

---

# Kontinuumsschwingungen

---

Jörg Wauer

# Kontinuumsschwingungen

Vom einfachen Strukturmodell zum  
komplexen Mehrfeldsystem

2., überarbeitete und erweiterte Auflage

Mit 82 Abbildungen, 42 Beispielen und 74 Aufgaben

 Springer Vieweg

Jörg Wauer  
KIT Karlsruher Institut für Technologie  
Karlsruhe, Deutschland

ISBN 978-3-8348-1819-5  
DOI 10.1007/978-3-8348-2242-0

ISBN 978-3-8348-2242-0 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg

© Springer Fachmedien Wiesbaden 2008, 2014

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürfen.

*Lektorat:* Thomas Zipsner, Ellen Klabunde

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Vieweg ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media

[www.springer-vieweg.de](http://www.springer-vieweg.de)

*Meiner Familie gewidmet.*

---

# Vorwort

Die *klassische* Modellbildung schwingender Bauteile reduziert diese auf Systeme mit *konzentrierten* Parametern, d. h. Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden, die durch reine Anfangswertprobleme in Form gewöhnlicher Differentialgleichungen mit Anfangsbedingungen beschrieben werden.

In vielen Fällen ist es notwendig oder zweckmäßig, eine *feinere* Modellierung in Form von Systemen mit *verteilten* Parametern einzuführen, die durch partielle Differentialgleichungen mit Rand- und Anfangsbedingungen charakterisiert ist. Um den Lösungsaufwand zu begrenzen, werden nur in Ausnahmefällen die schwingenden Körper als dreidimensionale Kontinua mit einer der Realität nahe kommenden komplexen Geometrie, Auflagerung und Belastung aufgefasst. Meistens wird man versuchen, diese auf einfachere Strukturmodelle abzubilden. Solche Modellkörper stellen zwar immer noch Systeme mit verteilten Parametern dar, durch verschiedene Vereinfachungen bezüglich Abmessungen, Befestigung und Belastung sowie gewissen Einschränkungen bei den Verformungen ist das beschreibende Anfangs-Randwert-Problem dann jedoch verkürzten, teilweise analytischen Rechenverfahren zugänglich. Auf diese Weise gelingt der Einstieg in die Analyse schwingender Kontinua sehr viel einfacher, zumal die erlernten Methoden letztlich auch die Basis zum Studium des Schwingungsverhaltens weitgehend beliebiger technischer Bauteile bilden.

Eine derartige, meist lineare Strukturdynamik ist deshalb für viele Schwingungsberechnungen der Praxis eine wichtige Voraussetzung geworden, die heute gelehrt und gelernt werden sollte. Werden die jüngsten Entwicklungen auf diesem Sektor mit einbezogen, ist der Weg anschließend frei für eine immer genauere, rechnerorientierte Behandlung konkreter praktischer Aufgabenstellungen.

Der vorliegende Text fußt auf Vorlesungen, die der Autor seit langem vor Studierenden insbesondere des Maschinenbaus an der Universität Karlsruhe im Diplom-Hauptstudium hält. Der zu treibende mathematische Aufwand ist beträchtlich, im Vordergrund stehen jedoch die Physik des Problems und die mit mathematischen Methoden gewonnenen Ergebnisse zur Erklärung schwingungsmechanischer Phänomene. Zum Verständnis genügen die üblichen Kenntnisse in Höherer Mathematik und Technischer Mechanik, wie sie im Vordiplom oder Bachelor-Studium einer wissenschaftlichen Hochschule vermittelt werden. An einigen Stellen sind vertiefte Kenntnisse in Mathematischen Methoden der Schwin-

gungslehre und in Höherer Mechanik hilfreich, die heutzutage bereits in Pflichtfächern des Diplom-Hauptstudiums oder Master-Studiums angeboten werden.

Das Buch wendet sich vor allem an theoretisch arbeitende Ingenieure, aber auch an Physiker, Techno-Mathematiker und andere Naturwissenschaftler. Es zielt auf Studium und Beruf gleichermaßen und soll all jene weiterführen, die die klassische Schwingungstheorie für technische Systeme mit konzentrierten Parametern bereits kennen, mit dem Gebiet der Kontinuumsschwingungen aber noch nicht so vertraut sind. Ein besonderes Anliegen ist es, Querverbindungen zur Maschinendynamik anzusprechen und auf diese Weise zu verdeutlichen, dass das Verständnis der theoretischen Grundlagen schwingender Kontinua für technische Anwendungen immer wichtiger wird.

Das Buch ist in neun Teile gegliedert. Nach einer kurzen Einführung wird in Kap. 2 die Formulierung der maßgebenden Bewegungsgleichungen dreidimensionaler Kontinua in linearer Form angegeben. Kap. 3 behandelt die systematische Kondensation auf lineare Strukturmodelle einschließlich der beschreibenden Randwertprobleme und weist Wege, wie man auf der Basis gewisser Voraussetzungen auch auf direktem Wege die mathematischen Grundgleichungen linearer Strukturmodelle generieren kann. Kapitel 4 führt in die mathematische Lösungstheorie zur Berechnung freier und erzwungener Schwingungen von Systemen mit verteilten Parametern ein. In den Kap. 5 und 6 wird die bereitgestellte Theorie nacheinander auf die Sonderfälle ein- und zweiparametrischer Strukturmodelle angewendet, bevor Kap. 7 schließlich auch einige konkrete dreidimensionale Probleme diskutiert. Grundbegriffe einer geometrisch nichtlinearen Schwingungstheorie für Kontinua vermittelt Kap. 8. Schließlich geht Kap. 9 über die rein festkörpermechanischen Aspekte hinaus und gibt eine Einführung in die Dynamik verteilter Mehrfeldsysteme. Einige Ergänzungen runden die jeweiligen Kapitel ab.

Das Buch enthält eine Reihe ausführlich durchgerechneter Anwendungsbeispiele. Sie illustrieren die theoretischen Zusammenhänge und erleichtern dem Leser die Handhabung der teilweise abstrakten Rechenmethoden. Auch die Diskussion auftretender Phänomene und das Ziehen praktischer Schlussfolgerungen für technische Fragestellungen werden dadurch aktiv unterstützt.

Darüber hinaus findet der interessierte Leser weitere Aufgaben mit teilweise ausführlichen Lösungshinweisen, sodass für das Üben des Stoffes im Rahmen eines vertieften Selbststudiums noch entsprechend breiter Raum gegeben ist.

Das geschlossene Konzept des Buches mit den gesamten theoretischen Grundlagen in den Anfangskapiteln und den physikalischen Anwendungen danach lässt sich vom Leser, der ein Erlernen dieses wichtigen Überbaus an Hand von konkreten Beispielen im Rahmen technischer Fragestellungen bevorzugt, dadurch an seine Bedürfnisse anpassen, dass er sich beim Einarbeiten bezüglich der Kap. 2 bis 4 auf Abschn. 3.2, 4.1.1, 4.1.3 bis 4.1.5 sowie 4.2 konzentriert und die restlichen Abschnitte bei Bedarf später nachholt.

Allen wissenschaftlichen Mitarbeitern des Instituts, die bei der ständigen Überarbeitung der Vorlesungen ihren Teil auch zum Gelingen dieses Buches beigetragen haben, sei herzlich gedankt. Ganz besonderer Dank gilt meinem Kollegen Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Michael Riemer, den Herren Prof. Dr.-Ing Wolfgang Seemann und Prof. Dr.-Ing. Bernhard

Schweizer sowie Herrn Dr.-Ing. Hartmut Hetzler, denen ich eine Reihe wertvoller Hinweise zur Verbesserung des Buches verdanke. Schließlich danke ich dem Studierenden Herrn cand. mach. Marc Hiller für die Erstellung fast aller Abbildungen und dem Teubner-Verlag für die erfreuliche Zusammenarbeit und die gute Ausstattung des Buches bei angemessenem Preis.

Karlsruhe, im März 2008

Jörg Wauer

---

## **Vorwort zur Neuauflage**

Die gute Nachfrage ermöglicht eine neue Auflage. Alle bisher bekannt gewordenen Fehler und Unschärfen sind beseitigt worden. Auf Wunsch des Verlages ist das aktualisierte Literaturverzeichnis auf die einzelnen Kapitel verteilt worden, die darüber hinaus mit einem einleitenden Abstract versehen worden sind. Inhaltlich sind die Abschn. 3.2.3 „Dämpfungseinflüsse“ und 4.2.2 „Strenge Lösung zeitfreier Zwangsschwingungsprobleme“ mit dem Abschn. 5.1.5 „Erzwungene Schwingungen“ ergänzt worden. Ansonsten ist der bewährte Text praktisch unverändert geblieben.

Karlsruhe, im April 2014

Jörg Wauer

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b> .....	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Lineare Modellgleichungen dreidimensionaler Festkörper</b> .....	<b>3</b>
2.1	Kinematische Grundlagen .....	4
2.1.1	Koordinaten und Bewegung .....	4
2.1.2	Deformationsgradient und Verzerrungstensor .....	7
2.1.3	Geschwindigkeit und Beschleunigung .....	11
2.2	Synthetische Kontinuumsmechanik .....	14
2.2.1	Spannungen .....	14
2.2.2	Bilanzgleichungen .....	16
2.3	Analytische Kontinuumsmechanik .....	19
2.3.1	Lagrange-d'Alembert-Prinzip .....	19
2.3.2	Prinzip von Hamilton .....	23
2.3.3	Einarbeitung der Drehimpulsbilanz .....	25
2.4	Konstitutive Gleichungen .....	27
2.5	Vollständig lineare Theorie – Anfangs-Randwert-Problem in Verschiebungen .....	31
<b>3</b>	<b>Lineare Strukturmodelle</b> .....	<b>35</b>
3.1	Kondensation aus Kontinuumstheorie .....	36
3.2	Direkte Formulierung .....	46
3.2.1	Einparametrische Strukturmodelle .....	46
3.2.2	Zweiparametrische Strukturmodelle .....	50
3.2.3	Dämpfungseinflüsse .....	54
3.2.4	Modifikationen einparametrischer Strukturmodelle .....	55
3.3	Übungsaufgaben .....	59
<b>4</b>	<b>Lösungstheorie</b> .....	<b>65</b>
4.1	Lösungstheorie für freie Schwingungen .....	68
4.1.1	Bernoullischer Produktansatz .....	68
4.1.2	Grundbegriffe der Funktionalanalysis .....	70



4.1.3	Eigenwertproblem	73
4.1.4	Strenge Lösung von Eigenwertproblemen	87
4.1.5	Näherungsverfahren zur Lösung von Eigenwertproblemen	92
4.2	Lösungsmethoden für erzwungene Schwingungen	111
4.2.1	Zeitfreies Zwangsschwingungsproblem	111
4.2.2	Strenge Lösung zeitfreier Zwangsschwingungsprobleme	115
4.2.3	Lösung zeitfreier Zwangsschwingungsprobleme mittels Modalanalysis	120
4.2.4	Lösung von Zwangsschwingungsproblemen mit gemischtem Ritz-Ansatz	122
4.3	Übungsaufgaben	124
<b>5</b>	<b>Schwingungen von Linientragwerken</b>	<b>131</b>
5.1	Telegrafengleichung	132
5.1.1	Längs- und Torsionsschwingungen gerader Stäbe	132
5.1.2	Querschwingungen einer Saite	134
5.1.3	Allgemeine Form	136
5.1.4	Freie Schwingungen	137
5.1.5	Erzwungene Schwingungen	147
5.1.6	Wellenausbreitung	152
5.2	Biegeschwingungen gerader Stäbe	159
5.2.1	Elementare Theorie ohne Schubverformung und Drehträchtigkeit	159
5.2.2	Freie Schwingungen	162
5.2.3	Erzwungene Schwingungen	172
5.2.4	Gekoppelte Biege-Torsions-Schwingungen	180
5.2.5	Timoshenko-Theorie	184
5.2.6	Ausbreitung von Biegewellen	191
5.3	Nichtseparierbare Erregung	195
5.4	Bogenträger und Kreisring	197
5.5	Rotierende Wellen	205
5.5.1	Bewegungsgleichungen	206
5.5.2	Auswertung und Phänomene	209
5.6	Übungsaufgaben	217
<b>6</b>	<b>Schwingungen von Flächentragwerken</b>	<b>229</b>
6.1	Membran	230
6.1.1	Transversalschwingungen	230
6.1.2	Freie Schwingungen	233
6.1.3	Zwangsschwingungen	242
6.1.4	Ebene Wellenausbreitung	243
6.2	Scheibe und Platte	244
6.2.1	Scheibenschwingungen	247

---

6.2.2	Plattenschwingungen	253
6.3	Schalenschwingungen	258
6.4	Übungsaufgaben	262
<b>7</b>	<b>Schwingungen dreidimensionaler Kontinua</b>	<b>267</b>
7.1	Unterschiedliche Koordinatensysteme	270
7.2	Ausgewählte Beispiele	274
7.3	Übungsaufgaben	277
<b>8</b>	<b>Geometrisch nichtlineare Schwingungstheorie</b>	<b>279</b>
8.1	Einfluss axialer Randkräfte auf Stabbiegeschwingungen	280
8.1.1	Konstante Zug- und Druckkräfte	282
8.1.2	Oszillierende Kräfte	285
8.2	Fliehkrafteinfluss auf Seil- und Stabschwingungen	288
8.3	Bewegte Saiten und Balken, durchströmte Rohre	297
8.4	Schwingende Elastica	305
8.5	Rotierende Scheiben	312
8.6	Übungsaufgaben	319
<b>9</b>	<b>Dynamik verteilter Mehrfeldsysteme</b>	<b>329</b>
9.1	Mehrfeldsysteme mit Oberflächenkopplung	330
9.1.1	Mechanische Systeme	330
9.1.2	Fluidschwingungen	333
9.1.3	Fluid-Struktur-Wechselwirkung	341
9.1.4	Fluid-Struktur-Wechselwirkung in rotierenden Systemen	352
9.2	Mehrfeldsysteme mit Volumenkopplung	360
9.2.1	Thermoelastische Koppelschwingungen	360
9.2.2	Dynamik piezoelektrischer Wandler	369
9.2.3	Magnetoelastische Schwingungen	379
9.2.4	Physikalische Nichtlinearitäten piezokeramischer Systeme	381
9.3	Übungsaufgaben	385
	<b>Sachverzeichnis</b>	<b>391</b>