Thomas Hafner

Proportionalität und Prozentrechnung in der Sekundarstufe I

VIEWEG+TEUBNER RESEARCH

Perspektiven der Mathematikdidaktik

Herausgegeben von:

Prof. Dr. Gabriele Kaiser, Universität Hamburg

Prof. Dr. Rita Borromeo Ferri, Universität Kassel

Prof. Dr. Werner Blum, Universität Kassel

In der Reihe werden Arbeiten zu aktuellen didaktischen Ansätzen zum Lehren und Lernen von Mathematik publiziert, die diese Felder empirisch untersuchen, qualitativ oder quantitativ orientiert. Die Publikationen sollen daher auch Antworten zu drängenden Fragen der Mathematikdidaktik und zu offenen Problemfeldern wie der Wirksamkeit der Lehrerbildung oder der Implementierung von Innovationen im Mathematikunterricht anbieten. Damit leistet die Reihe einen Beitrag zur empirischen Fundierung der Mathematikdidaktik und zu sich daraus ergebenden Forschungsperspektiven.

Thomas Hafner

Proportionalität und Prozentrechnung in der Sekundarstufe I

Empirische Untersuchung und didaktische Analysen

Mit einem Geleitwort von Prof. Dr. Rudolf vom Hofe

VIEWEG+TEUBNER RESEARCH

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

Dissertation Universität Bielefeld, 2011

1. Auflage 2012

Alle Rechte vorbehalten

© Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2012

Lektorat: Ute Wrasmann | Sabine Schöller

Vieweg+Teubner Verlag ist eine Marke von Springer Fachmedien.

Springer Fachmedien ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.

www.viewegteubner.de

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: KünkelLopka Medienentwicklung, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Printed in Germany

ISBN 978-3-8348-1926-0

Geleitwort

Die individuelle Entwicklung des Proportionalitäts- und Prozentbegriffs und ihre psychologischen, pädagogischen und didaktischen Bedingungen sind seit Langem ein wichtiges Thema für das Lehren und Lernen von Mathematik. Vor dem Hintergrund der großen internationalen Vergleichsstudien TIMSS und PISA und der durch diese ausgelösten Entwicklung der kompetenzorientierten empirischen Bildungsforschung stellen sich auch für dieses Thema neue und bislang kaum beantwortete Fragen. So ist zum einen bislang ungeklärt, wie sich die Entwicklung des Proportionalitäts- und Prozentbegriffs und ihrer Bedingungen in Large Assessment Studies über längere Entwicklungszeiträume darstellen und inwieweit sich bekannte normative Modelle oder bislang durch Fall- bzw. Feldstudien gewonnene Hypothesen auch quantitativ empirisch bestätigen lassen. Auf der anderen Seite besteht angesichts der zunehmenden Fokussierung auf situiertes Lernen und auf individuelle Diagnostik und Förderung ein erheblicher Bedarf an Erkenntnissen über die Bedingungen individueller Lernprozesse in diesem wichtigen Anwendungsgebiet der Schulmathematik.

Im Bereich dieser Problemstellungen bewegt sich die vorliegende Dissertation von Thomas Hafner. In seinen in das DFG-Projekt PALMA eingebetteten Untersuchungen geht es zum einen um die Erfassung und Analyse der Entwicklung der mit dem Proportionalitäts- und Prozentbegriff zusammenhängenden mathematischen Teilkompetenzen, zum anderen um Rekonstruktion und Analyse spezifischer Schülerstrategien und Fehlermuster. Ziele seiner Untersuchungen sind zum einen die Klärung der Bedingungen der Gesamtentwicklung der untersuchten mathematischen Teilkompetenz und ihrer Differenzierung nach Schulararten und Klassen, zum anderen die Identifizierung charakteristischer individueller Strategien und mentaler Muster. Während die Fragen des ersten Bereichs auf eine Klärung der Rahmenbedingungen schulischen Lernens abzielen, wird mit dem zweiten Bereich eine Verbesserung der Grundlagen für die Analyse individueller Lernprozesse angestrebt.

Die Untersuchungen werden auf drei Ebenen durchgeführt, die den Bereich Proportionalität und Prozentrechnung mit zunehmend höherer Auflösung fokussieren: Zunächst werden die quantitativ ermittelten globalen Ergebnisse zur Kompetenzentwicklung dargestellt, es folgt die Untersuchung von Lösungsstrategien anhand von quantitativen und qualitativen Aufgabenanalysen, als dritte Ebene erfolgt die Rekonstruktion authentischer Schülerstrategien und der zugrunde liegenden mentalen Modelle anhand der qualitativen Analyse von Fallbeispielen.

Die quantitativen Analysen dieser Arbeit basieren auf Subskalen der PALMA-Hauptuntersuchung, in der die mathematische Kompetenzentwicklung in einer für Bayern repräsentativen Stichprobe in Hauptschule, Realschule und Gymnasium über die gesamte Sekundarstufe I hinweg erfasst wird. Sie zeichnen ein differenziertes Bild der Leistungsheterogenität der einzelnen Schulformen und Lerngruppen. Dabei wird deutlich, dass nicht nur die Schulartzugehörigkeit, sondern auch die Klassenzugehörigkeit einen erheblichen Einfluss auf die Leistungswerte haben. Diese Ergebnisse dokumentieren u. a., dass ein dreigliedriges, weitgehend undurchlässiges Schulsystem – wie es der vorliegenden Untersuchung zugrunde liegt – die ihm bisweilen zugeschriebene Aufgabe einer angemessenen individuellen Förderung kaum zu erfüllen vermag.

In den Aufgabenanalysen werden mittels quantitativen und qualitativen Methoden typische Aufgaben aus der Hauptuntersuchung analysiert, um charakteristische Lösungswege und Fehlermuster zu identifizieren und damit Hinweise zur Aufklärung der dokumentierten Defizite zu gewinnen. Es gelingt dem Autor dabei, einen detaillierten Einblick in den Zusammenhang zwischen Aufgabenstruktur, Lösungsstrategien und Fehlermustern zu vermitteln. Auch hier zeigt sich ein differenziertes Bild, das nach Schulformen und Aufgabentypen erhebliche Unterschiede aufweist, wobei Dreisatzmuster als häufigste und solide, Operatorstrategien jedoch als überlegene Lösungsverfahren identifiziert werden. Ein weiteres bemerkenswertes Ergebnis ist es, dass mangelnde Rechenfähigkeiten – entgegen manchen Strömungen aktueller Didaktik, die stark die Rolle prozessorientierter Kompetenzen betonen – für den Erfolg elementarer Aufgaben von erheblicher Bedeutung sind und letztlich eine Voraussetzung für die tragfähige Anwendung prozessorientierter mathematischer Kompetenzen bilden.

Während Lösungs- und Fehlerstrategien im Rahmen der Aufgabenanalysen differenziert dargestellt werden können, wird die Ebene der zugrunde liegenden Grund- bzw. Fehlvorstellung hier nur unzureichend erfasst. Hierzu werden im dritten Ergebnisteil prototypische Fallstudien betrachtet, in denen Lösungsstrategien mittels halbstandardisierter Interviews erhobener Transskripte im Detail rekonstruiert werden. Zusätzlich zur bislang betrachteten Sach- und Strategieebene wird damit die direkte Interaktion in Lösungsprozessen erfassbar. Die Analysen vermitteln einen Einblick in die Komplexität elementarer Modellierungen und bestätigen zahlreiche aus der Literatur bekannte Fehlkonzpte sowie Fehlermuster, die sich bereits in den beiden vorhergehenden Ergebnisteilen der vorliegenden Arbeit andeuteten. So erweisen sich spezifische Zuordnungsfehler als wesentliches Problem, ebenso wie übergeneralisierte Übertragungen aus dem Denken mit natürlichen Zahlen, die über mehrere Jahre zu verfestigten Fehlvorstellungen wurden, wie etwa die intuitive Annahme, dass Multiplikation stets vergrößere.

Insgesamt ergeben die Analysen Thomas Hafners ein präzises und detailliertes Bild der schulischen Behandlung von Prozentsätzen und Proportionen mit zahlreichen interessanten Hinweisen für die Weiterentwicklung dieses wichtigen Gebietes der Schulmathematik in Theorie und Praxis.

Bielefeld im Oktober 2011

Rudolf vom Hofe

Danksagung

Auf dem Weg zu diesem Buch haben mich viele Menschen begleitet, die sich auf unterschiedlichste Weise für mich eingesetzt haben. Ihnen möchte ich für ihre Unterstützung und ihr Engagement an dieser Stelle danken.

Neben der wissenschaftlichen und fachlichen Betreuung der Arbeit durch Anregungen und Ratschläge bedarf es auch des privaten und familiären Rückhalts, sodass ich vor allem

- meinem Doktorvater Prof. Dr. Rudolf vom Hofe,
- allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern der PALMA-Projektgruppe, sowie den teilgenommenen Schülerinnen und Schülern und Lehrerinnen und Lehrern,
- der Arbeitsgruppe Empirische Unterrichtsforschung des Instituts für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld,
- meiner Familie und
- allen anderen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben,

einen ganz herzlichen Dank aussprechen möchte.

Ebenso möchte ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft danken, die das PALMA-Projekt im Gesamten und die Durchführung meiner Interviews im Besonderen finanziell unterstützt hat.

Bielefeld im Juli 2011

Thomas Hafner

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	XV
-----------------------------	----

Tabellenverzeichnis	XVII
---------------------------	------

1 Einleitung	1
---------------------------	----------

2 Forschungszusammenhang.....	5
--------------------------------------	----------

2.1 Die Längsschnittuntersuchung PALMA	5
--	---

2.2 Anlage und Ziele von PALMA.....	6
-------------------------------------	---

2.3 Erhebungsinstrumente und Auswertung.....	8
--	---

2.4 Einordnung der vorliegenden Arbeit	9
--	---

3 Mathematische Grundbildung	11
---	-----------

3.1 Allgemeinbildender Mathematikunterricht	11
---	----

3.2 Mathematical literacy	12
---------------------------------	----

3.3 Bildungsstandards.....	14
----------------------------	----

3.4 Modellierungskompetenz.....	16
---------------------------------	----

4 Mentale Modelle mathematischer Inhalte.....	21
--	-----------

4.1 Grundvorstellungen	21
------------------------------	----

4.1.1 Begriffsbestimmung.....	21
-------------------------------	----

4.1.2 Kernpunkte des Grundvorstellungskonzepts.....	22
---	----

4.1.3 Ausbildung von Grundvorstellungen	23
---	----

4.1.4 Didaktischer Nutzen von Grundvorstellungen	25
--	----

4.2 Concept image und concept definition	26
--	----

4.2.1 Begriffsbestimmung.....	26
-------------------------------	----

4.2.2 Merkmale und Eigenschaften.....	26
---------------------------------------	----

4.2.3 Bezug zu mathematischen Grundvorstellungen	28
--	----

4.3 Conceptual change.....	29
----------------------------	----

4.3.1 Begriffsbestimmung.....	29
-------------------------------	----

4.3.2 Bedeutung für die Mathematikdidaktik.....	30
---	----

4.3.3 Beziehungen zum das Grundvorstellungskonzept.....	31
---	----

5 Proportionalität und Prozentrechnung	33
---	-----------

5.1 Proportionalität	33
----------------------------	----

5.1.1 Grundvorstellungen proportionaler Zuordnungen.....	33
--	----

5.1.2	Lösungsstrategien.....	35
5.2	Prozentrechnung	37
5.2.1	Grundvorstellungen zur Prozentrechnung	37
5.2.2	Lösungsstrategien bei den Grundaufgaben	38
5.2.3	Vermehrter und verminderter Grundwert.....	40
5.3	Lehrplananalyse.....	42
5.4	Untersuchungen zu Proportionalität und Prozentrechnung.....	46
5.4.1	Studien zur Entwicklung mathematischer Kompetenzen.....	46
5.4.2	Inhaltsspezifische Untersuchungen.....	47
5.4.3	Untersuchungen zur Entwicklung formalen Denkens.....	55
5.4.4	Untersuchungen aus dem anglo-amerikanischen Sprachraum	56
5.4.5	Forschungsdesiderata	60
6	Konkretisierung der Ziele und Forschungsfragen	61
6.1	Leistungsmonitoring und -entwicklung	61
6.2	Bearbeitung typischer Aufgabenstellungen	62
6.3	Analyse individueller Denkprozesse und Vorstellungen	63
7	Anlage und Methoden der Untersuchung	65
7.1	Anlage der Untersuchung	65
7.1.1	Stichprobe	65
7.1.2	Subskala Proportionalität und Prozentrechnung	68
7.2	Methoden der Untersuchung.....	70
7.2.1	Das dichotome Rasch-Modell	70
7.2.2	Halbstandardisiertes Interview	73
8	Leistungsmonitoring und -entwicklung.....	75
8.1	Längsschnittliche Kompetenzentwicklung auf Schulformebene	76
8.2	Detailbetrachtung Realschule	80
8.3	Analyse auf Klassenebene	83
8.4	Zusammenfassung	87
9	Bearbeitung typischer Aufgabenstellungen	89
9.1	Aufgabe: Aktion Mensch.....	90
9.1.1	Normative Aufgabenanalyse.....	90
9.1.2	Globale Ergebnisse.....	92
9.1.3	Strategie-Analysen	93
9.1.4	Fehler-Analysen	96
9.2	Aufgabe: Frau Fuchs.....	101

9.2.1	Normative Aufgabenanalyse	101
9.2.2	Globale Ergebnisse	102
9.2.3	Strategie-Analysen	104
9.2.4	Fehler-Analysen	106
9.3	Aufgabe: Erbsen	113
9.3.1	Normative Aufgabenanalyse	113
9.3.2	Globale Ergebnisse	114
9.3.3	Strategie-Analysen	116
9.3.4	Fehler-Analysen	119
9.4	Zusammenfassung	124
10	Analyse individueller Lösungsprozesse und Vorstellungen	131
10.1	Auswahl und Dokumentation der Schülerinterviews	132
10.2	Aufgabe: Fahrradkontrolle	133
10.2.1	Hinweise zur Aufgabe	133
10.2.2	Zuordnungsfehler bei mathematischen Operationen	135
10.2.3	Zuordnungsfehler bei Größen	138
10.2.4	Formelfehler	141
10.3	Aufgabe: Cola	144
10.3.1	Hinweise zur Aufgabe	145
10.3.2	Zuordnungsfehler bei Größen	146
10.3.3	Zuordnungsfehler bei Operationen	148
10.4	Aufgabe: iPod	156
10.4.1	Einordnung der Aufgabe	157
10.4.2	Maxims Lösung	159
10.4.3	Lenas Lösungsversuche	162
10.5	Zusammenfassung	170
11	Resümee und Ausblick	173
	Literaturverzeichnis	185
	Anhang	201

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 2.1: PALMA-Längsschnittdesign	7
Abbildung 3.1: Dimensionen der Bildungsstandards	15
Abbildung 3.2: Mathematischer Modellbildungsprozess	17
Abbildung 3.3: Mathematik und der Rest der Welt.....	18
Abbildung 3.4: Modellierungskreislauf mit Grundvorstellungen (GV).....	19
Abbildung 4.1: Vermittelnder Charakter von Grundvorstellungen	22
Abbildung 5.1: Vermehrter Grundwert (1).....	41
Abbildung 5.2: Vermehrter Grundwert (2).....	41
Abbildung 5.3: Verminderter Grundwert (1).....	41
Abbildung 5.4: Verminderter Grundwert (2).....	42
Abbildung 7.1: Anforderungsniveaus am Beispiel der Prozentrechnung.....	69
Abbildung 7.2: Item characteristic curves für zwei Items unterschiedlicher Schwierigkeit.....	71
Abbildung 7.3: Normalverteilung.....	72
Abbildung 7.4: Graphischer Modellgeltungstest der Subskala P&P	73
Abbildung 8.1: Längsschnittliche Leistungsentwicklung.....	77
Abbildung 8.2: Effektgrößen als Maß für Leistungszuwächse.....	78
Abbildung 8.3: Leistungsverteilung im Schulformvergleich.....	79
Abbildung 8.4: Kompetenzentwicklung der Realschulstichproben.....	82
Abbildung 8.5: Standardabweichungen der Realschulstichprobe.....	83
Abbildung 8.6: Klassenmittelwerte mit Standardabweichung.....	86
Abbildung 9.1: <i>Aktion Mensch</i> - Lösungshäufigkeiten auf Schulklassenebene.....	93
Abbildung 9.2: <i>Aktion Mensch</i> - Absolute Häufigkeiten der Fehlerkategorien.....	96
Abbildung 9.3: <i>Aktion Mensch</i> - Verteilung der Rechenfehler auf Rechenarten	97
Abbildung 9.4: <i>Aktion Mensch</i> - Zuordnungsfehler bei mathematischen Operationen	99
Abbildung 9.5: <i>Aktion Mensch</i> - Divisionsstrategien	99
Abbildung 9.6: <i>Aktion Mensch</i> - Subtraktionsstrategien	100
Abbildung 9.7: <i>Aktion Mensch</i> - Defizite im Umgang mit der fiktiven Maßeinheit %	100
Abbildung 9.8: <i>Frau Fuchs</i> - Lösungshäufigkeiten auf Schulklassenebene.....	103
Abbildung 9.9: <i>Frau Fuchs</i> - Absolute Häufigkeiten der Fehlerkategorien	106

Abbildung 9.10: <i>Frau Fuchs</i> - Verteilung der Rechenfehler auf Rechenarten.....	107
Abbildung 9.11: <i>Frau Fuchs</i> - Zuordnungsfehler beim Prozentwert	108
Abbildung 9.12: <i>Frau Fuchs</i> - Zuordnungsfehler bei Größen.....	109
Abbildung 9.13: <i>Frau Fuchs</i> - Zuordnungsfehler beim Grundwert	109
Abbildung 9.14: <i>Frau Fuchs</i> - Zuordnungsfehler in Verbindung mit Operatorstrategien	110
Abbildung 9.15: <i>Frau Fuchs</i> - Anpassung von Ergebnissen	110
Abbildung 9.16: <i>Frau Fuchs</i> - Zuordnungsfehler bzgl. Operationen	111
Abbildung 9.17: <i>Frau Fuchs</i> - Multiplikation und subjektive Anpassung des Ergebnisses.....	111
Abbildung 9.18: <i>Frau Fuchs</i> - Division mit Antwortsatz.....	112
Abbildung 9.19: <i>Frau Fuchs</i> - Addition mit Antwortsatz	112
Abbildung 9.20: <i>Erbsen</i> - Lösungshäufigkeiten auf Schulklassenebene	115
Abbildung 9.21: <i>Erbsen</i> - Lösungsstrategien mit Operator- und Dreisatz-Merkmalen	117
Abbildung 9.22: <i>Erbsen</i> - Absolute Häufigkeiten der Fehlerkategorien	119
Abbildung 9.23: <i>Erbsen</i> - Verteilung der Rechenfehler auf Rechenarten	120
Abbildung 9.24: <i>Erbsen</i> - Fehler beim Erweitern des Bruches	120
Abbildung 9.25: <i>Erbsen</i> - Zuordnungsfehler	121
Abbildung 9.26: <i>Erbsen</i> - Summe aus 500 g und 100 g als Bezugswert	121
Abbildung 9.27: <i>Erbsen</i> - Zuordnungsfehler bei Operationen.....	121
Abbildung 9.28: <i>Erbsen</i> - Fehlstrategie <i>große Zahl : kleine Zahl</i>	122
Abbildung 9.29: <i>Erbsen</i> - Subtraktion und Anpassung des Ergebnisses	122
Abbildung 9.30: <i>Erbsen</i> - Multiplikation und Anpassungsstrategien	123
Abbildung 9.31: <i>Erbsen</i> - Falsche Prozentformeln zur Berechnung des Prozentsatzes	123
Abbildung 10.1: Florians Berechnung des Quotienten $100 : 40$	135
Abbildung 10.2: Lucias Gleichung zur Aufgabe Fahrradkontrolle	141
Abbildung 10.3: Lucias Lösungsweg im erweiterten Episodenplan.....	143
Abbildung 10.4: Rainers Berechnung des Teils einer Größe.....	151
Abbildung 10.5: Rainers erweiterter Episodenplan	155
Abbildung 10.6: Maxims Lösung zur Aufgabe iPod	160
Abbildung 10.7: Lenas Ausgangsgleichung	162
Abbildung 10.8: Lenas Subtraktion von 19 %.....	165
Abbildung 10.9: Lenas Rechnung zum Teilschritt der Rabattierung.....	167
Abbildung 10.10: Lenas erweiterter Episodenplan.....	169
Abbildung 11.1: Kompetenzentwicklung der Längsschnittstichprobe	174

Tabellenverzeichnis

Tabelle 5.1: Proportionalität und Prozentrechnung im Lehrplan.....	45
Tabelle 7.1: Gesamtstichprobe	67
Tabelle 7.2: Längsschnittstichprobe	67
Tabelle 7.3: Anzahl der Testitems zur Prozentrechnung	69
Tabelle 7.4: Likelihood-Ratio-Test.....	72
Tabelle 8.1: Normierte Leistungswerte der Längsschnittstichprobe.....	76
Tabelle 8.2: Realschulstichprobe.....	81
Tabelle 9.1: Einordnung der Aufgaben.....	89
Tabelle 9.2: <i>Aktion Mensch</i> - Globale Ergebnisse	92
Tabelle 9.3: <i>Aktion Mensch</i> - Lösungsstrategien	94
Tabelle 9.4: <i>Aktion Mensch</i> - Erfolgsquote der Lösungsstrategien.....	95
Tabelle 9.5: <i>Aktion Mensch</i> - Zusammenhang zwischen Rechenfehler und Schulform	97
Tabelle 9.6: <i>Aktion Mensch</i> - Zuordnungsfehler bei Größen.....	98
Tabelle 9.7: <i>Frau Fuchs</i> - Globale Ergebnisse	103
Tabelle 9.8: <i>Frau Fuchs</i> - Lösungsstrategien	104
Tabelle 9.9: <i>Frau Fuchs</i> - Erfolgsquote der Lösungsstrategien.....	105
Tabelle 9.10: <i>Frau Fuchs</i> - Zusammenhang Rechenfehler und Schulform	107
Tabelle 9.11: <i>Erbsen</i> - Globale Ergebnisse	115
Tabelle 9.12: <i>Erbsen</i> - Lösungsstrategien.....	116
Tabelle 9.13: <i>Erbsen</i> - Erfolgsquote der Lösungsstrategien	118
Tabelle 9.14: Zusammenfassung - Aufgaben	124
Tabelle 9.15: Zusammenfassung - Lösungsstrategien	126
Tabelle 9.16: Zusammenfassung - Rechenfehler	127
Tabelle 9.17: Zusammenfassung - Zuordnungsfehler.....	128
Tabelle 10.1: Aufgaben aus der Interview-Studie	131
Tabelle 11.1: Aufgaben zur Prozentrechnung im Vergleich.....	176
Tabelle 11.2: Lösungsstrategien im Vergleich	177
Tabelle 11.3: Zuordnungsfehler bei mathematischen Operationen und Größen.....	179