Mathematik verstehen und anwenden – von den Grundlagen bis zu Fourier-Reihen und Laplace-Transformation

Steffen Goebbels Stefan Ritter

Mathematik verstehen und anwenden – von den Grundlagen bis zu Fourier-Reihen und Laplace-Transformation

Autoren

Prof. Dr. Steffen Goebbels
Fachbereich Elektrotechnik und Informatik
Hochschule Niederrhein
Reinarzstr. 49, 47805 Krefeld
E-Mail: Steffen.Goebbels@hs-niederrhein.de

Prof. Dr. Stefan Ritter
Fakultät für Elektro- und Informationstechnik
Hochschule Karlsruhe
Moltkestr. 30, 76133 Karlsruhe
E-Mail: Stefan.Ritter@hs-karlsruhe.de

Wichtiger Hinweis für den Benutzer

Der Verlag und die Autoren haben alle Sorgfalt walten lassen, um vollständige und akkurate Informationen in diesem Buch zu publizieren. Der Verlag übernimmt weder Garantie noch die juristische Verantwortung oder irgendeine Haftung für die Nutzung dieser Informationen, für deren Wirtschaftlichkeit oder fehlerfreie Funktion für einen bestimmten Zweck. Ferner kann der Verlag für Schäden, die auf einer Fehlfunktion von Programmen oder ähnliches zurückzuführen sind, nicht haftbar gemacht werden. Auch nicht für die Verletzung von Patent- und anderen Rechten Dritter, die daraus resultieren. Eine telefonische oder schriftliche Beratung durch den Verlag über den Einsatz der Programme ist nicht möglich. Der Verlag übernimmt keine Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren, Programme usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Buch berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften. Der Verlag hat sich bemüht, sämtliche Rechteinhaber von Abbildungen zu ermitteln. Sollte dem Verlag gegenüber dennoch der Nachweis der Rechtsinhaberschaft geführt werden, wird das branchenübliche Honorar gezahlt.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media
springer.de

© Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg 2011
Spektrum Akademischer Verlag ist ein Imprint von Springer

11 12 13 14 15 5 4 3 2 1

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Planung und Lektorat: Dr. Andreas Rüdinger, Barbara Lühker
Herstellung: Crest Premedia Solutions (P) Ltd, Pune, Maharashtra, India
Umschlaggestaltung: SpieszDesign, Neu-Ulm
Titelbild: © SpieszDesign
Satz: Autorensatz

ISBN 978-3-8274-2761-8

Vorwort

Sie halten ein weiteres Buch in den Händen, das in die Höhere Mathematik einführt. Falls Sie es nicht schon gekauft oder ausgeliehen haben, würden wir uns freuen, wenn Sie es täten. Keine Sorge – reich machen Sie uns damit nicht (insbesondere dann nicht, wenn Sie es nur ausleihen). Aber vielleicht hilft es Ihnen beim Einstieg ins Studium und später als Nachschlagewerk. Es gibt viele und manche sehr gute Bücher über Höhere Mathematik. Einige davon sind im Literaturverzeichnis aufgelistet. Wir maßen uns nicht an zu sagen, dass unseres besser ist. Wir freuen uns auch, wenn Sie es nur als Zweitbuch auswählen. Was das Buch von einigen anderen Werken unterscheidet, ist die Bandbreite. Da es aus dem Unterricht in den Bachelor-Studiengängen Maschinenbau, Elektrotechnik und Mechatronik an der Hochschule Karlsruhe und der Hochschule Niederrhein entstanden ist, berücksichtigt es die Einstiegsschwierigkeiten von Studierenden mit lückenhaften Vorkenntnissen und motiviert die Inhalte mit praktischen Beispielen aus den Ingenieurfächern. Gehören Sie zu dieser Gruppe, dann lassen Sie beim Lesen die ausführlichen Beweise zunächst aus. Wenn Sie tiefer in die Mathematik einsteigen wollen (oder müssen) und Sie die Verfahren wirklich verstehen wollen, finden Sie über die kommentierten Beweise hinaus ein reichhaltiges Angebot. Themen, die über ein Minimalprogramm (das das Überleben im Studium sicher stellt) hinausgehen, sind mit einem Stern (*) gekennzeichnet. Einige dieser Inhalte sind mathematischer Natur, andere stellen einen Bezug zu Anwendungen aus der Technik her. Studieren Sie eine Naturwissenschaft, so sehen Sie hier, wofür man die Mathematik praktisch benötigt. Darüber hinaus bieten die Kästen noch zusätzliche Hintergrundinformationen und weiteres Material zur Vertiefung des Stoffs.

Im ersten Kapitel werden Grundlagen wie Logik, Mengenlehre und Zahlen auf dem Niveau eines Mathematik-Vorkurses behandelt. Auch wenn Sie gute Vorkenntnisse haben, sollten Sie dieses Kapitel als Erstes durchblättern. Unserer Erfahrung nach werden hier die meisten Klausurfehler gemacht. Vielleicht sind auch einige Themen wie komplexe Zahlen oder Determinanten neu für Sie.

Danach können Sie entweder mit der Analysis in Kapitel 2 oder mit der Linearen Algebra in Kapitel 3 weitermachen. Die Analysis beschäftigt sich mit Grenzwerten, kümmert sich also um das unendlich Kleine und Große. Dazu gehört insbesondere die Differenzial- und Integralrechnung (Umgang mit momentanen Änderungen). Die Lineare Algebra benötigt man z. B. beim Lösen von linearen Gleichungssystemen, wie sie beispielsweise bei der Berechnung von Spannungen und Strömen in elektrischen Netzwerken auftreten.

Die weiteren Kapitel sind überwiegend unabhängig voneinander, setzen aber die Sätze der Analysis aus Kapitel 2 und einige Aussagen der Linearen Algebra aus Kapitel 3 voraus. Diese Abschnitte lesen sich natürlich am leichtesten der vorgegebenen Nummerierung folgend. In Kapitel 4 erweitern wir die Analysis aus Kapitel 2 auf Funk-

tionen mit mehreren Variablen, wie sie in unserer dreidimensionalen Welt auftreten. Viele Zusammenhänge in der Natur beschreiben Veränderungen und lassen sich als Differenzialgleichungen modellieren. Dazu sehen wir uns in Kapitel 5 einige ausgewählte Lösungsverfahren an. Die Fourier-Analyse nimmt aufgrund ihrer praktischen Bedeutung mit Kapitel 6 einen breiten Raum ein. Hier zerlegt man eine Schwingung in die einzelnen Frequenzen, aus denen sie zusammengesetzt ist. Aus der Fourier-Analyse heraus lässt sich die Laplace-Transformation verstehen, mit der man effizient Anfangswertprobleme für Systeme von Differenzialgleichungen lösen kann, wie sie z. B. in der Regelungstechnik behandelt werden. Das Buch schließt in Kapitel 7 mit einer kurzen Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, die man beispielsweise bei Simulationen, in der digitalen Signalverarbeitung und im Qualitätsmanagement benötigt. Zu jedem Kapitel finden Sie eine Aufgabensammlung. Die Lösungen stehen auf der Internetseite zum Buch zur Verfügung:

<http://www.spektrum-verlag.de/978-3-8274-2761-8>

Wir möchten unseren Mitarbeitern und Kollegen in Karlsruhe und Krefeld danken, die uns bei der Erstellung des Buchs unterstützt haben. Ebenso bedanken wir uns bei vielen Studierenden und Tutoren für ihre Anregungen und konstruktive Kritik. Besonderer Dank gilt Prof. Dr. Knut Schumacher für Einblicke in die Regelungstechnik, Prof. Dr. Roland Hoffmann für Material zur komplexen Wechselstromrechnung, Prof. Dr. Johannes Blanke Bohne für sein Mathematik-Skript, Prof. Dr. Christoph Dalitz für seine Unterlagen zur Fourier-Analyse, Prof. Dr. Jochen Rethmann und Prof. Dr. Peer Ueberholz für ihre kritischen Fragen, Prof. Dr. Karlheinz Schüffler für viele Diskussionen (nicht nur über Mathematik), Dipl.-Ing. Ralph Radmacher für seine Photos, Dipl.-Ing. Guido Janßen für seine Anmerkungen zu den Beispielen aus der Elektrotechnik und nicht zuletzt unseren Lehrern Prof. Dr. Rolf Joachim Nessel und Prof. Dr. Erich Martensen.

Wir haben eine Fülle von Beispielen verwendet, die sich im Laufe der Jahre angesammelt haben und deren Ursprung nicht immer nachvollziehbar war. Sollten wir hier Autoren unwissentlich zitieren, möchten wir uns dafür entschuldigen.

Zum Schluss möchten wir uns noch ganz besonders bei Herrn Dr. Rüdinger und Frau Lühker vom Springer-Verlag bedanken. Dr. Rüdinger hat das Buchprojekt ermöglicht und viele wertvolle Anregungen beige-steuert, während Frau Lühker mit professioneller redaktioneller Hilfe zur Seite stand.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
1 Grundlagen	1
1.1 Mengenlehre	1
1.1.1 Mengenbegriff	2
1.1.2 Mengenoperationen	4
1.1.3 Abbildungen	7
1.2 Logik	12
1.2.1 Aussagenlogik	12
1.2.2 Prädikatenlogik	16
1.2.3 Beweise	21
1.3 Reelle Zahlen	23
1.3.1 Natürliche und ganze Zahlen	23
1.3.2 Rationale Zahlen	33
1.3.3 Reelle Zahlen	40
1.4 Rechnen mit reellen Zahlen	48
1.4.1 Potenzen und Wurzeln	49
1.4.2 Summen und Produkte, Binomischer Lehrsatz	51
1.4.3 Beträge und Ungleichungen	59
1.4.4 Über das Lösen von Gleichungen und Ungleichungen	64
1.5 Reelle Funktionen	71
1.5.1 Notation reeller Funktionen	71
1.5.2 Eigenschaften von reellen Funktionen	74
1.5.3 Umkehrfunktion	79
1.5.4 Verkettung von Funktionen	81
1.5.5 Signum- und Betragsfunktion	83
1.5.6 Polynome und gebrochen-rationale Funktionen	84
1.5.7 Potenz- und Wurzelfunktionen	94
1.5.8 Exponentialfunktionen und Logarithmen	95
1.5.9 Trigonometrische Funktionen	105
1.5.10 Hyperbel- und Areafunktionen	121
1.6 Komplexe Zahlen	124
1.6.1 Erweiterung der reellen Zahlen um eine imaginäre Einheit	125
1.6.2 Komplexe Arithmetik	126
1.6.3 Die Gauß'sche Zahlenebene	127
1.6.4 Euler'sche Gleichung und Polarform komplexer Zahlen	130
1.6.5 Komplexe Wechselstromrechnung*	136
1.6.6 Fundamentalsatz der Algebra	139
1.7 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen	144

1.7.1	Lineare Gleichungssysteme	145
1.7.2	Matrizen, Zeilen- und Spaltenvektoren	146
1.7.3	Lösen linearer Gleichungssysteme	154
1.7.4	Inverse Matrix und transponierte Matrix	161
1.7.5	Symmetrische und orthogonale Matrizen	166
1.7.6	Dreiecksmatrizen, Bandmatrizen und LR-Zerlegung*	168
1.8	Determinanten	171
1.8.1	Definition und elementare Eigenschaften von Determinanten	172
1.8.2	Determinanten und lineare Gleichungssysteme	179
1.9	Aufgaben	183
2	Differenzial- und Integralrechnung	195
2.1	Folgen	195
2.1.1	Definition und Grundbegriffe von Folgen	196
2.1.2	Konvergenz und Divergenz von Folgen	200
2.1.3	Rechnen mit konvergenten Folgen	203
2.1.4	Konvergenzkriterien	206
2.1.5	Die Euler'sche Zahl e als Grenzwert von Folgen	210
2.1.6	Approximation reeller Potenzen	212
2.1.7	Bestimmte Divergenz	212
2.1.8	Häufungspunkte einer Folge*	215
2.1.9	Folgenkompaktheit und Cauchy-Folgen*	216
2.2	Zahlen-Reihen	219
2.2.1	Definition und Konvergenz einer Reihe	220
2.2.2	Rechnen mit konvergenten Reihen	223
2.2.3	Alternativen zur Definition der Reihenkonvergenz	224
2.2.4	Absolute Konvergenz	226
2.2.5	Konvergenzkriterien für Reihen	229
2.3	Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit	237
2.3.1	Umgebungen und Überdeckungen	237
2.3.2	Grenzwerte von Funktionen	239
2.3.3	Stetigkeit	251
2.3.4	Eigenschaften stetiger Funktionen	258
2.3.5	Unstetigkeitsstellen	264
2.4	Differenzierbarkeit und Ableitungen	267
2.4.1	Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten	268
2.4.2	Ableitungsregeln	274
2.4.3	Newton-Verfahren	283
2.4.4	Das Differenzial	284
2.4.5	Höhere Ableitungen	286
2.5	Zentrale Sätze der Differenzialrechnung	288

2.5.1	Satz von Fermat: notwendige Bedingung für lokale Extrema.....	288
2.5.2	Mittelwertsätze der Differenzialrechnung	289
2.5.3	Regeln von L'Hospital.....	294
2.6	Integralrechnung	301
2.6.1	Definition des Integrals.....	301
2.6.2	Eigenschaften des Integrals	306
2.6.3	Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung	311
2.6.4	Rechenregeln zur Integration.....	315
2.6.5	Numerische Integration.....	330
2.6.6	Uneigentliche Integrale	333
2.6.7	Volumen und Flächen	338
2.7	Satz von Taylor, Kurvendiskussion und Extremalprobleme.....	342
2.7.1	Taylor-Summen	342
2.7.2	Kurvendiskussion und Extremalprobleme	346
2.8	Potenzreihen	356
2.8.1	Unendliche Taylor-Summen und Potenzreihen.....	356
2.8.2	Einschub: Funktionenfolgen *	360
2.8.3	Konvergenz von Potenzreihen	369
2.8.4	Differenziation und Integration von Potenzreihen	373
2.8.5	Der Zusammenhang zwischen Potenzreihen und Taylor-Reihen	374
2.8.6	Die komplexe Exponentialfunktion.....	375
2.9	Aufgaben	377
3	Lineare Algebra.....	385
3.1	Vektoren in der Ebene und im Raum	385
3.1.1	Vektoren: Grundbegriffe und elementare Rechenregeln.....	385
3.1.2	Skalarprodukt und Orthogonalität	393
3.1.3	Vektorprodukt und Spatprodukt	399
3.1.4	Anwendungen des Skalar-, Vektor- und Spatprodukts	405
3.2	Analytische Geometrie	407
3.2.1	Geraden in der Ebene und im Raum	408
3.2.2	Ebenen im Raum.....	415
3.3	Vektorräume	422
3.3.1	Definition des Vektorraums	422
3.3.2	Lineare Unabhängigkeit, Basis und Dimension	429
3.3.3	Skalarprodukt und Norm	438
3.3.4	Orthogonalität, Orthogonal- und Orthonormalsysteme	442
3.4	Lineare Abbildungen	453
3.4.1	Lineare Abbildungen und Matrizen	454
3.4.2	Summe, skalaras Vielfaches und Verkettung linearer Abbildungen ..	458
3.4.3	Kern und Bild einer linearen Abbildung, Dimensionssatz	461

3.4.4	Umkehrabbildung und inverse Matrix	468
3.4.5	Koordinaten- und Basistransformationen *	470
3.5	Lösungstheorie linearer Gleichungssysteme	474
3.5.1	Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems	474
3.5.2	Berechnung von linearen elektrischen Netzwerken *	478
3.6	Eigenwerte und Eigenvektoren	487
3.6.1	Eigenwerte und Eigenvektoren	487
3.6.2	Diagonalisierung von Matrizen *	496
3.7	Aufgaben	500
4	Funktionen mit mehreren Variablen	505
4.1	Grenzwerte und Stetigkeit	507
4.2	Ableitungen von reellwertigen Funktionen mit mehreren Variablen	512
4.2.1	Ableitungsbegriffe	512
4.2.2	Höhere Ableitungen	521
4.2.3	Fehlerrechnung *	525
4.3	Extremwertrechnung	528
4.3.1	Lokale und globale Extrema	528
4.3.2	Extrema unter Nebenbedingungen *	534
4.4	Integralrechnung mit mehreren Variablen	541
4.4.1	Integration über mehrdimensionale Intervalle	541
4.4.2	Integration über Normalbereiche	548
4.4.3	Substitutionsregel	552
4.4.4	Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten	553
4.5	Vektoranalysis	559
4.5.1	Vektorfelder	559
4.5.2	Kurven	560
4.5.3	Quellen, Senken und Wirbel in Vektorfeldern	563
4.5.4	Kurvenintegrale	565
4.5.5	Satz von Green *	572
4.5.6	Flächenintegrale *	573
4.5.7	Die Sätze von Gauß und Stokes *	576
4.6	Aufgaben	582
5	Gewöhnliche Differenzialgleichungen	585
5.1	Einführung	585
5.1.1	Beispiele für Differenzialgleichungen aus Physik und Technik	586
5.1.2	Grundbegriffe	590
5.1.3	Konstruktion einer Lösung, Existenz und Eindeutigkeit	594
5.1.4	Iterationsverfahren von Picard und Lindelöf	598
5.2	Lösungsmethoden für Differenzialgleichungen erster Ordnung	599
5.2.1	Lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung	600

5.2.2	Nicht-lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung	613
5.3	Lineare Differenzialgleichungssysteme	626
5.3.1	Motivation: Eine Schaltung mit Induktivitäten	626
5.3.2	Grundbegriffe	627
5.3.3	Homogene Lösungen	630
5.3.4	Partikuläre Lösungen	635
5.3.5	Komplexe und mehrfache Eigenwerte *	640
5.4	Lineare Differenzialgleichungen höherer Ordnung	650
5.4.1	Lösung über ein lineares Differenzialgleichungssystem	650
5.4.2	Lösung mit einem Ansatz vom Typ der rechten Seite	656
5.4.3	Schwingungsgleichung*	662
5.4.4	Eine schwingende Saite	667
5.5	Aufgaben	669
6	Fourier-Reihen und Integraltransformationen	673
6.1	Fourier-Reihen	674
6.1.1	Fourier-Koeffizienten und Definition der Fourier-Reihe	675
6.1.2	Sinus- und Kosinus-Form der Fourier-Reihe	681
6.1.3	Komplexwertige Funktionen und Fourier-Koeffizienten	683
6.1.4	Faltung	688
6.1.5	Konvergenz von Fourier-Reihen *	696
6.1.6	Gibbs-Phänomen	706
6.1.7	Entwicklung 2p-periodischer Funktionen	710
6.2	Fourier-Transformation	711
6.2.1	Fourier-Integral	711
6.2.2	Fourier-Umkehrtransformation	715
6.2.3	Fourier-Koeffizienten und Fourier-Transformation	717
6.2.4	Eigenschaften der Fourier-Transformation	718
6.2.5	Faltung	723
6.3	Laplace-Transformation	726
6.3.1	Von der Fourier- zur Laplace-Transformation	726
6.3.2	Rechnen mit der Laplace-Transformation	730
6.3.3	Laplace-Transformation in der Systemtheorie *	742
6.4	Diskrete Fourier-Transformation	750
6.4.1	Ausgangspunkt: Koeffizienten einer Fourier-Reihe	753
6.4.2	Diskrete Fourier-Transformation	756
6.4.3	Diskrete Faltung *	764
6.4.4	FFT-Algorithmus	768
6.4.5	Numerische Berechnung von Fourier-Koeffizienten	773
6.4.6	Abtastatz für trigonometrische Polynome	775
6.4.7	Leck-Effekt (Leakage) *	783

6.4.8	Numerische Berechnung der Fourier-Transformation	784
6.4.9	Abtastsatz der Fourier-Transformation	785
6.4.10	Leck-Effekt und Fensterfunktionen*	792
6.4.11	Zusammenfassung	793
6.5	Aufgaben	793
7	Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik	799
7.1	Beschreibende Statistik	800
7.1.1	Grundbegriffe	800
7.1.2	Empirische Verteilungsfunktionen	805
7.1.3	Lageparameter	806
7.1.4	Streuungsparameter	811
7.1.5	Zweidimensionale Häufigkeitsverteilungen und Korrelation	814
7.1.6	Lineare Regressionsrechnung	817
7.2	Wahrscheinlichkeitsrechnung	822
7.2.1	Zufallsexperimente und Ereignisse	822
7.2.2	Wahrscheinlichkeit und Satz von Laplace	825
7.2.3	Kombinatorik	828
7.2.4	Unabhängige Ereignisse und bedingte Wahrscheinlichkeiten	833
7.2.5	Zufallsvariablen	841
7.2.6	Lage- und Streuungsparameter von Zufallsvariablen	853
7.2.7	Gesetz der großen Zahlen	862
7.2.8	Zentraler Grenzwertsatz	867
7.3	Schließende Statistik	873
7.3.1	Punktschätzungen	874
7.3.2	Begriffe der Fehlerrechnung*	877
7.3.3	Intervallschätzungen	878
7.3.4	Hypothesentests	886
7.4	Aufgaben	888
	Literaturverzeichnis	895
	Index	899