

Dorothea Bahns
Christoph Schweigert

**Softwarepraktikum –
Analysis und
Lineare Algebra**

Aus dem Programm

Mathematik

Lineare Algebra

von Albrecht Beutelspacher

Analysis mit MAPLE

von Rüdiger Braun und Reinhold Meise

Analysis 1

von Ehrhard Behrends

Analysis 2

von Ehrhard Behrends

Lineare Algebra

von Gerd Fischer

Analytische Geometrie

von Gerd Fischer

Analysis 1

von Otto Forster

Analysis 2

von Otto Forster

Dorothea Bahns
Christoph Schweigert

Softwarepraktikum – Analysis und Lineare Algebra

Ein MAPLE-Arbeitsbuch
mit Beispielen und Lösungen



Bibliografische Information Der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet
über <<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

Prof. Dr. Dorothea Bahns

Universität Hamburg
Department Mathematik
Bundesstraße 55
20146 Hamburg

bahns@math.uni-hamburg.de

Prof. Dr. Christoph Schweigert

Universität Hamburg
Department Mathematik
Bundesstraße 55
20146 Hamburg

schweigert@math.uni-hamburg.de

1. Auflage 2008

Alle Rechte vorbehalten

© Friedr. Vieweg & Sohn Verlag | GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2008

Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Susanne Jahnel

Der Vieweg Verlag ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media.
www.vieweg.de



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Umschlaggestaltung: Ulrike Weigel, www.CorporateDesignGroup.de

Druck und buchbinderische Verarbeitung: MercedesDruck, Berlin

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Printed in Germany

ISBN 978-3-8348-0370-2

Vorwort

Software-Systeme sind heute ein Standardwerkzeug für den Umgang mit mathematischen Fragestellungen in allen mathematisch-technisch-naturwissenschaftlichen Berufen. In der Praxis kommen dabei häufig Vielzweck-Systeme wie etwa Maple, Mathematica oder MuPAD zum Einsatz, die symbolisches und numerisches Rechnen sowie graphische Methoden zur Visualisierung bereitstellen.

Zu Recht spielen diese Systeme daher auch in der Mathematikausbildung eine immer größere Rolle, zumal anhand solcher Systeme in einfacher Weise sowohl anwendungsbezogene Fertigkeiten entwickelt werden können als auch das Verständnis mathematischer Zusammenhänge durch die Beschäftigung mit konkreten Beispielen vertieft werden kann. Eine frühzeitige Auseinandersetzung mit elementaren Aspekten der Computeralgebra erscheint uns daher für Studierende mathematischer, natur- und ingenieurwissenschaftlicher Fächer, insbesondere auch für Studierende in Lehramtsstudiengängen, als sinnvolle Ergänzung der mathematischen Grundausbildung im ersten und zweiten Studienjahr. Ein solches Konzept trägt auch der Forderung Rechnung, in den neuen, gestuften Studiengängen frühzeitig anwendungsbezogene Inhalte zu bieten, ohne dass dies zu Lasten der gründlichen wissenschaftlichen Beschäftigung mit den mathematischen Studieninhalten geschieht.

Wie die Erfahrung zeigt, verläuft der Prozess des Lernens und Verstehens auch von Mathematik in mehreren Stufen und sollte nicht aufgrund des Absolvierens einer Modulabschlussprüfung als abgeschlossen angesehen werden. Gerade weil der Stoff des ersten Studienjahres in den neuen Studiengängen oft komprimiert dargestellt werden muss, ist es unabdingbar, diesen noch einmal zu konkretisieren und zu vertiefen. Dies wird dann besonders gut gelingen, wenn es sich nicht um reine Wiederholung handelt, sondern ein neuer, weiterführender Aspekt hinzutritt: Im vorliegenden Buch soll der Leser dazu angeregt werden, sich mithilfe des Computers selbständig mit den mathematischen Objekten zu beschäftigen.

Das Buch ist entstanden aus einer gleichnamigen Lehrveranstaltung für das zweite Studienjahr, die an der Universität Hamburg für

Studierende in den mathematischen Bachelor-Studiengängen sowie für das höhere Lehramt angeboten wird. Die Veranstaltung steht auch Nebenfachstudenten, insbesondere aus der Physik, offen.

Ziel des Buches ist eine elementare Einführung in ein verbreitetes Software-System, die die prinzipiellen Möglichkeiten solcher Systeme deutlich macht und die die Leser anregt, sich erneut mit dem Stoff der mathematischen Grundvorlesungen in konkreten Anwendungen auseinanderzusetzen. Es soll und kann die Ausbildung in der Numerischen Mathematik, der Computeralgebra oder der Programmierung nicht vorwegnehmen oder gar ersetzen. Umgekehrt werden keine Vorkenntnisse in Numerik oder im Programmieren erwartet.

Kenntnisse des üblicherweise in den Vorlesungen zur Analysis und Linearen Algebra behandelten Stoffs werden jedoch vorausgesetzt, und wir möchten durch Verweise auf gängige Lehrbücher den Leser dazu bringen, diese – in der Regel nochmals – unter einem veränderten Blickwinkel anzusehen. Das Buch ist also kein Repetitorium oder Lehrbuch zur Erarbeitung des Grundstoffs in anderer Form.

Unser Dank gilt allen, die uns durch Anregungen und Hinweise unterstützt haben, insbesondere Christian Curilla, Birgit Richter, Urs Schreiber, Petra Ullmann und Konrad Waldorf.

Wir wünschen dem Leser zweierlei:

Freude daran, sich unter einem neuen Blickwinkel noch einmal mit der Mathematik des ersten Studienjahres zu befassen.

Freude an den Möglichkeiten, wie sie ein Computeralgebra-System wie MAPLE bietet, konkret mit mathematischen Objekten umzugehen.

Hamburg, im August 2007

Dorothea Bahns
Christoph Schweigert

Wie man dieses Buch benutzt

Hinweise für Studierende

Mit diesem Buch sollen Sie sowohl Mathematik des ersten Studienjahrs vertiefen als auch das Software-Paket MAPLE kennen lernen. Für den ersten Zweck ist es wichtig, dass Sie sich die mathematischen Inhalte klar machen und diese eigenständig wiederholen, bevor Sie Aufgaben mithilfe von MAPLE bearbeiten. Dabei sollen Ihnen die mathematischen Stichworte und die einleitenden Fragen an den Kapitelanfängen helfen, die in der Regel ohne Einsatz von MAPLE zu bearbeiten sind. Bearbeiten Sie dann die ersten Aufgaben mit MAPLE, aber zögern Sie nicht, danach nochmals Ihre Antworten auf die Eingangsfragen zu überprüfen. Bei den Fragen kann übrigens mehr als eine Antwort richtig sein. Lösungshinweise zu ausgewählten Fragen finden Sie am Ende des Buches; diese können auch die Form eines Verweises auf ein gängiges Lehrbuch haben. Für einige Aufgaben werden auch kleinere MAPLE-Programme angegeben.

Benutzen Sie zur Wiederholung Ihre Mitschrift der Vorlesungen Analysis I und II sowie Lineare Algebra I und II bzw. die Lehrbücher, die Sie im ersten Studienjahr schon benutzt haben. Diese Materialien sollten Sie bei der Arbeit mit diesem Buch immer griffbereit haben. Standardliteratur, auf die wir uns öfter beziehen, sind die drei Bände:

- G. Fischer, Lineare Algebra, 14. Auflage, Vieweg, 2003.
- O. Forster, Analysis 1, 8. Auflage, Vieweg, 2006,
und Analysis 2, 7. Auflage, Vieweg, 2006.

Natürlich können und sollen Sie auch andere Lehrbücher verwenden; auch im Buch wird hin und wieder auf andere Bücher Bezug genommen. An den entsprechenden Stellen geben wir dann die genaue Referenz an.

Einen Überblick über den behandelten Stoff bekommen Sie am schnellsten, indem Sie das Inhaltsverzeichnis durchsehen. Hier wollen wir nur darauf hinweisen, dass das erste Kapitel eine allgemeine

Einführung in MAPLE und das dritte Kapitel eine Einführung in die Behandlung von Vektoren und Matrizen mithilfe von MAPLE gibt. Beide Kapitel sollten daher frühzeitig durchgearbeitet werden. Die anderen Kapitel bauen nicht streng aufeinander auf; Sie müssen diese Kapitel also nicht der Reihe nach durcharbeiten. Jedes Kapitel sollten Sie jedoch in der Regel von Anfang an durcharbeiten. Das zweite Kapitel hat eine Sonderstellung: Es soll Ihnen ermöglichen, Ihre MAPLE-Kenntnisse aus dem ersten Kapitel sofort auf einige interessante Fragestellungen aus verschiedenen Bereichen der Mathematik anzuwenden. Sie können die Aufgaben jedoch auch zu einem späteren Zeitpunkt bearbeiten.

Zum Schluss noch einige Hinweise, die MAPLE selbst betreffen: Die Arbeitsanweisungen in diesem Buch sind auf die Verwendung des so genannten *classic worksheet* von MAPLE optimiert. Möchten Sie das *classic worksheet* in MAPLE ab Version 10 verwenden, so müssen Sie dieses von Hand aufrufen. Unter unix/linux rufen Sie dafür MAPLE mit der Option `-cw` auf, unter Windows benutzen Sie den Link "Classic Worksheet Maple 10" im MAPLE 10 Startmenü. Normalerweise sollten Sie pro Kapitel des Buches eine MAPLE-Sitzung eröffnen. Achten Sie dabei darauf, dass es keine Konflikte bei den verwendeten Variablennamen gibt.

Ein Index gibt Ihnen einen Überblick über die MAPLE-Befehle, die in diesem Buch behandelt werden. Am Anfang eines jeden Kapitels sind sowohl die Stichworte zu MAPLE als auch die mathematischen Begriffe zusammengestellt, die in dem Kapitel eine wichtige Rolle spielen. Benutzen Sie auch immer die in MAPLE vorgesehene Hilfefunktion, um mehr über die Befehle zu lernen.

Wie jedes umfangreiche Software-Paket hat auch MAPLE Eigenheiten und 'bugs'; wir haben diese jedoch bewusst nicht in den Vordergrund gestellt. Die wenigen Details dieser Art, die wir in diesem Buch besprechen, treten in Version 10 von MAPLE auf, die wir bei der Erstellung der Aufgaben benutzt haben.

Hinweise für Dozenten

Kapitel 1 und 3 dienen der Einführung und sind eher syntax-orientiert. Bei Kapitel 1 hat uns das ausgezeichnete Buch

- B. Perrin-Riou: Algèbre, arithmétique et MAPLE, Paris, Cassini, 2000

sehr geholfen. Ergänzende Anregungen finden sich auch in dem Buch

- R. Braun, R. Meise: Analysis mit MAPLE, Vieweg, 1995.

Kapitel 1 und 3 sind grundlegend und sollten daher frühzeitig den Studenten zur Bearbeitung gegeben werden. In allen anderen Kapiteln spielen mathematische Inhalte eine größere Rolle; hier sind verschiedene Reihenfolgen denkbar. Innerhalb eines Kapitels steigert sich aber im allgemeinen der mathematische und MAPLE-technische Schwierigkeitsgrad. Hier sind Umstellungen problematischer.

Das Buch ist entstanden aus einer gleichnamigen Lehrveranstaltung im Wintersemester 2006/07 an der Universität Hamburg, die nun ein Pflichtmodul in allen mathematischen Bachelor-Studiengängen ist. Für diese Veranstaltung haben wir die Aufgaben dieses Buches im E-Learning-System okuson, siehe

<http://www.math.rwth-aachen.de/~OKUSON/>

implementiert. Die Studenten konnten die Aufgaben an einem Ort und zu einer Zeit ihrer Wahl bearbeiten, ergänzend haben wir jedoch mehrmals wöchentlich Fragestunden angeboten.

Internetseite

Eine Internetseite zu dem Buch wird über die Homepages der beiden Autoren zugänglich sein. Darauf werden wir Ergänzungen, Links zu Online-Materialien sowie eine Liste von Druckfehlern bereitstellen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung in MAPLE	1
1.1	Elementare Operationen	1
1.2	Variable und Zuweisungen	4
1.3	Einfaches Programmieren	7
1.4	Funktionen und Routinen	12
2	Erste Beispiele und Aufgaben	25
2.1	Approximation von Quadratwurzeln	25
2.2	Die Bailey-Borwein-Plouffe-Formel	27
2.3	Benfords Gesetz	30
2.4	Darstellung von Primzahlen durch Quadratsummen	34
3	Elementare Operationen mit Matrizen und Vektoren	38
3.1	Syntax	39
3.2	Zufallsmatrizen	52
3.3	Determinante, Spur und Rang	53
4	Das Gauß-Verfahren und die Cramersche Regel	60
4.1	Lineare Gleichungssysteme	60
4.2	Das Gauß-Verfahren	62
4.3	Die Cramersche Regel	68
5	Diagonalisierbarkeit komplexer Matrizen	73
5.1	Diagonalisierbarkeit	73
5.2	Das Minimalpolynom	75
5.3	Eigenwerte und Eigenräume	78
6	Matrizen mit positiven Einträgen	81
6.1	Positive und positiv-definite Matrizen	81
6.2	Eigenwerte positiver Matrizen	83
6.3	Der Frobenius-Perron-Eigenwert	85
6.4	Die Gauß'sche Zahlenebene	86
6.5	Anwendung: ein Darstellungsring	87

7	Reelle Funktionen einer Variablen	90
7.1	Grenzwerte	90
7.2	Scharen von Funktionen	96
7.3	Das Newton-Verfahren	98
8	Taylor-Entwicklung	102
8.1	Differenzierbare Funktionen	102
8.2	Taylor-Entwicklung	107
9	Reelle Funktionen mehrerer Variabler	116
9.1	Symmetrische Matrizen	116
9.2	Hauptunterdeterminanten	118
9.3	Hessesche Matrix und Gradient	120
10	Quadriken und Kegelschnitte	124
10.1	Systeme quadratischer Gleichungen	124
10.2	Quadriken in zwei Dimensionen	129
10.3	Parametrisierungen von Quadriken	134
10.4	Symmetrien von Quadriken	137
10.5	Quadriken in drei Dimensionen	140
10.6	Kegelschnitte	142
11	Hermite-Polynome und Fourier-Reihen	145
11.1	Die Hermite-Polynome	146
11.2	Die Hermitesche Eigenwertgleichung	149
11.3	Ein angepasstes Skalarprodukt	150
11.4	Entwicklung in Hermite-Polynome	156
11.5	Fourier-Reihen	158
12	Normalformen	163
12.1	Die Jordansche Normalform	163
12.2	Begleitmatrizen	166
12.3	Die Frobeniussche Normalform	169
12.4	Clock- und Shift-Matrizen	174

13 Gewöhnliche Differentialgleichungen	176
13.1 Existenz und Eindeutigkeit	176
13.2 Lineare Differentialgleichungen	178
13.3 Differentialgleichungen höherer Ordnung	183
13.4 Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten .	185
14 Lösungen	189
14.1 Hinweise zu ausgewählten Aufgaben	189
14.2 MAPLE-Codes	192