.....	94
Aufgabe 3.3 Vereinfachen Boole'scher Ausdrücke	95
Aufgabe 3.4 Karnaugh-Veitch-Diagramme	96
Aufgabe 3.5 Beweise in Boole'scher Algebra	99
Aufgabe 3.6 Spezielle Verknüpfungen	101
4 Geometrie und Vektorrechnung.....	103
Aufgabe 4.1 Berechnungen in Dreieck und Viereck	103
Aufgabe 4.2 Winkelfunktionen – berechnen spezieller Werte	105
Aufgabe 4.3 Textbeispiel – Kreisberechnung.....	106
Aufgabe 4.4 Winkelfunktionen – Werte ohne Taschenrechner	107
Aufgabe 4.5 Additionstheoreme	108
Aufgabe 4.6 Textbeispiel – Navigation	109
Aufgabe 4.7 Vektorprodukte	110
Aufgabe 4.8 Lineare Abhängigkeit von Vektoren	111
Aufgabe 4.9 Abstand eines Punktes zu einer Geraden	112
Aufgabe 4.10 Ebenengleichung in verschiedenen Formen	113
Aufgabe 4.11 Lage von Punkten in einer Ebene	115
Aufgabe 4.12 Abstand eines Punktes von einer Ebene	117
Aufgabe 4.13 Abstand eines Punktes von einer Geraden.....	118
Aufgabe 4.14 Ebenengleichung in kartesischen Koordinaten.....	119
Aufgabe 4.15 Schnittpunkt von Geraden	120
Aufgabe 4.16 Schnittgeraden von Ebenen	122
Aufgabe 4.17 Ellipsengleichung	124
Aufgabe 4.18 Koordinatentransformation – Drehung	125

Aufgabe 4.19 Polarkoordinaten	126
Aufgabe 4.20 Kugelkoordinaten	127
Aufgabe 4.21 Textbeispiel – Vektorrechnung	129
5 Lineare Algebra	133
Aufgabe 5.1 Multiplikation von Matrizen	133
Aufgabe 5.2 Berechnung von Determinanten	134
Aufgabe 5.3 Inversion von Matrizen	135
Aufgabe 5.4 Rang von Matrizen	137
Aufgabe 5.5 Lösen linearer Gleichungssysteme	138
Aufgabe 5.6 Lösen linearer Gleichungssysteme	140
Aufgabe 5.7 Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen	141
Aufgabe 5.8 Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen	142
6 Differentialrechnung	145
Aufgabe 6.1 Berechnung von Differentialquotienten	145
Aufgabe 6.2 Ableiten: Summenregel, Faktorregel, Produktregel	146
Aufgabe 6.3 Ableiten mit Produktregel	147
Aufgabe 6.4 Ableiten mit Quotientenregel	148
Aufgabe 6.5 Ableiten mit Kettenregel.....	149
Aufgabe 6.6 Mehrfache Verschachtelung der Kettenregel.....	150
Aufgabe 6.7 Vermischtes Anwenden von Ableitungsregeln	152
Aufgabe 6.8 Höhere Ableitungen.....	155
Aufgabe 6.9 Implizites Ableiten	156
Aufgabe 6.10 Ableiten in Parameterdarstellung und Polarkoordinaten	157
Aufgabe 6.11 Kurvendiskussionen verschiedenster Art.....	162
Aufgabe 6.12 Beispiel – Harmonischer Oszillator.....	180
Aufgabe 6.13 Textbeispiel – Maximalwertaufgabe.....	181
Aufgabe 6.14 Textbeispiel – Maximalwertaufgabe.....	182
Aufgabe 6.15 Textbeispiel – Maximalwertaufgabe.....	183
Aufgabe 6.16 Textbeispiel – Maximalwertaufgabe.....	185
Aufgabe 6.17 Krümmung von Kurven.....	186
7 Integralrechnung.....	191
Aufgabe 7.1 Integration von Polynomen	191
Aufgabe 7.2 Integration mittels Substitution	192
Aufgabe 7.3 Partielle Integration	196
Aufgabe 7.4 Integration nach geeigneter Umformung.....	199
Aufgabe 7.5 Integration nach Partialbruchzerlegung.....	202

Aufgabe 7.6 Substitutionen mit Rechentrick.....	211
Aufgabe 7.7 Demonstrationsbeispiel Integrationskonstante	216
Aufgabe 7.8 Integration abschnittsweise gegebener Funktionen.....	218
Aufgabe 7.9 Bestimmte Integrale mit Substitution	220
Aufgabe 7.10 Uneigentliche Integrale.....	221
Aufgabe 7.11 Spezielle bestimmte Integrale	222
Aufgabe 7.12 Linearer-, quadratischer- und Betragsmittelwert	225
Aufgabe 7.13 Flächenberechnung mittels Integralrechnung	227
Aufgabe 7.14 Numerische Integration: Simpson-Verfahren	231
Aufgabe 7.15 Schnittflächen zwischen Funktionen	234
Aufgabe 7.16 Integration in Parameterdarstellung.....	237
Aufgabe 7.17 Integration in Polarkoordinaten	240
Aufgabe 7.18 Bogenlängenberechnung mittels Integration	242
Aufgabe 7.19 Berechnung eines Rotationsvolumens	244
Aufgabe 7.20 Berechnung eines Rotationsvolumens	245
Aufgabe 7.21 Berechnung einer Rotationsoberfläche	247
Aufgabe 7.22 Bogenlängenberechnung.....	249
8 Komplexe Zahlen.....	251
Aufgabe 8.1 Grundrechenarten mit komplexen Zahlen	251
Aufgabe 8.2 Umwandlung zwischen Darstellungsformen	252
Aufgabe 8.3 Berechnungen in verschiedenen Darstellungsformen.....	256
Aufgabe 8.4 Anwendungsbeispiel zur Euler-Formel.....	258
Aufgabe 8.5 Wurzeln und Logarithmen	259
Aufgabe 8.6 Vertiefende Rechenbeispiele.....	266
Aufgabe 8.7 Winkelfunktionen und Hyperbelfunktionen	268
Aufgabe 8.8 Faktorisierung komplexer Polynome	270
Aufgabe 8.9 Komplexwertige Partialbruchzerlegung	273
Aufgabe 8.10 Lösungsmengen komplexzahliger Gleichungen	274
Aufgabe 8.11 Zeichnen von Ortskurven.....	279
Aufgabe 8.12 Arbeiten mit Ortskurven	280
Aufgabe 8.13 Textbeispiel – komplexe Wechselstromwiderstände.....	282
Aufgabe 8.14 Textbeispiel – komplexe Wechselstromwiderstände.....	283
9 Funktionen mehrerer Variabler und Vektoranalysis.....	285
Aufgabe 9.1 Parameterdarstellung einer mehrdim. Funktion.....	285
Aufgabe 9.2 Höhenliniendiagramme mehrdim. Funktionen	287
Aufgabe 9.3 Partielle Ableitungen, Satz von Schwarz	289
Aufgabe 9.4 Partielle Ableitungen, Satz von Schwarz	290

Aufgabe 9.5 Totales Differential, lineare Näherung	291
Aufgabe 9.6 Totales Differential, lineare Näherung	293
Aufgabe 9.7 Ebenengleichung einer Tangentialebene	295
Aufgabe 9.8 Differentialformen, Integrierbarkeitsbedingung	296
Aufgabe 9.9 Ableiten implizit gegebener Funktionen	298
Aufgabe 9.10 Extremwerte mehrdimensionaler Funktionen	300
Aufgabe 9.11 Gleichung eines Rotationsparaboloids	303
Aufgabe 9.12 Unbestimmte Mehrfachintegrale	303
Aufgabe 9.13 Bestimmte Mehrfachintegrale	305
Aufgabe 9.14 Textbeispiel – Mehrfachintegral	306
Aufgabe 9.15 Flächenberechnung in Polarkoordinaten	307
Aufgabe 9.16 Schwerpunktsberechnung einer Fläche	308
Aufgabe 9.17 Schwerpunktsberechnung einer Fläche	309
Aufgabe 9.18 Schwerpunktsberechnung in Polarkoordinaten	310
Aufgabe 9.19 Schwerpunktsberechnung einer Fläche	313
Aufgabe 9.20 Schwerpunktsberechnung eines Rotationsvolumens	314
Aufgabe 9.21 Massenträgheitsmomente der Rotation	316
Aufgabe 9.22 Vektorwertiges Integral	317
Aufgabe 9.23 Volumenintegration in Kugelkoordinaten	320
Aufgabe 9.24 Gradienten von Skalarfeldern	322
Aufgabe 9.25 Richtungsableitungen in Skalarfeldern	323
Aufgabe 9.26 Richtungsableitungen in Skalarfeldern	324
Aufgabe 9.27 Totales Differential im Skalarfeld	325
Aufgabe 9.28 Vektorfelder, Konservatives Kraftfeld	326
Aufgabe 9.29 Linienintegrale in Vektorfeldern	328
Aufgabe 9.30 Das Potentialfeld eines Vektorfeldes	330
Aufgabe 9.31 Divergenz und Rotation von Vektorfeldern	331
Aufgabe 9.32 Das Potentialfeld eines Vektorfeldes	333
Aufgabe 9.33 Das Potentialfeld eines Vektorfeldes	334
Aufgabe 9.34 Bsp. für ein zentralsymmetrisches Potentialfeld	335
Aufgabe 9.35 Vektorfelder in Kugelkoordinaten	336
10 Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik	339
Aufgabe 10.1 Textbeispiel – Permutationen	339
Aufgabe 10.2 Textbeispiel – Kombinationen	339
Aufgabe 10.3 Textbeispiel – Variationen	340
Aufgabe 10.4 Textbsp. Berechnung von Wahrscheinlichkeiten	341
Aufgabe 10.5 Textbsp. Berechnung von Wahrscheinlichkeiten	343
Aufgabe 10.6 Textbsp. Berechnung von Wahrscheinlichkeiten	343

Aufgabe 10.7 Textbsp. Berechnung von Wahrscheinlichkeiten	345
Aufgabe 10.8 Textbsp. Berechnung von Wahrscheinlichkeiten	346
Aufgabe 10.9 Textbsp. Berechnung von Wahrscheinlichkeiten	347
Aufgabe 10.10 Textbsp. zum konsequenten logischen Denken	349
Aufgabe 10.11 Diskrete Verteilung: Erwartungswert und Varianz.....	350
Aufgabe 10.12 Kontinuierliche Verteilung: Dichtefunktion, Verteilungsfunktion	352
Aufgabe 10.13 Binomialverteilung	360
Aufgabe 10.14 Kontinuierliche Verteilung: Erwartungswert, Varianz.....	361
Aufgabe 10.15 Gauß-Verteilung, ihre Kenngrößen.....	363
Aufgabe 10.16 Konfidenzintervalle der Gauß-Verteilung	366
Aufgabe 10.17 Stichprobe und Grundgesamtheit.....	368
Aufgabe 10.18 Spezielle Konfidenzintervalle bei Gauß	370
Aufgabe 10.19 Verschiedene Mittelwerte.....	371
Aufgabe 10.20 Textbeispiel – Poissonverteilung	372
Aufgabe 10.21 Textbeispiel – Poissonverteilung	373
Aufgabe 10.22 Textbeispiel – Exponentialverteilung.....	373
Aufgabe 10.23 Textbeispiel – Hypergeometrische Verteilung	375
Aufgabe 10.24 Gauß'sche Fehlerfortpflanzung	376
Aufgabe 10.25 Gauß'sche Fehlerfortpflanzung	378
Aufgabe 10.26 Regressionsgerade	378
Aufgabe 10.27 Nichtlineare Regression	381
Aufgabe 10.28 Regressionsgerade	384
Aufgabe 10.29 Nichtlineare Regression.....	385
Aufgabe 10.30 Chi-Quadrat-Test einer Gleichverteilung.....	389
Aufgabe 10.31 Chi-Quadrat-Test einer Gauß-Verteilung	390
11 Folgen und Reihen	395
Aufgabe 11.1 Erkennen von Bildungsgesetzen	395
Aufgabe 11.2 Grenzwerte konvergenter Folgen.....	395
Aufgabe 11.3 Endliche Reihe (als Summenformel)	397
Aufgabe 11.4 Textbsp. Zum konsequenten logischen Denken.....	398
Aufgabe 11.5 Zinseszins-Berechnung (geometrische Reihe).....	398
Aufgabe 11.6 Zinseszins-Berechnung (geometrische Reihe).....	399
Aufgabe 11.7 Binomialkoeffizienten.....	400
Aufgabe 11.8 Binomischer Lehrsatz	401
Aufgabe 11.9 Näherungsrechnung – Binomischer Lehrsatz	402
Aufgabe 11.10 Grenzwert einer unendl. geometrischen Reihe	403
Aufgabe 11.11 Textbeispiel zu einer endlichen Reihe.....	403
Aufgabe 11.12 Grenzwerte konvergenter Reihen.....	404

Aufgabe 11.13 Konvergenzuntersuchungen an Reihen	406
Aufgabe 11.14 Konvergenzuntersuchungen an Reihen	410
Aufgabe 11.15 Konvergenzradien von Potenzreihen.....	410
Aufgabe 11.16 Konvergenzradius einer komplexen Potenzreihe	413
Aufgabe 11.17 Entwicklung von Mac Laurin-Reihen	414
Aufgabe 11.18 Entwicklung von Taylor-Reihen.....	420
Aufgabe 11.19 Verknüpfen von Potenzreihen.....	422
Aufgabe 11.20 Integration einer Potenzreihe.....	424
Aufgabe 11.21 Restgliedabschätzung nach Lagrange.....	424
Aufgabe 11.22 Näherungspolynome aus Potenzreihen.....	425
Aufgabe 11.23 Näherungspolynome aus Potenzreihen.....	427
Aufgabe 11.24 L'Hospital'sche Regel.....	430
Aufgabe 11.25 Funktionswerte aus Taylorreihen.....	432
Aufgabe 11.26 Reellwertige Fourier-Reihe	434
Aufgabe 11.27 Reellwertige Fourier-Reihe	436
Aufgabe 11.28 Reellwertige Fourier-Reihe	439
Aufgabe 11.29 Komplexwertige Fourier-Reihe	441
12 Gewöhnliche Differentialgleichungen.....	443
Aufgabe 12.1 Die Methode der Variablen-trennung	443
Aufgabe 12.2 Aufsuchen von Partikulärlösungen von Dgln.....	445
Aufgabe 12.3 Implizite Lösungen von Dgln.....	452
Aufgabe 12.4 Isoklinen von Differentialgleichungen	453
Aufgabe 12.5 Singuläre Lösungen von Differentialgleichungen.....	455
Aufgabe 12.6 Exakte Differentialgleichungen.....	457
Aufgabe 12.7 Inhomogene lineare Differentialgleichungen	459
Aufgabe 12.8 Homogene lineare Dgln. 2. Ordnung	463
Aufgabe 12.9 Inhomogene lineare Dgln. 2. Ordnung.....	464
Aufgabe 12.10 Homogene lineare Dgln. n-ter Ordnung.....	466
Aufgabe 12.11 Inhomogene lineare Dgln. n-ter Ordnung.....	469
13 Funktionaltransformationen.....	471
Vorbemerkung	471
Aufgabe 13.1 Fourier-Transformationen	471
Aufgabe 13.2 Laplace-Transformationen nach Definition.....	474
Aufgabe 13.3 Laplace-Transformationen nach Korrespondenztabelle	476
Aufgabe 13.4 Laplace-Rücktransformationen, Faltungsprodukt	480
Aufgabe 13.5 Laplace-Rücktransformationen (allgemein)	482
Aufgabe 13.6 Lösen von Dgln. mittels Laplace-Transformation.....	485

14 Musterklausuren (verschiedener Hochschulen)	489
Klausur 14.1: Analysis 1 (1.Semester)	489
Klausur 14.2: Analysis 2 (2. Semester)	490
Klausur 14.3: Erstes Semester (Grundlagen und Differentialrechnung)	492
Klausur 14.4: Zweites Semester (verschiedene Themen)	493
Klausur 14.5: Drittes Semester (anwendungsnahe Themen)	495
Klausur 14.6: Drittes Semester (anwendungsnahe Themen)	496
Klausur 14.7: Erstes Semester (Master / Bachelor-Programm)	498
Klausur 14.8: Zweites Semester (Master / Bachelor-Programm)	499
Lösungen zur Klausur Nr. 14.1	500
Lösungen zur Klausur Nr. 14.2	503
Lösungen zur Klausur Nr. 14.3	506
Lösungen zur Klausur Nr. 14.4	509
Lösungen zur Klausur Nr. 14.5	514
Lösungen zur Klausur Nr. 14.6	517
Lösungen zur Klausur Nr. 14.7	521
Lösungen zur Klausur Nr. 14.8	525
 15 Anhang: Tabellen	 531
Tabelle 1: Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung	531
Tabelle 2: Quantile der Chi-Quadrat-Verteilung	532
Tabelle 3: Korrespondenztabelle der Laplace-Transformation	533
Tabelle 4: Einige Ableitungen und unbestimmte Integrale	534
 Sachwortverzeichnis	 535