Grundkurs Topologie

Gerd Laures Markus Szymik

Grundkurs Topologie

Autoren

Prof. Dr. Gerd Laures
gerd.laures@ruhr-uni-bochum.de
Dr. Markus Szymik
markus.szymik@ruhr-uni-bochum.de

Ruhr-Universität Bochum
Fakultät für Mathematik
44780 Bochum

Wichtiger Hinweis für den Benutzer

Der Verlag und die Autoren haben alle Sorgfalt walten lassen, um vollständige und akkurate Informationen in diesem Buch zu publizieren. Der Verlag übernimmt weder Garantie noch die juristische Verantwortung oder irgendeine Haftung für die Nutzung dieser Informationen, für deren Wirtschaftlichkeit oder fehlerfreie Funktion für einen bestimmten Zweck. Der Verlag übernimmt keine Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren, Programme usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Buch berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften. Der Verlag hat sich bemüht, sämtliche Rechteinhaber von Abbildungen zu ermitteln. Sollte dem Verlag gegenüber dennoch der Nachweis der Rechtsinhaberschaft geführt werden, wird das branchenübliche Honorar gezahlt.

Bibliografische Information Der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media
springer.de

© Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg 2009
Spektrum Akademischer Verlag ist ein Imprint von Springer

09 10 11 12 13 5 4 3 2 1

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Planung und Lektorat: Dr. Andreas Rüdinger, Bianca Alton
Herstellung: Crest Premedia Solutions (P) Ltd, Pune, Maharashtra, India
Satz: Autorensatz
Umschlaggestaltung: SpieszDesign, Neu-Ulm
Titelfotografie: © Jos Leys. Das Titelbild zeigt eine dreiblättrige Überlagerung der Klein'schen Flasche, siehe Seite 166 (Abb. 8.7)
Abbildungen: Thomas Epp und die Autoren

ISBN 978-3-8274-2040-4

für Christina und Kirsten

Vorwort

Zur Topologie. Die Topologie, als Teilgebiet der Mathematik, beschäftigt sich mit den qualitativen Eigenschaften geometrischer Objekte. Ihr Begriffsapparat ist so mächtig, dass kaum eine mathematische Struktur nicht mit Gewinn topologisiert wurde. Dementsprechend gibt es auch kaum ein Gebiet der modernen Mathematik, welches nicht mit der Topologie in Verbindung steht. Topologie lernen heißt Mathematik lernen.

Zu diesem Buch. Dieses Buch versteht sich als Brücke von den einführenden Vorlesungen der Analysis und Linearen Algebra zu den fortgeschrittenen Vorlesungen der Algebraischen und Geometrischen Topologie. Dabei wird das topologische Grundwissen vermittelt, welches alle Studierenden der Mathematik im Laufe des Studiums erwerben sollten. Es eignet sich besonders dazu, Studierende in einem Bachelor- oder Masterstudiengang, deren Studienplan vielleicht nur eine einsemestrige Vorlesung zur Topologie zulässt, bei einer solchen Veranstaltung zu begleiten. Es kann aber auch zum Selbststudium verwendet werden, etwa für mathematisch interessierte Naturwissenschaftler.

Zu seiner Geschichte. Der vorliegende Text entstand im Rahmen der einführenden Vorlesungen zur Topologie, welche die Verfasser in den Sommersemestern 2006 und 2008 an der Ruhr-Universität Bochum hielten. Wir legten dabei besonderen Wert auf eine moderne Sprache, welche die vorgestellten Ideen vereinheitlicht und den Zugang zu ihnen somit erleichtert.

Zur modernen Sprache. Bereits zu Beginn des Mathematikstudiums wird von den Studierenden erwartet, dass sie mit den Begriffen Menge und Abbildung umgehen können. Das bedeutet nicht, dass sie zuerst Mengenlehre studieren sollen, es bedeutet nur, dass sie die Mengensprache beherrschen sollten, um den Vorlesungen folgen zu können. Diesem Zweck dient auch die Kategoriensprache, die man als Verallgemeinerung der Mengensprache auffassen kann: Kategorien sind wie Mengen, deren Elemente allerdings Objekte genannt werden und nicht isoliert stehen, sondern durch Morphismen verbunden sind. Die Kategoriensprache eignet sich sehr gut dazu, häufig wiederkehrende Phänomene und Konstruktionen in einen einheitlichen konzeptionellen Rahmen zu fassen. Dadurch werden unter anderem Definitionen leichter merkbar und Sätze prägnanter formulierbar. Kurz gesagt: Das Lernen der ‚Vokabeln‘ macht sich sehr schnell bezahlt.

Zum Inhalt. Die ersten fünf Kapitel behandeln die grundlegenden Begriffe der mengentheoretischen Topologie. Kapitel 6 und 7 benutzen Wege, um topologische Räume zu studieren. Zusammen mit der Theorie der Überlagerungen, welche in Kapitel 8 ausgeführt wird, bildet dies den Stoff, an dem keine einführende Vorlesung zur Topologie vorbeikommt. Die abschließenden drei Kapitel zu Bündeln, Garben und simplizialen Methoden, welche heute zu den Grundbegriffen der Geometrie und Topologie gehören, bilden Sprungsteine in weiterführende Vorlesungen zur höheren Topologie. Nebenbei werden viele Abschnitte durch kurze Einblicke in weiterführende Themen ergänzt, die einen Ausgangspunkt für Studienarbeiten oder Seminarthemen bieten.

Der folgende Leitfaden deutet die Abhängigkeiten der einzelnen Kapitel voneinander an. Es sei auch auf die Einleitungen der Kapitel verwiesen, die jeweils eine erste Übersicht vermitteln.

Zu den Beispielen und Bildern. In ihren Definitionen ist die Topologie eher abstrakt. Das schuldet sie zum einen ihrer inzwischen über hundertjährigen Geschichte, zum anderen ihrem Anspruch auf ein größtmögliches Anwendungsgebiet. Insofern ist dies nicht zu ändern, sondern sogar wünschenswert. Um dieses Niveau für Studenten erreichbar zu machen, ohne den Nutzwert einzuschränken, wurden Definitionen stets mit vielen Beispielen unterlegt, und das Studium der Beispiele ist unerlässlich für das Verständnis der Theorie. Ohne einen hinreichend großen Beispielschatz ist jede Theorie wertlos. Ferner wurden die Kernideen mit zahlreichen Bildern illustriert. Während Bilder allein nichts beweisen und in ihrer Suggestivkraft auch verwirren können, sind sie ab und an doch eine Hilfe bei der Erfassung des sprachlich Dargestellten. Die Dosis macht das Gift.

Zu den Übungen. Eine besondere Rolle bei der Aneignung mathematischen Wissens spielt der eigene kreative Umgang mit den neu erworbenen Begriffen und Methoden. Darum enthält dieses Buch 176 explizite (und weitere implizite) Übungen, welche zum selbstständigen Umgang mit dem Stoff anregen sollen. Ein nur passives Aufnehmen von Wissen durch die Lektüre von Büchern, mögen sie noch so gut geschrieben sein, ist leider nicht möglich. Heutzutage findet sich natürlich alles irgendwo im Internet, so auch die Lösungen zu einem Teil der Aufgaben hier: Die Website des Buches (unter www.spektrum-verlag.de) biete denen Hilfe, die gar nicht mehr weiter wissen. Aber nach dem vorher Gesagtem sollte klar sein, dass das Finden von Lösungen, wenn es einen Lerneffekt haben soll, auf anderem Wege erfolgen muss. Es kommt eben nicht darauf an, möglichst viele Lösungen zu kennen, sondern möglichst viele Lösungen selbst gefunden zu haben.

Über Schulen. Wenn es so etwas wie topologische Schulen in Deutschland gibt, dann gehören die Autoren am ehesten zur Heidelberger Schule, die von Threlfall über Seifert zu Puppe führte, von dem wir beide direkt und indirekt viel lernten. Lehrbücher dieser Schule sind (ST34), (Sch64), (Dol72), (tD91) und (Lüc05). Aus der Bonner Schule von Hirzebruch sind (Jän05), (Oss92) und (Kre07) zu nennen. Und es gibt auch eine Bochu-

mer Schule: (vQ79) und (SZ94). Aus all diesen Quellen haben wir selbst viel gelernt. Das vorliegende Buch grenzt sich von den genannten dadurch ab, dass es die Stoffauswahl dem heutigen Lehrplan anpasst, und dass es von Beginn an auf die kategorielle Sprache setzt, in der heute Topologie betrieben wird.

Danksagung. Dank an Achim Beckers, Andreas Kuhlo, Marcus Zibrowius und vielen weiteren unserer Studenten für sachdienliche Hinweise, die zur Festnahme von Fehlern führten. Dank auch an Sieglinde Fernholz für das Abtippen einiger handschriftlicher Notizen, Bianca Alton und Andreas Rüdinger vom Verlag für die gründliche Durchsicht des Textes und die Anmerkungen und an Thomas Epp für die gelungene Erstellung der Abbildungen.

Bochum-Querenburg, Dezember 2008

Gerd Laures und Markus Szymik

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	VI
1 Grundbegriffe der Topologie	1
1.1 Metrische Räume	1
1.2 Topologische Räume	7
1.3 Abgeschlossene Teilmengen	11
1.4 Die Kategoriensprache	14
2 Universelle Konstruktionen	19
2.1 Teilräume	19
2.2 Produkte	24
2.3 Summen	28
2.4 Identifizierungen und Quotienten	30
3 Zusammenhang und Trennung	41
3.1 Zusammenhang	41
3.2 Trennung und stetige Fortsetzbarkeit	47
4 Kompaktheit und Abbildungsräume	55
4.1 Kompaktheit	55
4.2 Eigentliche Abbildungen	64
4.3 Der Satz von Tychonoff	68
4.4 Abbildungsräume	71
4.5 Lokal kompakt erzeugte Räume	77
5 Transformationsgruppen	83
5.1 Grundbegriffe der äquivarianten Topologie	83
5.2 Homogene Räume	88
5.3 Eigentliche Operationen	93
6 Wege und Schleifen	99
6.1 Wegeräume und Schleifenräume	99
6.2 Der Wegekategorienfunktorkomplett	103
6.3 Der Homotopiebegriff	108
6.4 Selbstabbildungen des Kreises	114
7 Die Fundamentalgruppe	123
7.1 Das Fundamentalgruppoid	123
7.2 Der Satz von Seifert und van Kampen	133
7.3 Flächen	144
8 Überlagerungen	153
8.1 Die Kategorie der Überlagerungen	153
8.2 Der Hochhebungssatz	161

8.3	Fasertransport	164
8.4	Der Klassifikationssatz	169
8.5	Topologische Galois-Theorie	172
9	Bündel und Faserungen	183
9.1	Faserbündel	183
9.2	Prinzipalbündel	189
9.3	Prinzipalbündel mit diskreter Strukturgruppe	193
9.4	Vektorraumbündel	196
9.5	Faserungen	199
10	Garben	207
10.1	Prägarben und Garben	207
10.2	Halme und Etalräume	210
10.3	Garbifizierung und Pullbacks	214
11	Simpliziale Mengen	217
11.1	Simpliziale Objekte und Morphismen	217
11.2	Singuläre Simplexes und Realisierungen	222
11.3	Ausblicke	230
	Literaturverzeichnis	237
	Index	239