Bertram Huppert, Wolfgang Willems

Lineare Algebra

Bertram Huppert, Wolfgang Willems

Lineare Algebra

Teubner

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Prof. Dr. rer. nat. Bertram Huppert
Geboren 1927 in Worms. 1946-1951 Studium der Mathematik und Physik an der Universität Mainz. 1952-1963 Assistent und Dozent an der Universität Tübingen, dort 1952 Promotion und 1957 Habilitation. 1965-1995 Professor für Mathematik an der Universität Mainz. 1958/59 British Council Scholar University Manchester, Gastprofessuren 1963/64 in Urbana (Ill., USA) und 1968/69 in Chicago.

Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang Willems
Geboren 1948 in Daun. 1968-1973 Studium der Mathematik und Physik an der Universität Mainz. 1974-1995 Assistent und Hochschuldozent an der Universität Mainz, dort 1976 Promotion und 1985 Habilitation. 1986/87 und 1989-1991 Gastprofessor an der Universität Essen und IEM Essen. 1995-2000 Vertretungsprofessor an den Universitäten Magdeburg und Mainz. Seit 2000 Professor für Reine Mathematik an der Universität Magdeburg. Forschungsaufenthalte u. a. University of Chicago, ETH Zürich, University of Florida.

1. Auflage Februar 2006

Lektorat: Ulrich Sandten / Kerstin Hoffmann

Der B.G. Teubner Verlag ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media.
www.teubner.de

Umschlaggestaltung: Ulrike Weigel, www.CorporateDesignGroup.de
Druck und buchbinderische Verarbeitung: Strauss Offsetdruck, Mörlenbach
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.
Printed in Germany

ISBN 3-8351-0089-0

Réduites aux théories générales, les mathématiques deviendraient une belle form sans contenue, elles mourraient rapidement.

Lebesgue

Vorwort

Der Stoff der Linearen Algebra besteht aus einem strengen axiomatisch-algebraischen Begriffsgebäude. Der Anfänger hat meist nicht nur Schwierigkeiten mit der allgemeinen Abstraktheit, sondern er sieht vor allem auch selten, wozu er all dies lernen soll. Dem entgegenzuwirken, haben wir uns in dem vorliegenden Buch bemüht, die abstrakte Theorie schrittweise soweit wie möglich mit einer Fülle von interessanten Anwendungsbeispielen aus verschiedenen Bereichen zu beleben. Dies dient nicht nur dem besseren Verstehen der Theorie sondern auch der Motivation, sich mit dem Stoff auseinanderzusetzen.

Im kurzen Kapitel 1 beschränken wir uns auf einfache Aussagen über Mengen und Abbildungen. Wir behandeln jedoch bereits in 1.3 Abzählprobleme. Dies entspricht einem gestiegenen Interesse an kombinatorischen Fragen, nicht zuletzt durch die Informatik ausgelöst.

Kapitel 2 beginnt mit der Einführung der algebraischen Strukturen Gruppe, Ring und Körper. Wir behandeln zunächst nur die einfachsten Aussagen über Gruppen, benutzen diese aber bereits hier, um Sätze der elementaren Zahlentheorie zu beweisen. Diese finden in 2.3 Anwendung auf das RSA-Verfahren der Kryptographie (das ist die Lehre der Sicherung von Daten gegenüber unerlaubten Zugriffen). In 2.4 führen wir den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ein. Anschließend beweisen wir in 2.5 einfache Eigenschaften über endliche Körper, die in 3.7 bei der Codierungstheorie (das ist die Lehre der Sicherung von Daten gegen zufällige Störungen) Verwendung finden. Nach der Behandlung zentraler Konzepte der linearen Algebra in 2.7, nämlich Basen und Dimension von Vektorräumen, wenden wir diese Begriffe in 2.8 an, um lineare Rekursionsgleichungen zu lösen. Einige der Ergebnisse finden in 3.4 bei Beispielen von stochastischen Matrizen Verwendung.

Kapitel 3 enthält die zentralen Aussagen über lineare Abbildungen und Matrizen, einschließlich der Behandlung von linearen Gleichungssystemen in 3.9. Bereits in 3.4 gehen wir auf eine interessante Anwendung ein, die Behandlung von stochastischen Prozessen mit Hilfe stochastischer Matrizen. Für Prozesse mit absorbierenden Zuständen gelangen wir schon hier zu recht allgemeinen und abschließenden Resultaten, welche bei Vererbungsproblemen, Glücksspielen und Irrfahrten Anwendung finden. Unter Ausnutzung der Ergebnisse über endliche Körper entwickeln wir in 3.7 die Grundzüge der Codierungstheorie.

Im Kapitel 4 ergänzen wir zunächst die Gruppentheorie um die Begriffe Homomorphismus und Normalteiler. Dies liefert den natürlichen Hintergrund für das Signum von Permutationen und die Determinante von linearen Abbildungen bzw. Matrizen. In 4.4 finden Fragen über die Erzeugung der linearen Gruppe ihren natürlichen Platz. Wir beschließen Kapitel 4 mit einem Abschnitt über die Graßmann-Algebra, welcher die Kraft universeller Definitionen zeigt und den Zugang zu weiteren Sätzen über Determinanten liefert.

Im zentralen Kapitel 5 entwickeln wir zuerst Grundbegriffe der Ringtheorie, wobei wir systematisch vom Idealbegriff Gebrauch machen. Wir behandeln in 5.3 die feinere Arithmetik von kommutativen Ringen, wobei wir den elementaren Begriff des kleinsten gemeinsamen Vielfachen als Ausgangspunkt nehmen. Dies führt zur Arithmetik des Polynomrings, ausgedrückt durch die Begriffe kleinstes gemeinsames Vielfaches, größter gemeinsamer Teiler und Primfaktorzerlegung. Damit haben wir das entscheidende Hilfsmittel zur Hand, um subtilere Aussagen über lineare Abbildungen zu beweisen, die von Eigenwerten, Diagonalisierbarkeit und Jordanscher Normalform handeln.

Im Kapitel 6 führen wir auf Vektorräumen über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ Normen ein, was zu Normen für lineare Abbildungen und Matrizen führt. Dies erlaubt die Untersuchung der Konvergenz von Matrizen. In 6.3 behandeln wir die grundlegenden Sätze von Perron und Frobenius über nichtnegative Matrizen. Diese erlauben wichtige Anwendungen auf stochastische Matrizen und Suchverfahren im Internet (Google). In 6.4 führen wir die Exponentialfunktion von Folgen von Matrizen ein, mit deren Hilfe wir Systeme von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten lösen. Die Natur der in den Lösungen auftretenden Funktionen (Exponentialfunktion, Polynome) wird dabei durch die Jordansche Normalform geklärt. Schließlich führen wir in 6.5 die Theorie der stochastischen Matrizen unter Verwendung der Eigenwerte zu einem Abschluß und behandeln als Anwendung Mischprozesse (Kartenmischen, Polya's Urnenmodell).

Das Kapitel 7 beginnt mit Skalarprodukten auf Vektorräumen über beliebigen Körpern. In 7.4 studieren wir damit den Dualen eines Codes, beweisen den grundlegenden Dualitätssatz von MacWilliams und untersuchen optimale Codes. Anschließend behandeln wir in 7.5 den Minkowskiraum und seine Isometrien, die Lorentztransformationen. Dies gestattet in 7.6 einen schnellen Zugang zur Kinematik der speziellen Relativitätstheorie von Einstein. Lorentzkontraktion, Einstein's Zeitdilatation und Einstein's Additionsgesetz für Geschwindigkeiten finden hier ihre einfache Erklärung.

Gegenstand von Kapitel 8 ist die klassische Theorie der Vektorräume über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit positiv definitem Skalarprodukt. Hier kommen Ergebnisse aus den Kapiteln 6 und 7 zusammen. Das Spektralverhalten von normalen, hermiteschen und unitären Abbildungen steht im Vordergrund. Ein kurzer Abstecher in Vektorräume von unendlicher Dimension liefert die Heisenberg'sche Unschärferelation der Quantentheorie. In 8.5 verbinden wir die Spektraltheorie der hermiteschen Matrizen mit den Ergebnissen über lineare Differentialgleichungen aus 6.4, um mechanische Schwingungen zu behandeln. Hier wird die technische Bedeutung der Eigenwerte sichtbar.

Im abschließenden Kapitel 9 sind wir mit positiv definitem Skalarprodukt auf $\mathbb{R}$-Vektorräumen bei der klassischen euklidischen Geometrie angekommen. Nach den orthogonalen Abbildungen betrachten wir in 9.2 die Liealgebra zur orthogonalen Gruppe. In der Dimension drei führt dies auf natürliche Weise zum vektoriellen Produkt. In 9.3 führen wir den Schiefkörper der Quaternionen ein und untersuchen mit seiner Hilfe die orthogonalen Gruppen in den Dimensionen drei und vier. Der letzte Abschnitt 9.4 handelt von den endlichen Drehgruppen in drei Dimensionen, die mit den platonischen Körpern eng verbunden sind.

Wir waren bestrebt, so früh wie möglich Anwendungen der algebraischen Theorie zu geben. Diese möglichst vielseitigen Anwendungen dienen einerseits der Einübung von Rechentechniken, aber auch zur Erweiterung des Blickfelds. Beim ersten Studium können einige dieser Abschnitte übergangen werden, aber wir glauben, daß sie für die Motivierung des Lesers eine große Rolle spielen. Einige dieser Abschnitte könnten auch in Proseminaren verwendet werden.

Unter der Überschrift Ausblick geben wir gelegentlich Informationen an, die der Leser an dieser Stelle zwar verstehen kann, deren Beweis mit den vorliegenden Hilfsmitteln jedoch nicht möglich ist. Mitunter handelt es sich dabei um berühmte Sätze oder Vermutungen, z.B. über transzendente Zahlen, endliche Gruppen oder projektive Ebenen.

Beim ersten Auftreten des Namens eines bedeutenden Mathematikers geben wir in einer Fußnote kurze Informationen über Lebenszeit, Wirkungsstätten und Beiträge zur Forschung an.

Die Aufgaben behandeln mitunter Aussagen, welche den Text ergänzen. Im Anhang geben wir zu einigen die Lösung an.

Wir danken Frau Dipl.-Math. Christiane Behns für viele Hilfen bei der Erstellung der Latex-Version des Manuskriptes und Herrn Dipl.-Wirtsch.-Math. Ralph August für sein sorgfältiges Korrekturlesen.

Limburgerhof, *Bertram Huppert*
Magdeburg, im Februar 2006 *Wolfgang Willems*

Inhaltsverzeichnis