Wolfgang Rautenberg

Einführung in die Mathematische Logik

Wolfgang Rautenberg

Einführung in die Mathematische Logik

Ein Lehrbuch

3., überarbeitete Auflage

STUDIUM

VIEWEG+
TEUBNER

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Prof. Dr. Wolfgang Rautenberg
Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
14195 Berlin

raut@math.fu-berlin.de

1. Auflage 1996
2., verbesserte und erweiterte Auflage 2002
3., überarbeitete Auflage 2008

Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Susanne Jahnel

Vieweg+Teubner ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.
www.viewegteubner.de

Umschlaggestaltung: KünkelLopka Medienentwicklung, Heidelberg
Satz und Layout: Der Autor
Druck und buchbinderische Verarbeitung: Strauss Offsetdruck, Mörlenbach
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.
Printed in Germany

ISBN 978-3-8348-0578-2

Zum Geleit

von Lev Beklemishev, Utrecht

Das Gebiet der Mathematischen Logik – entstanden bei der Begriffsklärung von logischer Gültigkeit, Beweisbarkeit und Berechenbarkeit – wurde in der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts von einer Reihe brillianter Mathematiker und Philosophen geschaffen, wie Frege, Hilbert, Gödel, Turing, Tarski, Mal'cev, Gentzen, und einigen anderen. Die Entwicklung dieser Disziplin wird als eine der größten Errungenschaften der Wissenschaft des 20. Jahrhunderts diskutiert: Sie dehnte die Mathematik in einen bislang unbekannten Bereich von Anwendungen aus, unterwarf logisches Schließen und Berechenbarkeit einer rigorosen Analyse, und führte schließlich zur Entwicklung des Computers.

Das Lehrbuch von Professor Wolfgang Rautenberg ist eine gut geschriebene Einführung in diesen schönen und zusammenhängenden Gegenstand. Es enthält klassisches Material wie logische Kalküle, die Anfänge der Modelltheorie und Gödels Unvollständigkeitssätze, ebenso wie einige von Anwendungen her motivierte Themen wie ein Kapitel über Logikprogrammierung. Der Autor hat große Sorgfalt darauf verwendet, die Darstellung lesbar und umfassend zu gestalten; jeder Abschnitt wird von einer guten Auswahl von Übungen begleitet.

Ein besonderes Lob ist dem Autor für die Darstellung des Zweiten Gödelschen Unvollständigkeitssatzes geschuldet, in welcher es dem Autor gelang, einen relativ einfachen Beweis der Ableitungsbedingungen und der beweisbaren Σ_1-Vollständigkeit zu geben; ein technisch diffiziler Punkt, der in Lehrbüchern vergleichbaren Niveaus gewöhnlich ausgelassen wird. Dieses Lehrbuch kann allen Studenten empfohlen werden, die die Grundlagen der Mathematischen Logik erlernen wollen.

Vorwort

zur 3. Auflage

Die dritte Auflage unterscheidet sich von der zweiten nicht nur in der Korrektur von Druckfehlern sondern in zahlreichen sachlichen und stilistischen Änderungen, verbesserten Beweisen und Übungen. Das Buch dürfte dadurch für den Anfänger noch leichter lesbar sein. Auch Stichwort- und Literaturverzeichnis wurden vollständig revidiert und eine historisch orientierte Einleitung wurde hinzugefügt.

Das Buch wendet sich an Studenten und Dozenten der Mathematik oder Informatik, und wegen der ausführlich diskutierten Gödelschen Unvollständigkeitssätze, die ja von hohem erkenntnistheoretischem Interesse sind, auch an Fachstudenten der Philosophischen Logik. Es enthält in den ersten drei Kapiteln den Stoff einer einsemestrigen Vorlesung über Mathematische Logik, die sowohl für den Masterstudiengang als auch den Bachelor-Studiengang geeignet ist. Das 1. Kapitel beginnt mit Elementen der Logik, wie sie für die Grundlagenphase des Bachelor-Studiums verlangt werden, und es enthält zu Beginn des 2. Kapitels das Wichtigste über algebraische und relationale Strukturen, Homomorphismen und Isomorphismen, was zur Aufbauphase eines wie auch immer gearteten Mathematikstudiums gehören sollte. Eine wie in **3.4** geführte Diskussion der Axiomatik der Mengenlehre ist zwar grundlagentheoretisch wichtig, hängt aber von den Zielen der Einführungsvorlesung ab.

Nicht alles über den Gödelschen Vollständigkeitssatz (Kapitel **3**) muss den Bachelor-Studenten vorbewiesen werden. Es genügt, den aussagenlogischen Kalkül zu behandeln und die nötigen Schritte einer Erweiterung auf die Prädikatenlogik nur zu beschreiben. Die letzten Abschnitte von Kapitel **3** befassen sich mit Anwendungen der Vollständigkeit und haben teilweise beschreibenden Charakter, mit Ausblicken auf aktuelle Themen wie z.B. die automatische Beweisverifikation.

Das Buch enthält auch das Basismaterial für eine Vorlesung *Logik für Informatiker*, über die weiter unten gesprochen wird, in Kapitel **5** das Material für eine die Logik fortsetzende Vorlesung *Modelltheorie* und in Kapitel **6** für eine Vorlesung *Rekursionstheorie* mit Anwendungen auf Entscheidungsprobleme.

Das Buch kann ganz unabhängig von Vorlesungen aber auch zum Selbststudium genutzt werden. Nicht zuletzt deshalb wurden Stichwort- und Symbolverzeichnis recht ausführlich verfasst und vor Beginn des Haupttextes ein Abschnitt *Notationen* eingefügt. Für den Großteil der Übungen gibt es Lösungshinweise in einem gesonderten Abschnitt am Ende des Buches. Außer einer hinreichenden Schulung im logischen Schließen sind spezielle Vorkenntnisse nicht erforderlich; lediglich für Teile von Kapitel **5** sind algebraische Grundkenntnisse nützlich, und für den letzten Abschnitt in Kapitel **7** gewisse Kenntnisse über Modelle der Mengenlehre.

Stil und Darstellung wurden in den ersten drei Kapiteln breit genug gehalten, so dass auch der Student noch vor dem Einstieg in eine Spezialdisziplin den Stoff durchaus selbstständig bewältigen kann. Ab Kapitel **4** steigen die Anforderungen allmählich, die man am sichersten durch selbstständiges Lösen der Übungen meistert. Auch verdichtet sich von dort an etwas die Darstellung, jedoch nicht auf Kosten sprachlicher Präzision. Klarheit und angemessener Umgang mit Notationen bleiben oberstes Gebot. Der Leser sollte Bleistift und Papier zum Nachrechnen stets parat halten.

Eine Besonderheit dieser Darstellung ist die eingehende Behandlung der Gödelschen Unvollständigkeitssätze. Diese beruhen auf der Repräsentierbarkeit rekursiver Prädikate in formalisierten Theorien, die in ihrer Urform den Hauptteil der Gödelschen Arbeit [Gö2] ausmacht. Dieser Linie folgend gewinnt wir in Kapitel **6** den ersten Unvollständigkeitssatz, die Unentscheidbarkeit des Tautologieproblems der Logik nach Church und die Resultate über Nichtdefinierbarkeit des Wahrheitsbegriffs von Tarski in einem Zuge. Das letzte Kapitel ist ausschließlich dem zweiten Unvollständigkeitssatz und seinem Umfeld gewidmet. Von besonderem Interesse ist dabei, dass Fragen über selbstbezügliche Aussagen aufgrund der Solovayschen und weiterführender Vollständigkeitssätze algorithmisch entscheidbar sind.

Die Klassifikation definierender Formeln für arithmetische Prädikate wird recht frühzeitig, schon bei der Repräsentation rekursiver Prädikate in **6.3** eingeführt. Denn sie trägt in besonderem Maße dazu bei, den engen Zusammenhang zwischen Logik und Rekursionstheorie sichtbar zu machen. Weitere Unentscheidbarkeitsresultate über formalisierte Theorien werden in den Abschnitten **6.5** und **6.6** behandelt, einschließlich einer Skizze über die Lösung des 10. Hilbertschen Problems.

In Kapitel **4** werden berechenbare Funktionen in natürlicher Weise durch PROLOG-Programme präzisiert. Dies ist für Studierende der Informatik interessant, heißt dies doch einerseits, PROLOG ist eine universelle Programmiersprache, in der prinzipiell alle Algorithmen beschrieben werden können. Andererseits werden durch den Unentscheidbarkeitnachweis des Existenzproblems erfolgreicher Resolutionen in **4.4** die prinzipiellen Schwierigkeiten erklärt, die mit der Problemlösung durch Anfragen an Logik-Programme zusammenhängen. Kapitel **4** muss in einer Vorlesung für Informatiker mit Abschnitt **6.1** über Grundbegriffe der traditionellen Rekursionstheorie natürlich in Zusammenhang gebracht werden.

Kapitel **5** behandelt die Grundlagen der erst um 1950 entstandenen und inzwischen weit gefächerten Modelltheorie. Hier werden in der mathematischen Logik entwickelte Techniken mit Konstruktionstechniken anderer Gebiete zum gegenseitigen Nutzen miteinander verbunden. Durch den Einsatz weitreichender Methoden gelingt es, klassische Resultate wie die Eliminierbarkeit der Quantoren in der Theorie des reellen und der des komplexen Zahlenkörpers recht schnell zu gewinnen.

Trotz seiner Themenvielfalt umfasst dieses Buch bei weitem nicht alles was die Mathematische Logik vorzuweisen hat. Lehrbücher mit enzyklopädischem Anspruch lassen sich heute selbst für deren Teilgebiete nicht mehr verfassen. Bei der Stoffauswahl können bestenfalls Akzente gesetzt werden. Das bezieht sich vor allem auf die über elementare Dinge hinausführenden Kapitel **4**, **5**, **6** und **7**. Die Auswahl orientiert sich durchweg an Grundergebnissen der Mathematischen Logik, die mit hoher Wahrscheinlichkeit von bleibendem Bestand sind.

Wo immer dies gelang, wurden in der Literatur vorliegende Beweise vereinfacht. Philosophische und grundlagentheoretische Probleme der Mathematik ebenso wie rein beweistheoretische Aspekte werden nicht systematisch behandelt, aber diesbezügliche Fragen werden an geeigneten Stellen im Text angeschnitten, vor allem im Zusammenhang mit den Gödelschen Sätzen. Wir haben uns dabei bemüht, einem Auseinanderdriften von Modell- und Beweistheorie entgegen zu wirken.

Es gibt in diesem Buche keine Formeltrennungen im fließenden Text. Dies kommt nicht nur dem Schriftbild zugute sondern auch einem unbehinderten Informationsfluß. Bemerkungen im Kleindruck enthalten in der Regel weiterführende Informationen oder verweisen auf das Literaturverzeichnis, das angesichts der Literaturfülle nur eine Auswahl repräsentieren kann. Die Einträge im Literaturverzeichnis sind alphabetisch nach ihren beim Zitieren verwendeten Kürzeln sortiert.

Die sieben Kapitel des Buches sind in Abschnitte gegliedert. Eine Referenz wie z.B. **4.5** bedeutet Kapitel **4**, Abschnitt **5** und Satz 4.5 meint den Satz Nr. 5 in Abschnitt **4** eines gegebenen Kapitels. Bei Rückbezug auf diesen Satz in einem anderen Kapitel wird die Kapitelnummer hinzugefügt. So ist Satz 6.4.5 beispielsweise Satz 4.5 in Kapitel **6**.

Auf der Website `www.math.fu-berlin.de/~raut` finden sich weitere Informationen zu dem Buch und zu verwandten Themen, z.B. Mengenlehre. Für hilfreiche Kritik danke ich zahlreichen Kollegen und Studenten; die Namensliste ist zu lang, um sie hier anzugeben. Besonderer Dank gilt Lev Beklemishev (Utrecht), Wilfried Buchholz (München), Peter Agricola, Michael Knoop, sowie dem durch einen tragischen Unfall aus zu früh dem Leben geschiedenen Mathematiker und Informatiker Ullrich Fuchs. Dem Vieweg+Teubner Verlag bin ich für die gute Zusammenarbeit verbunden.

Berlin, Mai 2008,

Wolfgang Rautenberg

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Ein wichtiges Merkmal der modernen Logik ist die klare Unterscheidung zwischen Objektsprache und Metasprache. Erstere ist in der Regel formalisiert oder mindestens formalisierbar. Letztere ist eine Art Umgangssprache, die sich von Autor zu Autor unterscheidet und nicht unerheblich von der Zielgruppe des Autors abhängt. Sie ist oft mit halbformalen Elementen verwoben, von denen die meisten ihren Ursprung in der Mengenlehre haben. Das Ausmaß der involvierten Mengenlehre ist unterschiedlich. Semantik und Modelltheorie nutzen strengere mengentheoretische Werkzeuge als die Beweistheorie. Aber im Mittel wird wenig mehr vorausgesetzt als Kenntnisse der mengentheoretischen Terminologie und der elementaren Mengenalgebra, wie sie in jedem mathematischen Kurs für Anfänger präsentiert werden. Vieles davon ist im Grunde nur eine *façon de parler*.

Da dieses Buch die *mathematische* Logik betrifft, ist seine Sprache die gemeinsame Umgangssprache aller mathematischen Disziplinen. Doch gibt es einen wesentlichen Unterschied. In der Mathematik interagieren Objekt- und Metasprache tiefgehend miteinander. Erstere ist bestenfalls partiell formalisiert, was sich als erfolgreich erwiesen hat. Eine Trennung von Objekt- und Metasprache ist nur im speziellen Kontext relevant, zum Beispiel in der axiomatischen Mengenlehre, wo Formalisierung nötig ist um anzugeben wie gewisse Axiome aussehen. Strikt formale Sprachen werden häufiger in der Informatik angetroffen. Ähnlich wie in der Logik gehören formale linguistische Elemente zu den Untersuchungsobjekten, etwa bei der Analyse komplexer Software oder einer Programmiersprache.

Der Darstellungsrahmen formaler Sprachen und Theorien wird traditionell die *Metatheorie* genannt. Eine wichtige Aufgabe einer metatheoretischen Analyse ist es, Verfahren für logische Schlüsse mittels sogenannter logischer Kalküle anzugeben, welche rein syntaktisch operieren. Es gibt sehr unterschiedliche logische Kalküle. Die Wahl kann von der formalisierten Sprache, der logischen Basis und anderen Faktoren abhängen. Grundlegende metatheoretische Werkzeuge sind in jedem Falle die naiven natürlichen Zahlen und induktive Beweisverfahren. Diese werden auch Beweise durch Metainduktion genannt, insbesondere wenn formalisierte Theorien in Objektsprachen behandelt werden, die über natürliche Zahlen und Induktion selbst sprechen. Induktion kann auch über gewissen Wortmengen eines Alphabets, oder über dem Regelsystem eines logischen Kalküls ausgeführt werden.

Die logischen Hilfsmittel der Metatheorie dürfen sich von denen der Objektsprache unterscheiden. Mitunter wird dies sogar explizit gefordert. Aber in diesem Buche ist die Logik der Objektsprachen und die der Metasprache stets dieselbe, nämlich die klassische zweiwertige Logik. Es gibt gute Gründe dafür, Letztere als die Logik des gesunden Menschenverstandes anzusehen. Mathematiker, Informatiker, Physiker, Linguisten und andere verwenden sie als gemeinsame Kommunikations-Plattform.

Es sollte bemerkt werden, dass sich die in den Wissenschaften verwendete Logik erheblich von der Logik der Alltagssprache unterscheidet, wo diese mehr eine Kunst ist als ein ernsthafter Versuch zu sagen was denn woraus folgt. Im Alltagsleben hängt die Bedeutung fast jeder Äußerung vom Kontext ab. In den meisten Fällen sind logische Relationen nur angedeutet, selten explizit ausgedrückt. Oft fehlen grundlegende Voraussetzungen der zweiwertigen Logik, zum Beispiel eine kontextfreie Verwendung der logischen Verknüpfungen. Probleme dieser Art werden in diesem Buche nur am Rande behandelt. Bis zu einem gewissen Grad kann eine mehrwertige Logik oder eine Kripke-Semantik helfen die Situation zu klären, und manchmal müssen komplexe mathematische Methoden genutzt werden, um derartige Probleme zu analysieren. In diesem Buch dient die Kripke-Semantik einem anderen Zweck, nämlich der Analyse selbstbezüglicher Aussagen in Kapitel **7**.

Wir ergänzen die bisherigen allgemeinen Ausführungen durch einige historische Bemerkungen, welche der Anfänger vermutlich eher zu schätzen weiß, wenn er zuvor zumindest Teile dieses Buches gelesen hat.

Die traditionelle Logik ist als Teil der Philosophie eine der ältesten wissenschaftlichen Disziplinen und kann bis in die Antike zurückverfolgt werden [1)]. Sie ist eine der Wurzeln der heute so genannten Philosophischen Logik. Die Mathematische Logik ist hingegen eine relativ junge Disziplin, entstanden durch das Bemühen von Peano, Frege und Russell um 1900, Mathematik insgesamt auf die Logik zu reduzieren. Sie entwickelte sich während des 20. Jahrhunderts zu einer Disziplin mit mehreren Teilgebieten und zahlreichen Anwendungen in Mathematik, Informatik, Linguistik und Philosophie. Von den Glanzpunkten der relativ kurzen Entwicklungsperiode der Mathematischen Logik nennen wir nur die wichtigsten. Siehe hierzu auch [Hei].

Den Anfang bildeten verschiedene Axiomatisierungen der Geometrie, der Algebra, und insbesondere der Mengenlehre. Davon sind die wichtigsten diejenige von Zermelo, ergänzt durch Fraenkel und von Neumann, ZFC genannt, und die Typentheorie von Whitehead und Russell. Letztere ist das Überbleibsel des Fregeschen Versuchs einer Reduktion der Mathematik auf die Logik. Stattdessen stellte es sich heraus, dass die Mathematik gänzlich auf der Mengenlehre als einer Theorie erster Stufe aufgebaut werden kann. Tatsächlich wurde diese Einsicht erst allmählich gewonnen und auch erst nachdem um 1915 der Rest verborgener Annahmen aus der Mengen-

[1)] Insbesondere zu den Stoikern und zu Aristoteles. Die aristotelischen Syllogismen sind nützliche Beispiele für Schlüsse in einer Sprache erster Stufe mit einstelligen Prädikatensymbolen. Einer dieser Syllogismen dient als ein Beispiel im Abschnitt **4.4** über Logikprogrammierung.

lehre entfernt wurde. Zum Beispiel ist der Begriff des geordneten Paares in Wahrheit ein mengentheoretischer oder kann zumindest als ein solcher verstanden werden. Es handelt sich nicht um einen logischen Begriff.

Gleich nachdem diese Axiomatisierungen abgeschlossen waren, entdeckte Skolem, dass es abzählbare Modelle von ZFC gibt; ein Rückschlag für die Hoffnung auf eine axiomatische Definition des abstrakten Begriffs einer Menge. Näheres hierzu in den Ausführungen in Abschnitt **3.4**. Skolem wies damit erstmals auf Grenzen der bis dahin so erfolgreichen axiomatischen Methode hin.

Etwa um dieselbe Zeit betraten zwei herausragende Mathematiker, Hilbert und Brouwer, die Szene und begannen ihren berühmten Streit über die Grundlagen der Mathematik. Dieser ist in zahlreichen Darstellungen und besonders ausführlich in [Kl2, Chapter IV] beschrieben worden und wird daher hier nicht wiedergegeben.

Der nächste Glanzpunkt ist die von Gödel bewiesene Vollständigkeit der von Hilbert im ersten modernen Lehrbuch über Mathematische Logik ([HA]) präsentierten Regeln der Prädikatenlogik. Damit wurde ein Traum von Leibniz in gewissem Umfange Wirklichkeit, nämlich die Schaffung einer *ars inveniendi* (einer Kunst des Erfindens) mathematischer Wahrheiten in Gestalt eines formalen Kalküls. Siehe hierzu **3.5**.

Hilbert hatte inzwischen seine Ansichten über die Grundlagen der Mathematik zu einem Programm entwickelt. Dieses zielte darauf ab, die Konsistenz der Arithmetik und darüber hinaus der Gesamtheit der Mathematik einschließlich der nichtfiniten mengentheoretischen Methoden mit finiten Mitteln zu beweisen. Dieses Programm fand zuerst begeisterte Zustimmung. Aber bereits 1931 zeigte Gödel mit seinen Unvollständigkeitssätzen, dass Hilberts ursprüngliches Programm fehlschlagen muss oder zumindest einer sorgfältigen Revision bedarf.

Viele Logiker betrachten die Gödelschen Sätze als das Top-Ergebnis der Mathematischen Logik des 20. Jahrhunderts. Eine Konsequenz dieser Sätze ist die Existenz konsistenter Erweiterungen der Peano-Arithmetik, in welchen wahre und falsche Sätze in friedlicher Koexistenz miteinander leben (siehe Abschnitt **7.2**) und deshalb von uns auch „Traumtheorien" genannt werden. Damit war auch Hilberts Ansatz gescheitert, Widerspruchsfreiheit als ein Wahrheitskriterium in der Mathematik zu betrachten. Selbst wenn ZFC widerspruchsfrei sein sollte, ist damit die Frage nicht geklärt, wie dieses oder ein erweitertes axiomatische System an der Realität zu messen ist. Ein integraler Bestandteil der Mengenlehre ist das Unendlichkeitsaxiom, und dieses überschreitet klar die Grenzen physikalischer Erfahrung.

Die von Gödel in [Gö2] entwickelten Methoden waren gleichermaßen bahnbrechend für die Entstehung der Rekursionstheorie um das Jahr 1936. Churchs Beweis der Unentscheidbarkeit des Tautologieproblems markiert einen weiteren herausragenden Erfolg. Nachdem Church hinreichende Belege durch eigene Forschungen sowie durch diejenigen von Turing, Kleene, und anderen gesammelt hatte, formulierte er 1936 seine berühmte These (Abschnitt **6.1**), obwohl zu der Zeit keine Computer im heutigen Sinne existierten, noch vorhersehbar war, dass Berechenbarkeit jemals die weitreichende Rolle spielen würde, die sie heute einnimmt.

Wie bereits erwähnt, musste Hilberts Programm revidiert werden. Von Gentzen wurde ein entscheidender Schritt unternommen, der als ein weiterer durchbrechender Erfolg der Mathematischen Logik und als Startpunkt der heutigen Beweistheorie angesehen wird. Die logischen Kalküle in **1.4** und **3.1** sind mit Gentzens Kalkülen des natürlichen Schließens verwandt. Eine Diskusssion der speziellen beweistheoretischen Ziele und Methoden liegt jedoch nicht im Rahmen dieses Buches.

Wir erwähnen ferner Gödels Entdeckung, dass es weder das Auswahlaxiom (AC) noch die Kontinuumshypothese (CH) sind, welche das Konsistenzproblem der Mengenlehre verursachen. Die Mengenlehre mit AC und CH ist konsistent, falls die Mengenlehre ohne AC und ohne CH dies ist. Dieses Grundresultat der Mathematischen Logik hätte ohne die Nutzung strikt formaler Methoden nicht gewonnen werden können. Das gilt auch für den 1963 von P. Cohen erbrachten Beweis der Unabhängigkeit von AC und CH von den Axiomen der Mengenlehre.

Das bisher Gesagte zeigt, dass die Mathematische Logik eng mit dem Ziel verbunden ist, der Mathematik eine solide Grundlage zu geben. Wir beschränken uns in dieser Hinsicht jedoch auf die Logik und ihr faszinierendes Wechselspiel mit der Mathematik. Die Geschichte lehrt, dass es unmöglich ist, eine programmatische Ansicht über die Grundlagen der Mathematik zu etablieren, welche die Gemeinschaft der Mathematiker als Ganzes zufriedenstellt. Die Mathematische Logik ist das richtige Werkzeug um die technischen Grundlagenprobleme der Mathematik zu behandeln, sie kann aber nicht deren epistemologische Fragen klären. Ungeachtet dessen ist die Mathematische Logik wegen ihrer zahlreichen Anwendungen und ihres übergreifenden Charakters zu einer der für die Mathematik und Informatik gleichermaßen bedeutsamen Disziplinen herangewachsen.

Notationen

Diese Notationen betreffen formale und terminologische Elemente der mathematischen Umgangssprache. Sie sind für Leser aufgelistet, die nicht regelmäßig mit Mathematik zu tun haben und müssen nicht in einem Zuge gelesen werden. Fast alle verwendeten Notationen sind Standard. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ bezeichnen die Mengen der natürlichen Zahlen einschließlich 0, der ganzen, rationalen bzw. der reellen Zahlen. n, m, i, j, k bezeichnen immer natürliche Zahlen, solange nichts anderes gesagt wird. Daher werden Zusätze wie $n \in \mathbb{N}$ in der Regel unterlassen.

$M \cup N$, $M \cap N$ und $M \setminus N$ bezeichnen wie üblich *Vereinigung*, *Durchschnitt*, bzw. *Differenz* der Mengen M, N, und $\subseteq$ die *Inklusion*. $M \subset N$ steht für $M \subseteq N$ und $M \neq N$, wird aber nur benutzt, wenn der Umstand $M \neq N$ besonders betont werden soll. Ist M in einer Betrachtung fest und $N \subseteq M$, darf $M \setminus N$ auch mit $\setminus N$ (oder $\neg N$) bezeichnet werden. $\emptyset$ bezeichnet die *leere Menge*, $\mathfrak{P}M$ die *Potenzmenge* von M, die Menge aller ihrer Teilmengen. Will man hervorheben, dass die Elemente einer Menge F selbst Mengen sind, heißt F auch eine *Mengenfamilie*. $\bigcup F$ bezeichnet die Vereinigung einer Mengenfamilie F, d.h. die Menge der Elemente, die in wenigstens einem $M \in F$ liegen, und $\bigcap F$ für $F \neq \emptyset$ den Durchschnitt, d.h. die Menge der zu allen $M \in F$ gehörenden Elemente. Ist $F = \{M_i \mid i \in I\}$ indiziert (siehe unten), bezeichnet man $\bigcup F$ und $\bigcap F$ meistens mit $\bigcup_{i \in I} M_i$ bzw. $\bigcap_{i \in I} M_i$.

$M \times N$ bezeichnet die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a \in M$ und $b \in N$. Eine *Relation* zwischen M und N ist eine Teilmenge von $M \times N$. Ist $f \subseteq M \times N$ und gibt es zu jedem $a \in M$ genau ein $b \in N$ mit $(a, b) \in f$, heißt f eine *Funktion* (*Abbildung*) *von* M *nach* N. Das durch a eindeutig bestimmte Element b mit $(a, b) \in f$ wird mit $f(a)$ oder fa (die von uns bevorzugte Schreibweise) oder a^f bezeichnet. Man nennt fa den *Wert von* f *bei* a sowie $\mathit{ran}\, f = \{fx \mid x \in M\}$ das *Bild* (range) von f, während $\mathit{dom}\, f = M$ der *Definitionsbereich* (domain) von f heißt. Man schreibt $f\colon M \to N$ für 'f ist Funktion mit $\mathit{dom}\, f = M$ und $\mathit{ran}\, f \subseteq N$' [1]. Oft wird aber auch f selbst durch $f\colon M \to N$ zitiert. Ist $f(x) = t(x)$ für einen Term t, wird f auch mit $f\colon x \mapsto t$ oder $x \mapsto t$ bezeichnet. Terme werden in **2.2** erklärt.

$f\colon M \to N$ heißt *injektiv*, wenn $fx = fy \;\Rightarrow\; x = y$, für alle $x, y \in M$, *surjektiv*, wenn $\mathit{ran}\, f$ ganz N ausfüllt, und *bijektiv*, wenn f injektiv und surjektiv ist. Für $M = N$ ist die *identische Abbildung* $\mathit{id}_M\colon x \mapsto x$ Beispiel einer Bijektion. Sind f, g Abbildungen mit $\mathit{ran}\, g \subseteq \mathit{dom}\, f$, heißt die Funktion $h\colon x \mapsto f(g(x))$ auch deren *Produkt* (oder deren *Komposition*), oft notiert als $h = f \circ g$.

---

[1] Hochkommata dienen hier wie überall in diesem Buch der Abgrenzung gewisser Sprachpartikel, wie z.B. in Worten formulierter Prädikate, vom umgebenden Text.

Seien I, M beliebige Mengen, wobei I, ziemlich willkürlich, die *Indexmenge* genannt werde. M^I bezeichne die Menge aller $f\colon I \to M$. Oft wird eine Funktion $f \in M^I$ mit $i \mapsto a_i$ durch $(a_i)_{i\in I}$ bezeichnet und heißt je nach Zusammenhang eine indizierte *Familie*, ein *I-Tupel* oder eine *Folge*. Diese heißt *endlich* oder *unendlich*, je nachdem ob I endlich oder unendlich ist. Falls, wie in der Mengenlehre üblich, 0 mit $\emptyset$, und $n > 0$ mit $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ identifiziert wird, lässt M^n sich verstehen als die Menge der Folgen oder n-Tupel $(a_i)_{i<n}$ aus Elementen von M *der Länge n*. Einziges Element von M^0 $(= M^\emptyset)$ ist $\emptyset$, auch die *leere Folge* genannt. Diese hat die Länge 0. Gleichwertige Schreibweisen für $(a_i)_{i<n}$ bzw. $(a_i)_{i\leqslant n}$ sind $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ und $(a_0, \ldots, a_n)$. Das Aneinanderfügen endlicher Folgen heißt auch deren *Verkettung*. So ist (a_0, a_1, a_2) verkettet mit (b_0, b_1) die Folge $(a_0, a_1, a_2, b_0, b_1)$.

Für $k \leqslant n$ heißt $(a_i)_{i\leqslant k}$ ein *Anfang* von $(a_i)_{i\leqslant n}$, und zwar ein *echter* Anfang, falls $k < n$. Häufig betrachten wir auch Folgen der Gestalt $(a_1, \ldots, a_n)$, im Text durchweg mit $\vec{a}$ bezeichnet. Hier ist für $n = 0$ die leere Folge gemeint, genau wie $\{a_1, \ldots, a_n\}$ für $n = 0$ grundsätzlich die leere Menge bedeutet.

Ist A ein *Alphabet*, d.h. sind die Elemente von A *Symbole* oder werden sie als solche bezeichnet, wird $(a_1, \ldots, a_n)$ meistens in der Weise $a_1 \cdots a_n$ geschrieben und heißt ein *Wort* oder eine *Zeichenfolge* über A. Die leere Folge wird dann konsequenterweise das *leere Wort* genannt. Ein Anfang einer Zeichenfolge ξ heißt auch ein *Anfangswort* von ξ. Die Verkettung zweier Worte ξ und η werde mit $\xi\eta$ bezeichnet. Falls $\xi = \xi_1\eta\,\xi_2$ für gewisse Worte ξ_1, ξ_2 und $\eta \neq \emptyset$, heißt η auch ein *Teilwort* von ξ.

Teilmengen $P, Q, R, \ldots \subseteq M^n$ heißen *n-stellige Prädikate* oder *Relationen* von M, $n \geqslant 1$. Einstellige Prädikate werden mit den entsprechenden Teilmengen von M identifiziert, z.B. das Primzahlprädikat mit der Menge aller Primzahlen. Statt $\vec{a} \in P$ schreiben wir $P\vec{a}$, statt $\vec{a} \notin P$ auch $\neg P\vec{a}$. Falls $P \subseteq M^2$ und P ein Symbol ist wie z.B. $\lhd$, $<$, $\leqslant$, $\in$, wird aPb statt Pab geschrieben, also $a \lhd b$ statt $\lhd\, ab$ usw. Für $P \subseteq M^n$ heiße die durch

$$\chi_P\vec{a} = \begin{cases} 1 & \text{falls } P\vec{a}, \\ 0 & \text{falls } \neg P\vec{a} \end{cases}$$

definierte n-stellige Funktion χ_P die *charakteristische Funktion* von P. Dabei ist unerheblich, ob man die Werte $0, 1$ als Wahrheitswerte oder als natürliche Zahlen versteht wie dies in Kaptitel **6** geschieht, oder ob 0 und 1 in der Definition gar vertauscht werden. Wichtig ist nur, dass P durch χ_P eindeutig bestimmt ist.

Jedes $f\colon M^n \to M$ heißt eine n-stellige *Operation von M*. Meistens schreiben wir $f\vec{a}$ für $f(a_1, \ldots, a_n)$. Eine 0-stellige Operation von M hat wegen $A^0 = \{\emptyset\}$ die Gestalt $\{(\emptyset, c)\}$ mit $c \in M$; diese wird kurz mit c bezeichnet und heißt eine *Konstante*. Jede n-stellige Operation von f von M wird durch

$$graph\, f := \{(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in M^{n+1} \mid f(a_1, \ldots, a_n) = a_{n+1}\}$$

eindeutig beschrieben. Es handelt sich hier um eine $(n+1)$-stellige Relation, welche der *Graph von* f genannt wird. f und $graph\, f$ sind dasselbe, wenn – wie dies gelegentlich geschieht – M^{n+1} mit $M^n \times M$ identifiziert wird.

Am häufigsten werden 2-stellige Operationen angetroffen. Bei diesen wird das entsprechende Operationssymbol in der Regel zwischen die Argumente gesetzt. Eine derartige, hier mit $\circ$ bezeichnete Operation $\circ : M^2 \to M$ heißt

kommutativ	wenn $a \circ b = b \circ a$ für alle $a, b \in M$,
assoziativ	wenn $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ für alle $a, b, c \in M$,
idempotent	wenn $a \circ a = a$ für alle $a \in M$,
invertierbar	wenn zu allen $a, b \in M$ Elemente $x, y \in M$ existieren mit $x \circ a = b$ und $a \circ y = b$.

Als Verallgemeinerung von $M_1 \times M_2$ lässt sich das *direkte Produkt* $N = \prod_{i \in I} M_i$ einer Mengenfamilie $(M_i)_{i \in I}$ verstehen. Jedes $a \in N$ ist eine auf I erklärte Funktion $a = (a_i)_{i \in I}$ mit $a_i \in M_i$ (eine *Auswahlfunktion*). a_i heißt auch die *i-te Komponente* von a. Falls $M_i = M$ für alle $i \in I$, ist $\prod_{i \in I} M_i$ offenbar mit M^I identisch. Dies gilt auch für $I = \emptyset$, weil $\prod_{i \in I} M_i = \{\emptyset\}$ und auch $M^I = \{\emptyset\}$.

Bezeichnen A, B metasprachliche Ausdrücke, stehen $A \Leftrightarrow B$, $A \Rightarrow B$, $A \mathbin{\&} B$ und $A \vee B$ für *A genau dann wenn B*, *wenn A so B*, *A und B* bzw. *A oder B*. Dabei sollen die Symbole $\Rightarrow, \Leftrightarrow, \ldots$ stärker trennen als sprachliche Bindungspartikel. Deshalb darf in einem Textteil wie z.B. '$T \vDash \alpha \;\Leftrightarrow\; \alpha \in T$, für alle $\alpha \in \mathcal{L}^0$' (Seite 64) das Komma nicht fehlen, weil '$\alpha \in T$ für alle $\alpha \in \mathcal{L}^0$' fälschlicherweise gelesen werden könnte als 'T ist inkonsistent'.

$s := t$ bedeutet, dass s durch den Term t definiert wird, oder wenn s eine Variable ist, auch die Zuweisung des Wertes von t zu s. Für Terme s, t sei $s > t$ grundsätzlich nur eine andere Schreibweise für $t < s$. Dieselbe Bemerkung bezieht sich auch auf andere unsymmetrische Relationssymbole wie $\leqslant$, $\subseteq$ usw.

In der mathematischen Umgangssprache werden Formeln oft direkt in den Text integriert und man bedient sich dabei auch gewisser verkürzender Schreibweisen. So wie man z.B. '$a < b$ und $b < c$' häufig zu '$a < b < c$', oder '$a < b$ und $b \in M$' zu '$a < b \in M$' verkürzt, darf '$X \vdash \alpha \equiv \beta$' für '$X \vdash \alpha$ und $\alpha \equiv \beta$' geschrieben werden ('aus der Formelmenge X ist die Formel α beweisbar und α ist äquivalent zu β'). Das Symbol $\equiv$ wird in diesem Buch nur metasprachlich verwendet, kommt also in keiner der behandelten formalen Sprachen vor.