Für die Bereitstellung von Autographien, Vorlesungsnachschriften und Kopien der Weierstraßschen Vorlesung dankt der Herausgeber der Leipziger Universitätsbibliothek (Außenstelle an der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität; Frau I. LETZEL), der Berliner Universitätsbibliothek (Zweigstelle Mathematik an der Humboldt-Universität; Herrn H. HADAN), der Universitätsbibliothek Halle/Saale (Außenstelle an der Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität; Herrn Dr. R. RIEDEL) und dem Institut Mittag-Leffler, Djursholm (Frau K. BROMS).

Für die Bereitstellung der Faksimilevorlagen (S. 227, 228, 268; Zentrales Archiv der Akademie der Wissenschaften der DDR, Nachlaß H. A. SCHWARZ, Nr. 1175) danken Verlag und Herausgeber Herrn Dr. K. KLAUSS.

Für die Bereitstellung der Fotos (S. 4, 178; Porträtsammlung der Universitätsbibliothek der Humboldt-Universität Berlin) danken Verlag und Herausgeber Frau Dr. CH. SCHWARZ.

Der Verlag dankt außerdem Herrn Buchbindermeister W. FRENKEL, Leipzig, für die hilfreiche Unterstützung.

ISBN-13: 978-3-211-95841-4 e-ISBN-13: 978-3-7091-9533-8

DOI: 10.1007/978-3-7091-9533-8

TEUBNER-ARCHIV zur Mathematik · Band 9

© BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1988

1. Auflage

Lektor: Jürgen Weiß

K. Weierstraß

Ausgewählte Kapitel aus der Funktionslehre

Vorlesung, gehalten in Berlin 1886

Mit der akademischen Antrittsrede, Berlin 1857,
und drei weiteren Originalarbeiten von
K. WEIERSTRASS aus den Jahren 1870 bis 1880/86

Herausgegeben, kommentiert und mit
einem Anhang versehen von

R. SIEGMUND-SCHULTZE

Dieser Band enthält die Vorlesung „Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre“, die KARL WEIERSTRASS im Sommersemester 1886 an der Berliner Universität gehalten hat. Sie war von ihm als Ergänzung seiner turnusmäßigen Vorlesung „Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen“ konzipiert worden, und er hielt sie nur dieses eine Mal.

Inhaltliche Schwerpunkte sind der Weierstraßsche Approximationssatz (mit Verallgemeinerungen auf unstetige Funktionen mittels des Cantorsche Begriffs des äußeren Inhalts einer beschränkten Punktmenge) und eine Einführung in die Theorie der Weierstraßschen „analytischen Gebilde“. Der edierte Text, dem eine Autographie zugrunde liegt, enthält zahlreiche historische und methodologische Reflexionen.

Die Vorlesung, der Kommentar des Herausgebers sowie die vier im Anhang enthaltenen fotomechanischen Nachdrucke von Arbeiten der Jahre 1857 bis 1880/86 verdeutlichen in besonderem Maße WEIERSTRASS' Beitrag zur strengen Begründung der Analysis.

LEIPZIG

BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig

Distributed by Springer-Verlag Wien New York

This volume contains the lecture "Selected chapters on function theory", held by KARL WEIERSTRASS at Berlin university in the summer semester 1886. This lecture served as a supplement to the wellknown and repeatedly held "Introduction to the theory of analytical functions", and WEIERSTRASS read it only one time.

The main topics are the Weierstrassian approximation theorem (with a generalization to discontinuous functions by means of G. CANTOR's notion of the outer content of a bounded point set) and an introduction to WEIERSTRASS's theory of analytical "Gebilde". The edited text, which reproduces an autographed version of the mentioned lecture, contains also numerous historical and methodological considerations.

The lecture, the editor's commentary and four photomechanical reprints of articles of 1857–1880/86 illustrate particularly WEIERSTRASS's contribution to the establishment of secure foundations for analysis.

Ce volume contient la conférence «Chapitres choisis de la théorie des fonctions», tenue par KARL WEIERSTRASS au cours du semestre d'été en 1886, à l'université de Berlin. Elle avait été conçue par lui comme un complément de sa conférence cyclique «Introduction à la théorie des fonctions analytiques», et il ne la donna que cette seule fois.

La théorème d'approximation de WEIERSTRASS (avec des généralisations sur des fonctions discontinues au moyen de la notion de CANTOR du contenu externe d'un ensemble de points limité) et une introduction à la théorie des «Analytische Gebilde» de WEIERSTRASS constituent les points forts du contenu. Le texte édité, à la base duquel se trouve une autographie, contient de nombreuses réflexions historiques et méthodologiques.

La conférence, le commentaire de l'éditeur ainsi que les quatre réimpressions photomécaniques d'œuvres des années 1857 à 1880/86 contenues dans l'annexe, précisent dans une mesure particulière la contribution de WEIERSTRASS au raffermissement des fondements de l'analyse.

Этот том содержит курс лекций «Избранные главы теории функций», прочитанный Карлом Вейерштрассом в летнем семестре 1886 г. в Берлинском университете. Эти лекции были разработаны им в качестве дополнения к его стандартному курсу лекций «Введение в теорию аналитических функций», и прочитаны были лишь этот единственный раз.

Центральное место в этих лекциях занимает теорема Вейерштрасса об аппроксимации функций (с обобщениями на разрывные функции с помощью введённого Кантором понятия внешнего содержания точечного множества) и введение в теорию «аналитических образов» Вейерштрасса. Отпечатанный текст, основанный на автографии, содержит многочисленные исторические и методологические замечания.

Лекции, комментарии издателя, а также содержащиеся в приложении четыре фотомеханических перепечатки статей из 1857–1880/86 гг. в особой мере подчёркивают заслуги Вейерштрасса в строгом обосновании математического анализа.

Geleitwort

Als Schüler von KARL WEIERSTRASS zu Beginn unseres Jahrhunderts an der Ausgabe der Werke ihres Lehrers arbeiteten, ging es ihnen vor allem darum, den nachfolgenden Generationen den Schatz der unveröffentlichten Weierstraßschen Vorlesungen über elliptische und Abelsche Funktionen sowie über Variationsrechnung zu überliefern. Daß die Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie nicht in den Editionsplan aufgenommen wurden, dürfte nicht zuletzt auch damit im Zusammenhang gestanden haben, daß deren Wirkung bereits allenthalben erkennbar und unwiderruflich war.

Was den Zeitgenossen von WEIERSTRASS nicht erforderlich schien, will uns heute unverzichtbar scheinen, wenn wir uns als Historiker und als Mathematiker der großen Gestalt von KARL WEIERSTRASS nähern wollen. Was aber den Zeitgenossen noch recht leicht gefallen wäre – eine möglichst exakte historische Dokumentation des Weierstraßschen Beitrages zur strengen Begründung der Analysis –, erfordert heute einen erhöhten Aufwand an geistiger Arbeit, bedingt einen kritischen Vergleich der nur bruchstückhaft auf uns gekommenen und zumeist nicht autorisierten Nachschriften, ein Einfühlen in die persönlichen und wissenschaftlichen Umstände des Weierstraßschen Wirkens.

Die allgemein anerkannte prägende Bedeutung des Weierstraßschen Grundlagenbeitrages für die moderne Mathematik widerspiegelt sich bisher in der internationalen mathematikhistorischen Literatur nur unzureichend. Es ist deshalb sehr zu begrüßen, daß es der Herausgeber mit der Edition der von WEIERSTRASS nur einmal gehaltenen Vorlesung „Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre“ (1886) unternommen hat, jene Lücke schließen zu helfen.

Möge diese Edition dazu beitragen, daß KARL WEIERSTRASS der heutigen Generation von Mathematikern als der von zähem Wahrheitsdrang beseelte und mit schulbildnerischer Kraft begabte Gelehrte vor Augen tritt, der er gewesen ist!

Berlin, September 1987

KURT-R. BIERMANN

Heine

Inhalt

Einführung in die Vorlesungsedition	11
K. Weierstraß: Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre. Vorlesung, gehalten während des Sommersemesters 1886	19
K. Weierstraß: Akademische Antrittsrede (9. Juli 1857). [69, Band 1 (1894), 223–226]	180
K. Weierstraß: Über das sogenannte Dirichlet'sche Princip (14. Juli 1870). [69, Band 2 (1895), 49–54]	184
K. Weierstraß: Über continuirliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen (18. Juli 1872). [69, Band 2 (1895), 71–74]	190
K. Weierstraß: Zur Functionenlehre (12. August 1880). [69, Band 2 (1895), 201–223]; Anmerkungen aus dem Jahre 1886 [69, Band 2 (1895), 224–230]; Nachtrag vom 21. Februar 1881 [69, Band 2 (1895), 231–233]	194
Kommentierender Anhang	
Kommentar zur Vorlesung vom Sommersemester 1886	229
Biographische Anmerkung zur akademischen Antrittsrede von 1857	260
Anmerkung zur Arbeit von 1870	261
Anmerkung zur Arbeit von 1872	262
Anmerkung zur Arbeit von 1880/86	263
Literatur	265
Namen- und Sachverzeichnis	269

Sehen wir uns nun einen kleinen Körper γ , so groß er geradefalls mit einem unendlichen Anzahl von Gliedern $a_1, a_2, \dots$, der γ ist. Man bildet hier γ , indem man sagt, der Körper des Gliedes werde mit der Teilungszahl n multipliziert. Diese Teilungszahl ist aber nicht unendlich, denn man sollte sich vorstellen, obgleich man es zu versuchen. Man bezieht sich die Summe der n ersten Glieder mit a_n und betrachtet die Reihe der Größen $a_1, a_2, a_3, \dots$, und soll man die Summe einer unendlichen Reihe setzen, so muß a_n sehr klein sein gegen γ . bleiben. D. h. nimmt man n hinreichend groß, so verschwindet

$$a_{n+1} - a_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n+1}$$

sehr groß γ beliebig klein gemacht werden können. Man sollte sich auch vorstellen, daß, wenn man nach Annahme einer Größe γ für n eine Größe γ so vorstellen kann, daß die Reihe γ verschwindet, wenn $\gamma > 0$, kleiner als γ ist, die Reihe γ und dessen Wert ist. Man kann so alles verstehen, was sich über die

Addition von unendlich vielen Elementen gebildet haben. Es ist zu sagen, daß, wenn man die Größe der Multiplikation festzustellen. Die beiden Fälle, die wir betrachten, sind: Der Produkt zweier Elemente mit den Elementen m und n ist der Elementen m ; und die Aufstellung der Multiplikationsanordnung, so kann man jedes Glied der Reihe mit jedem Glied der anderen Reihe zu multiplizieren und alle diese Produkte als Summe nehmen. Es ist zu sehen, daß man sich auf diese Weise Elementen mit einem unendlichen Anzahl verfahren. Betrachten wir z. B. ein Ganzes $\frac{1}{n}$, mit wollen wir stattdessen, wie oft es in dem Produkt vorkommt, so setzen man es in a^2 , a^3 , a^4 das Element $\frac{1}{n}$ muß nur vorkommen, und dergl.

Vorwort

„Geblichen ist ... das Gerüst, das WEIERSTRASS zur Sicherung seiner Theorie konstruierte. Wenig Interesse aber finden die speziellen Funktionen, die er behandelte.“

HEINRICH BEHNKE (1966)

Die zitierten Worte [1, S. 24] des bekannten Funktionentheoretikers H. BEHNKE (1898–1979) reflektieren, so zugespitzt sie formuliert sein mögen, eine jedem Mathematiker geläufige Tatsache: Grundlegende *Sätze* (Häufungsstellensatz, Doppelreihensatz, Approximationssatz, Vorbereitungssatz u. a.), die KARL WEIERSTRASS (1815–1897) erstmals streng bewiesen hat, grundlegende *Begriffe* (gleichmäßige Konvergenz, reelle Zahl u. a.), die WEIERSTRASS eingeführt oder deren ganze Tragweite er als erster erkannt hat, gehören nach wie vor zum Fundament der Mathematik. Das unter maßgeblicher Mitwirkung von WEIERSTRASS im 19. Jahrhundert in die Mathematik, insbesondere in die Analysis, eingeführte Strengeniveau ist auch für uns Heutige verbindlich.

Dagegen stehen WEIERSTRASS' *Methode* des schrittweisen, rein analytisch-algebraischen Aufbaus der Theorie der Funktionen einer und mehrerer komplexer Variablen aus dem Begriff der ganzen Zahl unter Verzicht auf die geometrische Anschauung sowie der konkreten *Gegenstand* des Weierstraßschen Interesses, insbesondere das sog. „Jacobische Umkehrproblem“, nicht mehr wie im 19. Jahrhundert im Mittelpunkt mathematischer Forschung.

So mancher Teil des von WEIERSTRASS errichteten „Gerüsts“ am „Gebäude“ der Mathematik (z. B. die Theorie der analytischen Gebilde) ist also inzwischen abgerissen und durch neue „Konstruktionen“ ersetzt worden. Andererseits ist mancher konkrete Gegenstand Weierstraßscher Forschungen in modernen mathematischen Theorien aufgehoben und somit nicht verloren. (So sind „spezielle Funktionen“ wie die Abelschen unter allgemeinen Gesichtspunkten mit Anwendungen in der algebraischen Geometrie durchaus von Interesse; vgl. [15].)

Wertet man die eingangs zitierten Worte BEHNKES differenziert in diesem Sinne, läßt sich immerhin ein primäres historisches Interesse an WEIERSTRASS' Beitrag zur strengen Begründung der Mathematik rechtfertigen. WEIERSTRASS hat diesen Beitrag bekanntlich vor allem durch seine Vorlesungen geleistet, die viele Studenten in den 60er, 70er und 80er Jahren des 19. Jahrhunderts an die Berliner Universität zogen. Schüler wie G. CANTOR, O. HÖLDER, A. HURWITZ, A. KNESER, G. MITTAG-LEFFLER, S. PINCHERLE, C. RUNGE und H. A. SCHWARZ haben den Weierstraßschen Geist mathematischer Strenge verbreitet, wobei sie zumeist weit über das konkrete Forschungsgebiet ihres Lehrers hinausschritten. Systematisch und konzentriert legte WEIERSTRASS seine allgemeine Begründungsmethode der Funktionentheorie in einer in der Regel etwa zweijährlich wiederholten Vorlesung „Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen“ dar. Diese bildete die Grundlage für einen Vorlesungszyklus, der stufenweise die Theorien der elliptischen und Abelschen Funktionen und Integrale sowie WEIERSTRASS' Variationsrechnung entwickelte.

Die „Einleitung“, die WEIERSTRASS ständig überarbeitete, war oft sehr umfangreich; eine Vorlesungsausarbeitung G. HETTNERS für das Jahr 1878 [29] umfaßt 707 handschriftliche Seiten. In der siebenbändigen Ausgabe der Weierstraßschen „Mathematischen

Werke“ (1894–1927) sind Ausarbeitungen der „Einleitung“ nicht berücksichtigt. Bis heute gibt es anscheinend keine kritische und vollständige Edition einer der zahlreichen in verschiedenen Bibliotheken existierenden Ausarbeitungen der „Einleitung“. Die wichtigste mathematikhistorische Quelle ist in dieser Hinsicht die Arbeit von DUGAC [20], die verschiedene Ausarbeitungen in Auszügen ediert und kommentiert (vgl. auch [42]).

Dies ist der Hintergrund, vor dem die hier unternommene Edition einzuordnen ist.

Eine gebotene Beschränkung des Umfangs, die Absicht, dem Leser ein möglichst vielseitiges Bild des Weierstraßschen Beitrages zur strengen Begründung der Mathematik zu vermitteln, vor allem aber das Bestreben, auch dem Mathematikhistoriker einiges Neue zu bieten, ließen den Herausgeber von dem anfangs gehegten Plan der Edition der Hettnerschen Ausarbeitung [29] Abstand nehmen. Im vorliegenden Band wird eine von unbekannter Hand stammende Version der Vorlesung „Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre“ vom Sommersemester 1886 ediert, die sich in der Universitätsbibliothek Leipzig (Außenstelle an der Sektion Mathematik) befindet. Diese Vorlesung ist von WEIERSTRASS ausdrücklich als Ergänzung der „Einleitung“ vom Wintersemester 1884/85 konzipiert worden, und in ihr nehmen historische und methodologische Reflexionen einen breiteren Raum als gewöhnlich ein, während hinsichtlich mathematischer Einzelheiten vielfach auf jene Einleitungsvorlesung zurückverwiesen wird. Der besondere Charakter der Vorlesung von 1886, die WEIERSTRASS nur einmal gehalten hat, und dies am Ende seiner Laufbahn, macht eine weiter unten folgende spezielle Einführung sowie recht umfangreiche Kommentare des Herausgebers erforderlich.

Im Anhang werden zwei kurze Vorträge von WEIERSTRASS vor der Akademie aus den Jahren 1870 und 1872 erneut abgedruckt, die zwar erst 1895 in der Werkausgabe publiziert wurden, deren Inhalt aber lange zuvor vor allem durch Weierstraßsche Vorlesungen tiefgehende Wirkung ausgeübt hatte. Es handelt sich um zwei Gegenbeispiele, mit denen WEIERSTRASS den durch geometrisch-physikalische Plausibilitätsbetrachtungen gestützten Glauben an die uneingeschränkte Gültigkeit des „Dirichletschen Prinzips“ der Potentialtheorie bzw. (im anderen Fall) an die Differenzierbarkeit jeder stetigen Funktion erschüttert hatte.

Diese beiden Beiträge sind vornehmlich kritischer Natur, während z. B. WEIERSTRASS' einflußreicher, 1880 erstmals veröffentlichter Artikel „Zur Functionenlehre“ die konstruktive Seite des Weierstraßschen Begriffsapparats, insbesondere die Tragweite des in seiner Funktionentheorie fundamentalen Begriffs der gleichmäßigen Konvergenz, den Zeitgenossen eindrucksvoll vor Augen führte.

Diese ebenfalls im Anhang fotomechanisch nachgedruckte Abhandlung bringt einige grundlegende Begriffe und Sätze, die in der Vorlesung vorausgesetzt werden, in originaler Weierstraßscher Fassung. Schließlich macht die den Anhang komplettierende, auch literarisch recht anspruchsvolle „Akademische Antrittsrede“ (1857) die wesentlichen Ausgangspunkte Weierstraßscher Forschungen deutlich. Sie zeigt, daß WEIERSTRASS die begriffliche Verschärfung der Mathematik nicht um ihrer selbst willen betrieb. Er hielt sie vielmehr für unverzichtbar, um konkrete Einzelprobleme der Mathematik überhaupt exakt formulieren und dann lösen zu können. Am Ende seiner Vorlesung vom Sommer 1886 bemerkt WEIERSTRASS ausdrücklich, es sei „nicht wünschenswert, daß namentlich jüngere Mathematiker sich ausschließlich mit solchen (allgemeinen) Problemen be-

schäftigen, da erst die Beschäftigung mit konkreten Problemen überhaupt uns die Gegenstände solcher allgemeineren Untersuchungen liefern kann“.

Der Kommentar der vorliegenden Edition wird an verschiedenen Stellen Gelegenheit nehmen, auf diese grundsätzliche Parallelität in WEIERSTRASS' Schaffen zwischen Einzeluntersuchungen und allgemeiner begrifflicher Arbeit hinzuweisen.

Einige wenige biographische Informationen enthalten meine nachfolgende Einführung in die Vorlesung, WEIERSTRASS' „Akademische Antrittsrede“ sowie meine beigefügte biographische Anmerkung. Dabei stütze ich mich weitgehend auf die unübertroffenen Arbeiten von K.-R. BIERMANN, insbesondere [5] und [7], die den durchaus nicht nur sonnenbeglänzten und gegen Ende sogar tragischen Lebensweg von WEIERSTRASS nachzeichnen. Für das Verständnis des Weierstraßschen Werkes sind biographische Kenntnisse außerordentlich wichtig; man denke nur an seine langdauernde wissenschaftliche Isolation als Gymnasiallehrer und an die Auseinandersetzungen mit L. KRONECKER.

Im fachlichen Kommentar stehen die historische Einordnung der Begriffe und Sätze und – was die Vorlesung betrifft – außerdem die Entschlüsselung von Andeutungen, der kritische Textvergleich sowie die Aufhellung der inneren Bezüge des nicht mit einer ausgereiften wissenschaftlichen Publikation vergleichbaren Textes im Vordergrund. Dagegen würde eine vollständige Erfassung der Widerspiegelung des Weierstraßschen Grundlagenbeitrages in der modernen Mathematik weit über den Rahmen einer Edition wie der vorliegenden hinausgehen. In dieser Hinsicht sei besonders auf die in dem Sammelband [1] enthaltenen Artikel sowie auf [2], [3], [31] und [68] verwiesen. Die besten Gesamteinschätzungen des Weierstraßschen Werkes geben immer noch HILBERT [30], POINCARÉ [58] und MITTAG-LEFFLER [51].

Dem Herausgeber ist es ein Bedürfnis, dem Begründer der modernen Weierstraß-Forschung, KURT-R. BIERMANN (Berlin), herzlich zu danken, der die Edition von Anfang an mit regem Interesse und mannigfachem Rat verfolgt hat.

Den Herren R. BÖLLING (Berlin) und P. SCHREIBER (Greifswald) und seinem Cousin, Herrn RAINER SIEGMUND-SCHULTZE (Berlin), ist der Herausgeber für vielfältige Anregungen und für die kritische Durchsicht einzelner Passagen des Textes zu großem Dank verpflichtet. Selbstverständlich trägt keiner der genannten Herren Verantwortung für irgendeine der in der Edition getroffenen historischen Wertungen.

Herrn I. GRATTAN-GUINNESS (Barnet, England) gilt der Dank für Hinweise auf Ausarbeitungen der Weierstraßschen Vorlesung, die sich im Institut Mittag-Leffler in Djursholm (Schweden) befinden. Frau K. BROMS von dieser Institution bin ich besonders verpflichtet für die Übersendung der vollständigen Kopie einer Abschrift der edierten Vorlesungsausarbeitung, die für die Entzifferung des Textes unverzichtbar war.

Abschließend möchte ich die sorgfältige und engagierte Betreuung des Unternehmens durch meinen Lektor, Herrn J. WEISS, dankbar würdigen.

Berlin, September 1987

REINHARD SIEGMUND-SCHULTZE

vorwärts folgt, kann man polyandromassen geben:
 Zwei Punkte a u. b , die einen festen Abstand von ein-
 ander haben sollen, können in unendlich viele bewegte
 Räume gebraucht werden; sind ferner zwei Punkte
 c u. d gegeben, die ebenfalls einen festen Abstand
 voneinander haben sollen, so soll dieser Abstand ge-
 wiss alt jener wissen, wenn zwei Punkte c u. d inner-
 halb eines bewegten Raumes nicht bewegt
 werden können, insofern dass a und b gebraucht
 werden können. Jedemfalls muß die Lage, die
 Größere - Gleich und kleiner sein von zwei Punkten
 festsetzen. Und festgesetzt, kann man nun mit ge-
 wiss Leichtigkeit mannigfaltige Definitionen in der
 Geometrie geben. So kann man zunächst die Ebene d.
 definieren als die Gesammtheit aller Punkte, die von
 den festen Punkten a und b Abstand haben, die ein-
 ander gleich sind. Die Gesammtheit aller Punkte, die
 von zwei festen Punkten einander gleiche Abstände
 haben und in einer Ebene liegen, kann man gerade
 Linie nennen. Auf Grund des ebenen Vorwärtzungs,
 indem man eine neue Hypothese zugeht, kann man
 weiter definieren, was es heißt, zwei Punkte a , b , c lie-
 gen in einer geraden Linie. Sind die beiden festen Punk-
 te a , b gegeben und ist c ein verständlicher Punkt, der
 aber von den einen, z. B. von b , statt einen mit Abstand
 den Abstand hat, so sagen wir, daß es zwei Lagen von c gibt,
 in denen der Abstand der Punkte c von a ein Ding immer
 bestimmtes ist. In diesen Lagen nun, sagen wir,
 liegt c mit a und b auf einer Geraden, und wir definieren die
 Gesammtheit aller Punkte, die diesen Lagen - und Hin-
 rücklagen entsprechen, wenn wir den festen Abstand der
 Punkte c von b variieren lassen, als die Gerade, die a , b und
 c geht. Aber man kann hier nicht beweisen, daß es
 ein solches Gebilde gibt, was man die erste Definition
 vollständig zulässig ist. Es ist z. B. Lobatschewsky
 auf die eine Geometrie ganz vündet. Das beweist, daß