

Michael Joswig
Thorsten Theobald

**Algorithmische
Geometrie**

Aufbaukurs Mathematik

Herausgegeben von Martin Aigner, Peter Gritzmann, Volker Mehrmann
und Gisbert Wüstholz

Walter Alt
Nichtlineare Optimierung

Martin Aigner
Diskrete Mathematik

Albrecht Beutelspacher/Ute Rosenbaum
Projektive Geometrie

Gerd Fischer
Ebene algebraische Kurven

Wolfgang Fischer und Ingo Lieb
Funktionentheorie

Otto Forster
Analysis 3

Klaus Hulek
Elementare Algebraische Geometrie

Michael Joswig und Thorsten Theobald
Algorithmische Geometrie

Horst Knörrer
Geometrie

Helmut Koch
Zahlentheorie

Ulrich Krengel
Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Wolfgang Kühnel
Differentialgeometrie

Ernst Kunz
Einführung in die algebraische Geometrie

Wolfgang Lück
Algebraische Topologie

Werner Lütkebohmert
Codierungstheorie

Reinhold Meise und Dietmar Vogt
Einführung in die Funktionalanalysis

Gisbert Wüstholz
Algebra

Grundkurs Mathematik

Matthias Bollhöfer/Volker Mehrmann
Numerische Mathematik

Gerd Fischer
Lineare Algebra

Hannes Stoppel/Birgit Grieser
Übungsbuch zur Linearen Algebra

Gerd Fischer
Analytische Geometrie

Otto Forster
Analysis 1

Otto Forster/Rüdiger Wessoly
Übungsbuch zur Analysis 1

Otto Forster
Analysis 2

Otto Forster/Thomas Szymczak
Übungsbuch zur Analysis 2

Gerhard Opfer
Numerische Mathematik für Anfänger

Michael Joswig
Thorsten Theobald

Algorithmische Geometrie

Polyedrische und
algebraische Methoden



Bibliografische Information Der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

Prof. Dr. Michael Joswig

Fachbereich Mathematik

Technische Universität Darmstadt

Schloßgartenstraße 7

64289 Darmstadt

joswig@mathematik.tu-darmstadt.de

Prof. Dr. Thorsten Theobald

Institut für Mathematik, FB 12

Johann Wolfgang Goethe-Universität

Robert-Mayer-Str. 10

60325 Frankfurt am Main

theobald@math.uni-frankfurt.de

1. Auflage 2008

Alle Rechte vorbehalten

© Friedr. Vieweg & Sohn Verlag | GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2008

Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Susanne Jahnel

Der Vieweg Verlag ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media.

www.vieweg.de



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt.
Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes
ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbe-
sondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und
die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Umschlaggestaltung: Ulrike Weigel, www.CorporateDesignGroup.de

Textgestaltung: Christoph Eyrich, Berlin

Druck und buchbinderische Verarbeitung: MercedesDruck, Berlin

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Printed in Germany

ISBN 978-3-8348-0281-1

Vorwort

Die *Geometrie* gilt als das älteste systematisierte Teilgebiet der Mathematik. Aufgrund der wachsenden Fähigkeiten von Computern nehmen algorithmische Zugänge einen immer höheren Stellenwert in der Geometrie ein. Vor diesem Hintergrund verstehen wir *Algorithmische Geometrie* in einem sehr allgemeinen Sinn als denjenigen Teil der Geometrie, der *prinzipiell* einer algorithmischen Behandlung zugänglich ist.

In dem vorliegenden Lehrbuch soll ein mathematisch orientierter, breiter Zugang zu algorithmischen Fragestellungen der Geometrie geschaffen werden. Wir weisen darauf hin, dass es sich um einen *einleitenden* Text handelt. Beschränkungen sind also unabdingbar, und die Stoffauswahl ist zwangsläufig von Vorlieben der Autoren geprägt.

Im ersten Teil des Buches werden Probleme und Techniken behandelt, die sich auf polyedrische (das heißt, linear begrenzte) Objekte beziehen. Hierzu gehören beispielsweise Algorithmen zur Berechnung konvexer Hüllen und die Konstruktion von Voronoi-Diagrammen. Methoden der algorithmischen algebraischen Geometrie stehen im Zentrum des zweiten Teils. Schwerpunkte hier sind Gröbnerbasen und das Lösen polynomialer Gleichungssysteme. Der dritte Teil widmet sich schließlich ausgewählten Anwendungen aus Computergrafik, Kurvenrekonstruktion und Robotik.

Vorrangiges Anliegen ist es, Querverbindungen algorithmisch-geometrischer Fragestellungen zu anderen Teilgebieten der Mathematik (wie der algebraischen Geometrie, der Optimierung oder der Numerik) herzustellen. Hierzu konzentrieren wir uns auf einige wesentliche Ideen und Methoden. Zusätzlich wollen wir einen Einblick in die Möglichkeiten aktueller Computersoftware (wie `polymake`, `Maple` oder `Singular`) in diesem Kontext geben.

Erwartete Vorkenntnisse

Das Buch richtet sich an fortgeschrittene Studierende in den Bachelor-Studiengängen Mathematik und Informatik sowie an Studierende der Ingenieurwissenschaften, die sich für Anwendungen der algorithmischen Geometrie (etwa in der Robotik) interessieren.

Vorausgesetzt wird der gängige Stoff der Anfangssemester aus der linearen Algebra und der Analysis. Zusätzliche Kenntnisse in diskreter Mathematik, Op-

timierung, Algorithmen und Algebra sind hilfreich; das aus diesen Bereichen benötigte Material wird aber im Text hergeleitet oder in den Anhängen zusammengestellt.

Zielsetzung des Buches

Es ist nicht beabsichtigt, alle Teilaspekte umfassend zu behandeln. Stattdessen sollen – ausgehend von algorithmischen Fragestellungen in verschiedenen aktuellen Teilbereichen der Geometrie – vielfältige Einstiegsmöglichkeiten in die (meist englischsprachige) Spezialliteratur geschaffen werden.

Im Gegensatz zu aus der Informatik hervorgegangen Büchern zum selben Thema wird der für effiziente Implementierungen oftmals wichtige Aspekt der abstrakten Datentypen nur am Rande behandelt.

Danksagung

Dieses Buch ist aus Vorlesungen der Autoren an der Technischen Universität Berlin, der Technischen Universität Darmstadt und der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main hervorgegangen. Die Hörer dieser Veranstaltungen haben uns zahlreiche Anregungen gegeben.

Einige Bilder wurden uns freundlicherweise von Sven Herrmann (Abbildung 13.3) und Nikolaus Witte (Abbildung 1.1) zur Verfügung gestellt. Christoph Eyrich hat uns wertvolle Hilfe bei der Gestaltung gegeben.

Für Kommentare und Kritik bedanken wir uns ganz besonders bei René Brandenberg, Peter Gritzmann, Martin Henk, Sven Herrmann, Katja Kulas, Alexander Martin, Werner Nickel, Marc Pfetsch, Cordian Riener, Thilo Rörig, Moritz Schmitt, Achill Schürmann, Dieter Schuster, Reinhard Steffens, Natascha Steinbrügge, Tanja Treffinger, Axel Werner, Claudia Wessling, Nikolaus Witte, Ronald Wotzlaw und Günter M. Ziegler.

Darmstadt und Frankfurt am Main,
im August 2007

Michael Joswig
Thorsten Theobald