L^p -Theory of Cylindrical Boundary Value Problems

Tobias Nau

L^p -Theory of Cylindrical Boundary Value Problems

An Operator-Valued Fourier Multiplier
and Functional Calculus Approach

Springer Spektrum

RESEARCH

Tobias Nau
Konstanz, Germany

Dissertation der Universität Konstanz
Tag der mündlichen Prüfung: 07.02.2012
1. Referent: Prof. Dr. Robert Denk
2. Referent: Prof. Dr. Jürgen Saal

ISBN 978-3-8348-2504-9
DOI 10.1007/978-3-8348-2505-6

ISBN 978-3-8348-2505-6 (eBook)

The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie;
detailed bibliographic data are available in the Internet at <http://dnb.d-nb.de>.

Springer Spektrum

© Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden 2012

This work is subject to copyright. All rights are reserved by the Publisher, whether the whole or part of the material is concerned, specifically the rights of translation, reprinting, reuse of illustrations, recitation, broadcasting, reproduction on microfilms or in any other physical way, and transmission or information storage and retrieval, electronic adaptation, computer software, or by similar or dissimilar methodology now known or hereafter developed. Exempted from this legal reservation are brief excerpts in connection with reviews or scholarly analysis or material supplied specifically for the purpose of being entered and executed on a computer system, for exclusive use by the purchaser of the work. Duplication of this publication or parts thereof is permitted only under the provisions of the Copyright Law of the Publisher's location, in its current version, and permission for use must always be obtained from Springer. Permissions for use may be obtained through RightsLink at the Copyright Clearance Center. Violations are liable to prosecution under the respective Copyright Law. The use of general descriptive names, registered names, trademarks, service marks, etc. in this publication does not imply, even in the absence of a specific statement, that such names are exempt from the relevant protective laws and regulations and therefore free for general use. While the advice and information in this book are believed to be true and accurate at the date of publication, neither the authors nor the editors nor the publisher can accept any legal responsibility for any errors or omissions that may be made. The publisher makes no warranty, express or implied, with respect to the material contained herein.

Cover design: KunkelLopka GmbH, Heidelberg

Printed on acid-free paper

Springer Spektrum is a brand of Springer DE. Springer DE is part of Springer Science+Business Media.
www.springer-spektrum.de

*To Rebecca
and my parents
Gerhard & Verena Nau*

Acknowledgments

This is to express my gratitude to several people who helped me during the time I worked on this thesis.

First of all, I am very grateful to my supervisor Prof. Dr. Robert Denk for his support when challenging questions had to be faced. I have highly appreciated the pleasant working atmosphere over the last three years and the possibility to take part in teaching and research activities both at the University of Konstanz and at other universities. Moreover, I would like to thank him very much for the way he encouraged me as a young researcher.

I express my gratitude to Prof. Dr. Jürgen Saal who always gave generously of his time when he was still part of the PDE research group in Konstanz. Furthermore, I am very grateful for his invitations to Darmstadt later on and for his great hospitality. Writing this thesis, I benefited a lot from what I have learned there.

I am also very grateful to Prof. Dr. Wolfgang Arendt for helpful suggestions as well as for interesting discussions during my stays at the University of Ulm.

Many thanks to the PDE research group in Konstanz. Special thanks to Mario Kaip, Johannes Schnur, and Tim Seger for their cooperativeness and the good times we had.

Thanks to Springer Spektrum, in particular to Mrs. Ute Wrasmann and Mrs. Anita Wilke for their kind support. Also many thanks to Thomas Melzer and Siegfried Maier for their helpful comments on the manuscript.

I thank my parents Gerhard and Verena Nau, who have continuously helped to make possible what I have enjoyed in my life so far. Special thanks also to my sister Dr. Stephanie Nau for good advice and assistance.

Above all, I thank my wife Rebecca for enduring with a smile the times when I was preoccupied with mathematics and for all the support she has been giving me throughout the years.

Tobias Nau

Zusammenfassung

Die vorliegende Doktorarbeit behandelt Anfangs-Randwert-Probleme der Form

$$(\text{ARP}) \quad \begin{cases} \partial_t u + \mathcal{A}(x, D)u &= f & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ \mathcal{B}(x, D)u &= 0 & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega, \\ u|_{t=0} &= u_0 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

in L^p -Räumen, wobei Ω ein zylinderförmiges Gebiet ist. Das heißt $\Omega = U \times V$ ist als das kartesische Produkt zweier Mengen gegeben. Dabei sind V und U Standardgebiete, was bedeutet, dass sich in diesen Gebieten Randwertprobleme mit bekannten Methoden der L^p -Theorie behandeln lassen (siehe z.B. [DHP03]). Ferner bezeichnet $\mathcal{A}(x, D)$ einen Differentialoperator in Ω , und $\mathcal{B}(x, D)$ repräsentiert je nach Problemstellung verschiedene Operatoren auf dem Rand $\partial\Omega$.

Ziel der Arbeit ist es, für den Operator $A_{\mathcal{B}}$ im zugeordneten Cauchy-Problem

$$(\text{CP}) \quad \begin{cases} \dot{u}(t) + A_{\mathcal{B}}u(t) &= f(t), & t \in \mathbb{R}_+, \\ u(0) &= u_0 \end{cases}$$

maximale (L^q -)Regularität in L^p -Räumen (siehe Definition 5.1) nachzuweisen. Dazu wird ein Resultat aus [Wei01b] verwendet, das maximale Regularität unter passenden Voraussetzungen durch $\mathcal{R}$ -Sektorialität des entsprechenden Operators charakterisiert. Neben Aussagen zum Cauchy-Problem (CP) ermöglicht die $\mathcal{R}$ -Sektorialität dank eines Resultats von Prüss zudem Aussagen zur maximalen Regularität des Operators $A_{\mathcal{B}}$ im Rahmen von Volterra-Integralgleichungen (siehe [Prü93]). Damit rückt die Behandlung des zu (CP) gehörenden Resolventenproblems in Form eines parameterabhängigen Randwertproblems in den Vordergrund.

Als zentrale Voraussetzung wird in dieser Arbeit die Anforderung gestellt, dass nicht nur Ω sondern das gesamte Anfangs-Randwert-Problem (ARP) zylinderförmig ist. Diese Anforderung beinhaltet zum einen, dass der Differentialoperator $\mathcal{A}$ in zwei Teile

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$$

zerfällt, wobei $\mathcal{A}_1$ sowohl in den Koeffizienten als auch in den Differentialausdrücken nur von U , und $\mathcal{A}_2$ entsprechend nur von V abhängig ist. Andererseits soll sich auch der Randoperator $\mathcal{B}$ der Zylinderförmigkeit von Ω anpassen, indem er die Gestalt

$$\mathcal{B} = \begin{cases} \mathcal{B}_1, & \text{auf } \partial U \times V, \\ \mathcal{B}_2, & \text{auf } U \times \partial V \end{cases}$$

aufweist. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass diese Rahmenbedingungen auf zahlreiche Problemstellungen in der Anwendung zutreffen. So hat zum Beispiel die Wärmeleitungsgleichung mit Dirichlet- oder Neumann-Randbedingungen zylinderförmige Gestalt. Die geforderte Struktur erlaubt den Einsatz operatorwertiger Fouriermultiplikatoren und des operatorwertigen Dunford-Kalküls sektorieller Operatoren. Mithilfe dieser Methoden kann die $\mathcal{R}$ -Sektorialität oder ein beschränkter $\mathcal{H}^\infty$ -Kalkül von $A_{\mathcal{B}}$ auf die entsprechende Eigenschaft des induzierten Operators $A_{2\mathcal{B}_2}$ zurückgeführt werden. Dieser Zugang eröffnet einen eleganten Weg maximale Regularität des Operators $A_{\mathcal{B}}$ nachzuweisen.

Operatorwertige Fouriermultiplikatoren werden sowohl im Kontext vektorwertiger Fouriertransformation als auch im Kontext vektorwertiger Fourierreihen eingesetzt. Dies erfolgt zunächst auf abstrakter Ebene in den Kapiteln 6 und 7: Mit einem abgeschlossenen, linearen Operator A in einem Banachraum E werden Gleichungen der Form

$$\lambda u + P(D)u + Q(D)Au = f$$

in $L^p(U, E)$ behandelt. Dabei stellt U entweder den Ganzraum $\mathbb{R}^n$ oder den Würfel $(0, 2\pi)^n$ dar, wobei im letzteren Fall zudem verallgemeinerte periodische Randbedingungen gestellt werden. Außerdem bezeichnen $P(D)$ und $Q(D)$ Differentialoperatoren, die von unterschiedlicher Ordnung sein können, und λ ist ein komplexer Parameter.

Der Zusammenhang zu Resolventenproblemen zylinderförmiger Randwertprobleme wird nun hergestellt, indem der Operator A speziell als $A_{2\mathcal{B}_2}$ im Banachraum $L^p(V)$ gewählt wird. Unter geeigneten Voraussetzungen an die Koeffizienten ist $A_{2\mathcal{B}_2}$ ein $\mathcal{R}$ -sektorieller Operator mit beschränktem $\mathcal{H}^\infty$ -Kalkül. Diese Eigenschaft lässt sich über die gewonnenen Resultate auf den gesamten Operator $A_{\mathcal{B}}$ übertragen, sofern der Operator $\mathcal{A}_1(D)$ konstante Koeffizienten hat und eine passende Parameterelliptizität aufweist. Somit wird ein zylinderförmiges Modellproblem behandelt, in das $A_{2\mathcal{B}_2}$ in unveränderter Gestalt eingeht. Obwohl sich die Ausgangslage dadurch deutlich von herkömmlichen Modellproblemen im Ganzraum unterscheidet, können in ganz ähnlicher Weise nicht-konstante Koeffizienten von $\mathcal{A}_1$ durch Lokalisierung behandelt werden. Das Hauptresultat hierzu ist Theorem 8.10 in Kapitel 8.

Ist Ω als das kartesische Produkt mehrerer Standardgebiete gegeben, so wird anstelle der operatorwertigen Fouriermultiplikatoren der operatorwertige Dunford-Kalkül und ein Resultat von Kalton und Weis eingesetzt (siehe [KW01]). Dieser Zugang wird in Kapitel 10 verfolgt. Theorem 10.5 zeigt, dass sich so unter passenden Voraussetzungen die gleichen Resultate erzielen lassen, wie sie in [DHP03] und [DDH⁺04] für Randwertprobleme in Standardgebieten bewiesen werden. Insbesondere lassen sich mit dieser Methode vektorwertige Randwertprobleme mit operatorwertigen Koeffizienten behandeln.

Andererseits können auch neue Aussagen und vereinfachte Beweise zu klassischen Problemstellungen wie etwa der Wärmeleitungsgleichung in zylinderförmigen

Gebieten gewonnen werden. Der verfolgte Lösungsansatz erlaubt es, gemischte Dirichlet-Neumann Randbedingungen auf unterschiedlichen Komponenten des Randes vorzugeben. Die entsprechenden Aussagen zum zugehörigen Resolventenproblem des Laplace-Operators werden in Theorem 8.22, Theorem 10.9 und Theorem 10.13 bewiesen.

Ein Anwendungsbereich dieser Ergebnisse ist die Kühlung rechtwinkliger oder zylinderförmiger elektronischer Bauteile über Kühlsysteme, die auf zwei gegenüberliegenden Seiten oder auch nur auf einer Seite des Bauteils angebracht sind. Des Weiteren sind Anwendungen im Bereich der Zellbiologie gegeben. Hier werden Diffusionsprozesse in sogenannten Beobachtungsfenstern modelliert. Dabei handelt es sich um kleine, würfelförmige Bereiche innerhalb einer Zelle, wobei davon ausgegangen wird, dass sich die Struktur der Zelle über angrenzende Zellbereiche hinweg periodisch fortsetzt. Dem wird durch periodische Randbedingungen Rechnung getragen. Da im Rahmen dieser Arbeit auch Mischungen aus periodischen und Dirichlet-Neumann Randbedingungen behandelt werden, lassen sich darüber hinaus auch membranöse Begrenzungen des Beobachtungsfensters modellieren.

Als weitere Anwendung wird in Kapitel 9 das Resolventenproblem zur Stokes-Gleichung in Schichten und in einer Klasse rechtwinkliger, zylinderförmiger Gebiete behandelt. Die Stokes-Gleichung geht durch Linearisierung aus der Navier-Stokes-Gleichung der Strömungsdynamik hervor, weshalb zylinderförmige Gebiete von besonderem Interesse sind. Zunächst werden periodische Randbedingungen behandelt. Insbesondere wird eine periodische Helmholtz-Zerlegung des zugehörigen L^p -Raums über Fouriermultiplikatoren hergeleitet. Durch den Einsatz von Reflektionstechniken wird schließlich die Existenz der klassischen Helmholtz-Zerlegung des zugehörigen L^p -Raums auf dieses periodische Analogon zurückgeführt. Die Hauptresultate dieses Kapitels sind in Theorem 9.15 und Theorem 9.17 zu finden.

Contents

1	Introduction and main results	1
2	Vector-valued Fourier transform and Fourier series	9
3	$\mathcal{R}$-boundedness and operator-valued Fourier multiplier theorems	25
4	Classes of operators and Dunford functional calculus	41
5	Parabolic problems and maximal regularity	51
6	Fourier transform approach to operator-dependent problems	55
6.1	Preliminaries	55
6.2	$\mathcal{R}$ -sectoriality and $\mathcal{RH}^\infty$ -calculus	61
7	Fourier series approach to operator-dependent problems	75
7.1	Preliminaries	75
7.2	ν -periodic problems in cubical domains	84
7.3	$\mathcal{R}$ -sectoriality and $\mathcal{RH}^\infty$ -calculus	89
8	Application to cylindrical boundary value problems	99
8.1	Known results for bounded and exterior domains	99
8.2	Cylindrical boundary value problems	103
8.3	A focus on the Laplacian	126
9	Application to the Stokes equation	133
10	The functional calculus approach	153
10.1	Operator-valued Dunford calculus	153
10.2	Applications to cylindrical boundary value problems	154
10.3	A focus on the Laplacian	164
A	Notation and vector-valued function spaces	171
B	Related topics in the literature	175
	Bibliography	179
	Index	187

List of Figures

3.1 Steps in the coarse decomposition of $\mathbb{Z}^2$ 34

3.2 Steps in the fine decomposition of $\mathbb{Z}^2$ 35

3.3 The intermediate conditions. 39

4.1 Relevant sets in the complex plane. 41

4.2 Relation of angles in a Banach space of class $\mathcal{HT}$ 47

6.1 Possible shift in case $0 \in \rho(A)$ 64

6.2 Different paths of integration. 69

6.3 The path of integration in the extended Cauchy integral formula. . . 70

7.1 The path of integration, discrete case. 95

8.1 The single steps during the reflection procedure. 122

8.2 Reflections depending on intersections with the boundary. 123

8.3 Lipschitz domains with different ranges of p 129

8.4 Different observation windows in a biological cell. 131

9.1 The domains $\tilde{\Omega}$ and Ω 142