Ph. Blanchard und E. Brüning

Distributionen und Hilbertraumoperatoren

Mathematische Methoden der Physik

Springer-Verlag Wien GmbH

Prof. Dr. Philippe Blanchard
Fakultät für Physik
Universität Bielefeld
D-33501 Bielefeld
Bundesrepublik Deutschland

Prof. Dr. Erwin Brüning
Department of Mathematics
University of Cape Town
Rondebosch 7700
South Africa

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdruckes, der Entnahme von Abbildungen, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten.

© 1993 Springer-Verlag Wien
Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag/Wien 1993

Satz: Reproduktionsfertige Vorlagen der Autoren

Gedruckt auf säurefreiem, chlorfrei gebleichtem Papier – TCF

**Res Jost (10.I.1918 - 3.X.1990) und Jurko Vladimir
Glaser (21.IV.1924 - 22.I.1984) in Erinnerung gewid-
met, die für uns beide verehrte Vorbilder und für
einen von uns (Ph.B.) auch liebe Freunde waren.**

Vorwort

Vorlesungen der modernen Theoretischen Physik setzen unter anderem Grundkenntnisse in der Theorie der verallgemeinerten Funktionen (insbesondere Distributionen) und in der Theorie der linearen Operatoren auf Hilbert-Räumen voraus. Diesem Umstand wurde im Lehrplan der Fakultät für Physik der Universität Bielefeld Rechnung getragen und ein Kurs "Mathematische Methoden der Physik" eingerichtet, der von den Studenten zum Vordiplom absolviert werden muß. Dementsprechend wird dieser einsemestrige Kurs seit vielen Jahren regelmäßig abgehalten. Dieses Buch entstand aus den Vorlesungen, die die Autoren im Wechsel und unter inhaltlicher Absprache über einen Zeitraum von fast zehn Jahren gehalten haben. Als Hauptziel dieses Kurses kristallisierte sich bald heraus, mathematische Grundkenntnisse zu vermitteln, wie sie vor allem in der Quantenmechanik und in der relativistischen Quantenfeldtheorie, aber nicht nur dort, benötigt werden. Die zahlreichen Wiederholungen dieser Vorlesungen erlaubten es, viele Variationen im Inhalt und in der Darstellungsform des Stoffes zu testen. Das Buch ist daher durchaus umfangreicher als die einzelnen Vorlesungen geraten, hinzugekommen sind vor allem detailliertere mathematische Beweise und zahlreiche Beispiele und Hinweise auf mögliche Anwendungen. Wie schon in der Vorlesung selbst haben wir uns um Motivation der eingeführten mathematischen Begriffe und Methoden durch Problemstellungen der Physik bemüht.

Dementsprechend richtet sich dieses Buch an Studenten der Physik, die Interesse an einer genaueren mathematischen und begrifflichen Erfassung physikalischer Problemstellungen haben und an Studenten der Mathematik, die Physik als Quelle mathematischer Problemstellungen und als Anwendungsgebiet mathematischer Theorien kennenlernen möchten.

Es wird vorausgesetzt, daß der Leser etwa den Stoff eines dreisemestrigen Kurses "Differential- und Integralrechnung" und eines zweisemestrigen Kurses "Lineare Algebra" beherrscht. Auf dieser Basis beginnt unser Buch im ersten Teil mit einer Einführung in die Theorie der Distributionen, die auch einige Grundbegriffe der linearen Funktionalanalysis vermittelt. Der zweite Teil baut darauf auf und gibt eine auf das Wesentliche beschränkte Einführung in die Theorie der linearen Operatoren in Hilbert-Räumen. Beide Teile werden von je einer Übersicht begleitet, die die zentralen Ideen und Begriffe knapp erläutert und den inhaltlichen Kern dieses Teils beschreiben. Einige Anhänge stellen in elementarer Weise einige grundlegende Konstruktionen und Konzepte der Funktionalanalysis dar und entwickeln einige wichtige Konsequenzen.

Aus verschiedenen Gründen hat sich die Herstellung dieses Buches erheblich verzögert. In der ersten Phase hat Frau R. Pludra durch ihren Einsatz beim Schreiben des Manuskriptes wesentlich zum Herstellungsprozess beigetragen. Die Erstellung der TEX-Version des Manuskriptes in der zweiten Phase verdanken wir dem unermüdlichen Einsatz von Frau G. Eickmeyer und Frau H. Litschewsky. Allen gilt unser aufrichtiger Dank. Unsere Kollegen G. Bolz, Th. Ellerbrock, V. Enß, S. Golin, T. Gries, C. Hellmich, M. Lefeld, J. Loviscach, Ch. Menzel, C. Neumann, U. Oppitz, J. Potthoff, G. Sommer, O. Steinmann, L. Streit und J. Stubbe haben uns durch Kommentare, Verbesserungsvorschläge und Skriptkorrekturen direkt oder indirekt geholfen. Dafür möchten wir uns herzlichst bedanken.

Enger und Durban, 1993

Ph. Blanchard

E. Brüning

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungen

xi

Teil I: Einführung in die Distributionentheorie

Übersicht	1
0 Einleitung	2
1 Testfunktionenräume	10
2 Distributionen	27
3 Elementare Rechenoperationen für Distributionen	36
4 Darstellungssatz für Distributionen - Radon Maße	58
5 Tensorprodukt und Faltung	63
6 Anwendungen der Faltung	83
7 Holomorphe Funktionen	102
8 Fourier-Transformation	112

Teil II. Einführung in die Theorie der Hilbert-Räume

Übersicht	145
9 Einleitung	151
10 Prä-Hilbert-Raum und Hilbert-Raum	155
11 Geometrie eines Hilbert-Raumes	170
12 Separable Hilbert-Räume	181
13 Direkte Summen und Tensorprodukte von Hilbert-Räumen	194
14 Topologische Probleme in Hilbert-Räumen: Kompaktheit und schwache Topologie	199
15 Lineare Operatoren in Hilbert-Räumen	210
16 Quadratische Formen	228
17 Beschränkte lineare Operatoren in Hilbert-Räumen	237
18 Spezielle Klassen beschränkter linearer Operatoren	252
19 Operatoren der Quantenmechanik	271
20 Spektraltheorie für lineare Operatoren im Hilbert-Raum	279
21 Der Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren	290
22 Interpretation des Spektrums eines selbstadjungierten Operators	329

Anhänge

A1. Vervollständigung eines metrischen Raumes	349
A2. Metrisierbare HLKTVR's	352
A3. Der Satz von Baire. Bairesche Räume	354
A4. Anwendungen des Satzes von Baire	357
A5. Bilineare Funktionale	361
A6. Beweis von Satz 5.1 und Satz 5.2 a	363

Literatur	367
-----------	-----

Sachverzeichnis	369
-----------------	-----

Abkürzungen

$\mathbf{R}$	Körper der reellen Zahlen
$\mathbf{C}$	Körper der komplexen Zahlen
$\mathbf{K}$	Körper der reellen oder komplexen Zahlen
$\mathbf{K}^n$	$\mathbf{K}$ -Vektorraum der n -Tupel von Zahlen in $\mathbf{K}$
$\mathbf{R}_+$	$[0, \infty]$ nichtnegative reelle Zahlen
$A \pm B$	$\{a \pm b \mid a \in A, b \in B\}$ für Teilmengen A und B eines Vektorraumes V
ΛM	$\{\lambda \cdot u \mid \lambda \in \Lambda, u \in M\}$ für eine Teilmenge $\Lambda \subset \mathbf{K}$ und eine Teilmenge M eines Vektorraumes über $\mathbf{K}$.
$A \setminus B$	Differenzmenge = Menge aller Punkte in A , die nicht zu B gehören
$\mathcal{C}(\Omega) = C(\Omega; \mathbf{K})$	Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbf{K}$ für eine offene Menge $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$
$\text{supp } f$	Träger der Funktion f
$\mathcal{C}_o(\Omega)$	Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbf{K}$ mit kompaktem Träger $\text{supp } f \subset \Omega \subseteq \mathbf{R}^n$
$\mathcal{C}^k(\Omega)$	Vektorraum aller Funktionen, die stetige Ableitungen bis zur Ordnung $k = 0, 1, 2, \dots$ besitzen
$D^\alpha = \frac{\partial^{ \alpha }}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$	Ableitungsmonom der Ordnung $ \alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ auf $\mathcal{C}^k(\Omega)$, $ \alpha \leq k$, für $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ offen
$\mathcal{D}_K(\Omega)$	Vektorraum aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbf{K}$, deren Träger $\text{supp } f$ in der kompakten Teilmenge K von $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ enthalten ist; versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz für alle Ableitungen
$\mathcal{D}(\Omega)$	induktiver Limes der Räume $\mathcal{D}_K(\Omega)$, $K \subset \Omega$ kompakt; Testfunktionenraum aller $\mathcal{C}^\infty$ -Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbf{K}$ mit kompaktem Träger in der offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$
$\mathcal{S}(\Omega)$	Testfunktionenraum aller $\mathcal{C}^\infty$ -Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbf{K}$, die mit allen Ableitungen überpolynomial abfallen
$\mathcal{E}(\Omega)$	Testfunktionenraum aller $\mathcal{C}^\infty$ -Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbf{K}$
LKTVR	lokalkonvexer topologischer Vektorraum
HLKTVR	Hausdorffscher lokalkonvexer topologischer Vektorraum
X^*	algebraischer Dualraum eines Vektorraumes X

X'	topologischer Dualraum eines topologischen Vektorraumes X
$\mathcal{D}'(\Omega) \equiv \mathcal{D}(\Omega)'$	Raum aller Distributionen auf der offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$
$\mathcal{S}'(\Omega) \equiv \mathcal{S}(\Omega)'$	Raum aller temperierten (d.h. langsam wachsenden) Distributionen auf $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$
$\mathcal{E}'(\Omega) \equiv \mathcal{E}(\Omega)'$	Raum aller Distributionen auf $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$, die einen kompakten Träger in Ω haben
I_f	die von der lokalintegrierbaren Funktion f induzierte reguläre Distribution
$\mathcal{D}'_{reg}(\Omega)$	Raum der regulären Distribution auf der offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$
$\mathcal{D}'_+(\mathbf{R})$	Raum aller Distributionen auf $\mathbf{R}$ mit Träger in $\mathbf{R}_+$
$L^p(\Omega)$	Raum der Äquivalenzklassen von Lebesgue-meßbaren Funktionen f auf Ω , für die $ f ^p$ über Ω Lebesgue-integrierbar ist ($1 \leq p < \infty, \Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ Lebesgue-meßbar)
$L^\infty(\Omega)$	Raum der Äquivalenzklassen von Lebesgue-meßbaren Funktionen auf Ω , die wesentlich beschränkt sind ($\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ Lebesgue-meßbar)
$P_{K,m}(f)$	$\sup_{\substack{ \alpha \leq m \\ x \in K}} D^\alpha f(x) $ Halbnorm auf $\mathcal{D}_K(\Omega)$ $m = 0, 1, 2, \dots, K \subset \Omega$ kompakt $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ offen
$q_{K,m}(f)$	$\left\{ \sum_{ \alpha \leq m} \int D^\alpha f(x) ^2 dx \right\}^{1/2}$ Halbnorm auf $\mathcal{D}_K(\Omega)$
$p_{m,k}(f)$	$\sup_{\substack{x \in \mathbf{R}^n \\ \alpha \leq k}} (1 + x^2)^{\frac{m}{2}} D^\alpha f(x) $ Norm auf $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$
$B_{p,r}(x_o)$	offene Kugel vom Radius $r > 0$ und Mittelpunkt x_o bezüglich der Halbnorm p
δ	Diracs Delta Distribution in $x = 0$
Θ	Heaviside - Funktion
$vp \frac{1}{x}$	Cauchyscher Hauptwert
$\frac{1}{x \pm i0}$	$\lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{x \pm i\epsilon}$ in $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$
$\text{supp } T$	Träger der Distribution T
$\text{suppsing } T$	singulärer Träger der Distribution T
$f \otimes g$	Tensorprodukt der Funktionen f und g

$T \otimes S$	Tensorprodukt der Distributionen T und S
$\mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \otimes \mathcal{D}(\mathbf{R}^m)$	algebraisches Tensorprodukt der Testfunktionsräume $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ und $\mathcal{D}(\mathbf{R}^m)$
$\mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \otimes_{\pi} \mathcal{D}(\mathbf{R}^m)$	der Raum $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \otimes \mathcal{D}(\mathbf{R}^m)$ versehen mit der projektiven Tensorprodukttopologie
$\mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \tilde{\otimes}_{\pi} \mathcal{D}(\mathbf{R}^m)$	Vervollständigung des Raumes $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \otimes_{\pi} \mathcal{D}(\mathbf{R}^m)$
$u * v$	Faltung (Faltungsprodukt) der Funktionen u und v
$T * u$	Faltung der Distribution T auf Ω mit der Testfunktion $u \in \mathcal{D}(\Omega) = \text{Regularisierte von } T$
$T * S$	Faltung der Distributionen T und S , die die Trägerbedingung erfüllen
$\bar{\partial}$	der Differentialoperator $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ in $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$
$\mathcal{F}$	Fouriertransformation auf $L^1(\mathbf{R}^n)$ oder $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$
$\mathcal{F}'$	Fouriertransformation auf $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Skalarprodukt auf einem Vektorraum
$\ \cdot \ $	Norm auf einem Vektorraum
$l^2(\mathbf{K})$	Hilbert-Raum der quadratisch summierbaren Folgen von Elementen in $\mathbf{K}$
$M^{\perp}$	orthogonales Komplement einer Menge M in einem (Prä-) Hilbert-Raum
$\text{lin } M$	der kleinste Teilraum, der die Menge M enthält
$[M]$	der kleinste abgeschlossene Teilraum, der die Menge M enthält = Abschluß von $\text{lin } M$
$\dim V$	Dimension des Vektorraumes V
$D(A)$	Definitionsbereich des linearen Operators A
$\text{Ker } A$	Kern oder Nullmenge des linearen Operators A
$\text{Ran } A$	Wertebereich oder "Range" des linearen Operators A
$\Gamma(A)$	Graph des linearen Operators A
A^*	der zu einem dicht definierten linearen Operator A adjungierte Operator
A_F	Friedrichs-Erweiterung des dicht definierten positiven linearen Operators A
$A + B$	Formsumme der linearen Operatoren A und B

$\mathcal{L}(X, Y)$	Raum der stetigen linearen Operatoren $X \rightarrow Y$ (X, Y topologische Vektorräume über $\mathbf{K}$)
$\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$	Raum der beschränkten linearen Operatoren auf dem Hilbert Raum $\mathcal{H}$
$\mathcal{B}(\mathcal{H}, D)$	$\{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid \text{Ran } A \subseteq D\}$
$\hat{A} = (D, A)$	linearer Operator mit Definitionsbereich D und Abbildungsvorschrift A
$\mathcal{K}(\mathcal{H})$	Raum der kompakten Operatoren auf dem Hilbert-Raum $\mathcal{H}$
$\mathcal{P}(\mathcal{H})$	Raum der orthogonalen Projektionsoperatoren auf dem Hilbert-Raum $\mathcal{H}$
$\mathcal{S}(\mathcal{H})$	Raum der Spurklasse-Operatoren des Hilbert-Raumes $\mathcal{H}$
$\mathcal{U}(\mathcal{H})$	Raum der unitären Operatoren des Hilbert-Raumes $\mathcal{H}$
$\rho(A)$	Resolventenmenge des linearen Operators A
$R_A(z)$	Resolvente des linearen Operators A im Punkte $z \in \rho(A)$
$\sigma(A)$	Spektrum des linearen Operators $A = \mathbf{C} \setminus \rho(A)$
$\sigma_p(A)$	Punktspektrum von A
$\sigma_c(A)$	kontinuierliches Spektrum von $A = \sigma(A) \setminus \sigma_p(A)$
$\sigma_d(A)$	diskretes Spektrum von A
$\sigma_{ac}(A)$	absolut stetiges Spektrum von A
$\sigma_{sc}(A)$	singulär stetiges Spektrum von A
$\mathcal{H}_p(A)$	unstetiger Teilraum von A
$\mathcal{H}_c(A)$	stetiger Teilraum von A
$\mathcal{H}_{ac}(A)$	$\mathcal{H}_c(A) \cap \mathcal{H}_{sc}(A)^\perp$ absolut stetiger Teilraum des selbstadjungierten Operators A
$\mathcal{H}_{sc}(A)$	singulär stetiger Teilraum des selbstadjungierten Operators
$\mathcal{H}_s(A)$	$\mathcal{H}_p(A) \otimes \mathcal{H}_{sc}(A)$ singulärer Teilraum des selbstadjungierten Operators A
$\mathcal{M}_b(H)$	Unterraum der gebundenen Zustände des selbstadjungierten Schrödinger Operators H
$\mathcal{M}_\infty(H)$	Unterraum der Streuzustände von H
$Proj_M$	der orthogonale Projektor auf dem Unterraum M eines Hilbert-Raumes $\mathcal{H}$