

Vorlesungen über höhere Mathematik

Von

Dr. phil. Adalbert Duschek

o. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Wien

Zweiter Band

Unendliche Reihen. Integration und Differentiation der Funktionen von mehreren Veränderlichen. Abschluß der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Fehlertheorie und Ausgleichsrechnung. Lineare Algebra. Tensorfelder

Mit 125 Textabbildungen



Springer-Verlag Wien GmbH

ISBN 978-3-7091-3599-0

ISBN 978-3-7091-3598-3 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-7091-3598-3

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung
in fremde Sprachen, vorbehalten

Copyright 1950 by Springer-Verlag Wien

Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag in Vienna 1950

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1950

Vorwort.

*Alles Gescheite ist schon gedacht worden, man
muß nur versuchen, es noch einmal zu denken.
Goethe.*

Der zweite Band bringt mit der Differential- und Integralrechnung der Funktionen von mehreren Veränderlichen und mit den Fundamentalsätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung alles das zum Abschluß, was im ersten Band nur begonnen wurde. Darüber hinaus enthält er einige größere Abschnitte, die teils zur Abrundung des Stoffes, teils als Vorbereitung für die folgenden Bände hier nicht fehlen durften: Die Fehlertheorie und Ausgleichsrechnung, die lineare Algebra, d. h. die Determinanten, die linearen Gleichungen und die wichtigsten Sätze der Tensorrechnung sowie schließlich die Grundzüge der Theorie der Tensorfelder. Die beiden Bände gehören somit inhaltlich aufs engste zusammen und bilden ein einheitliches, für sich abgeschlossenes Ganzes.

Zu danken habe ich neben meiner Frau den Herren Dr. E. BUKOVICS, Dr. W. EBERL, Prof. Dr. R. INZINGER und Dr. L. PECZAR für ihre Mithilfe bei den Korrekturen und für viele wertvolle Anregungen.

Wien, im Herbst 1950.

A. Duschek.

Inhaltsverzeichnis.

I. Unendliche Reihen.

	Seite
§ 1. Konvergenz und Divergenz der Reihen	1
1. Grundbegriffe. 2. Eine notwendige Bedingung für die Konvergenz einer Reihe. 3. Das allgemeine Konvergenzprinzip von CAUCHY. 4. Absolute Konvergenz. 5. Das Konvergenzkriterium von LEIBNIZ für alternierende Reihen. 6. Bedingt konvergente Reihen. 7. Unendliche Reihen und uneigentliche Integrale.	
§ 2. Das Rechnen mit Reihen	9
1. Addition von Reihen. 2. Multiplikation der Reihenglieder mit einem festen Faktor. 3. Multiplikation von Reihen.	
§ 3. Konvergenzkriterien	12
1. Reihenvergleichung. 2. Das Quotientenkriterium. 3. Das Wurzelkriterium. 4. Die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{\alpha}}$ mit $\alpha > 0$.	
§ 4. Gleichmäßig konvergente Reihen	17
1. Reihen von Funktionen. Gleichmäßige Konvergenz. 2. Stetigkeit der Summenfunktion. 3. Integration unendlicher Reihen. 4. Differentiation unendlicher Reihen.	
§ 5. Potenzreihen	22
1. Der Fundamentalsatz über Potenzreihen. 2. Bestimmung des Konvergenzradius nach CAUCHY. 3. Eigenschaften der durch Potenzreihen dargestellten Funktionen. 4. Methode des unbestimmten Ansatzes.	
§ 6. Fouriersche Reihen	29
1. Periodische Funktionen und harmonische Analyse. 2. Trigonometrische Reihen. 3. Fouriersche Reihen. 4. Gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe einer stetigen und stückweise glatten Funktion. 5. Darstellbarkeit einer stetigen und stückweise glatten Funktion durch ihre Fourierreihe. 6. Fouriersche Reihen unstetiger Funktionen. 7. Ergänzende Bemerkungen, Beispiele. 8. Die Partialbruchzerlegung des Cotangens und die Produktentwicklung des Sinus. 9. Das Gibbssche Phänomen. 10. Trigonometrische Interpolation.	

II. Funktionen von mehreren Veränderlichen.

§ 7. Grundbegriffe	50
1. Punktmengen und Bereiche der Ebene und des Raums. 2. Funktionen von zwei und mehreren Veränderlichen. 3. Beispiele. 4. Zwei- und dreireihige Determinanten.	
§ 8. Grenzwert und Stetigkeit	62
1. Doppellimes einer Funktion von zwei Veränderlichen. 2. Die beiden doppelten Limes. 3. Stetigkeit.	
§ 9. Differentiation einer Funktion von mehreren Veränderlichen	67
1. Die partiellen Ableitungen. 2. Stetigkeit und Differenzierbarkeit. 3. Der Satz von SCHWARZ. 4. Totale Differentiale. 5. Zusammengesetzte Funktionen. 6. Implizite Funktionen. 7. Zwei Gleichungen zwischen vier Veränderlichen. 8. Die analytische Darstellung der Kurven und Flächen im Raum.	

	Seite
§ 10. Homogene Funktionen	82
<p>1. Begriff der Homogenität. 2. Die Eulersche Differentialgleichung der homogenen Funktionen. 3. Die Eulersche Differentialgleichung als notwendige und hinreichende Bedingung für die Homogenität. 4. Binäre quadratische Formen. 5. Die Hauptachsentransformation der Kegelschnitte.</p>	
§ 11. Die Taylorsche Formel	87
<p>1. Herleitung der Taylorschen Formel. 2. Der Mittelwertsatz. 3. Das Taylorpolynom P_1 und die Tangentenebene einer Fläche. 4. Verallgemeinerung des Newtonschen und des Iterationsverfahrens. 5. Das Taylorpolynom P_2. Die verschiedenen Arten der Punkte einer Fläche.</p>	
§ 12. Koordinatentransformation, Punkttransformation und Abbildung zweier Ebenen oder Räume	95
<p>1. Allgemeine krummlinige Koordinaten. 2. Koordinatentransformation und Punkttransformation. 3. Die Abbildung zweier Ebenen. 4. Geometrische Bedeutung der Funktionaldeterminante. 5. Abhängige Funktionen. 6. Die affine Abbildung. 7. Die projektive Abbildung. 8. Elliptische oder Lamésche Koordinaten. 9. Transformationsgruppen.</p>	
§ 13. Ebene Kurven	115
<p>1. Tangente, Normale und Berührungsgrößen. 2. Asymptoten. 3. Singuläre Punkte. 4. Berührung von Kurven. Wendepunkte, Krümmungskreis und Scheitel. 5. Die Krümmung einer Kurve. 6. Hüllkurven. 7. Evolute und Evolvente. 8. Spezielle Kurven. 9. Bemerkungen zur Kurvendiskussion.</p>	
§ 14. Extrema von Funktionen mehrerer Variabler	134
<p>1. Notwendige Bedingungen bei zwei unabhängigen Veränderlichen. 2. Hinreichende Bedingungen. 3. Funktionen von n unabhängigen Veränderlichen. 4. Extrema mit einer Nebenbedingung. 5. Extrema mit mehreren Nebenbedingungen.</p>	
§ 15. Grundbegriffe der Vektorrechnung	144
<p>1. Punkte, Strecken und Vektoren. 2. Addition und Subtraktion von Vektoren. Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl. 3. Länge eines Vektors. 4. Linear abhängige und linear unabhängige Vektoren. 5. Das innere oder skalare Produkt zweier Vektoren. 6. Normierte Dreibeine und Maßvektoren. 7. Das äußere oder vektorielle Produkt von zwei Vektoren. 8. Geometrische Anwendungen. 9. Vektoren als Funktionen eines Parameters. Tangentenvektor einer Raumkurve. 10. Tangentenebene und Normalenvektor einer Fläche. 11. Vektoren in einer Ebene.</p>	
III. Die Integration von Funktionen mehrerer Veränderlicher.	
§ 16. Integrale als Funktionen eines Parameters	171
<p>1. Durch bestimmte Integrale dargestellte Funktionen. 2. Integration unter dem Integralzeichen. 3. Differentiation unter dem Integralzeichen. 4. Durch uneigentliche Integrale dargestellte Funktionen. 5. Integration und Differentiation gleichmäßig konvergenter uneigentlicher Integrale. 6. Beispiele.</p>	
§ 17. Kurvenintegrale in der Ebene und lineare Differentialformen	182
<p>1. Der Begriff des Kurvenintegrals. 2. Die Integration totaler Differentiale. 3. Die Integrabilitätsbedingung der binären linearen Differentialformen. 4. Exakte Differentialgleichungen. 5. Theorie des Polarplanimeters.</p>	
§ 18. Mehrfache Integrale	196
<p>1. Der Begriff des Doppelintegrals. 2. Die Zerlegung des Bereichs \mathfrak{B} in Teilbereiche. 3. Die Integrierbarkeit der stetigen Funktionen. 4. Beispiele. 5. Sätze über Doppelintegrale. 6. Zurückführung eines Doppelintegrals auf zwei einfache Integrale. 7. Drei- und mehrfache Integrale. 8. Transformation mehrfacher Integrale. 9. Integrale unstetiger Funktionen. Uneigentliche Integrale erster Art. 10. Uneigentliche Integrale zweiter Art. 11. Der Integralsatz von GAUSS. 12. Die Greenschen Formeln. 13. Die Gebietsdifferentiation.</p>	
§ 19. Mehrfache Integrale in Geometrie und Mechanik	222
<p>1. Die Bogenlänge einer Raumkurve. 2. Der Inhalt krummer Flächen. 3. Statisches Moment und Schwerpunkt. 4. Trägheitsradius und Trägheitsmoment.</p>	

	Seite
IV. Die Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Fehlertheorie und Ausgleichsrechnung.	
§ 20. Vorbereitende Definitionen und Sätze	232
1. Die Gaußsche Verteilung. 2. Ein Satz von LAPLACE über den Grenzwert eines Produkts. 3. Die Laplacetransformierte einer arithmetischen Verteilung.	
§ 21. Die Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung	240
1. Das Bernoullische Theorem. 2. Beispiele. 3. Seltene Ereignisse. Die Formel von POISSON. 4. Das Poissonsche Theorem. 5. Das Bayessche Theorem.	
§ 22. Grundzüge der Fehlertheorie	253
1. Beobachtungsfehler. 2. Das Fehlergesetz. 3. Diskussion des Fehlergesetzes. 4. Die Bestimmung des Präzisionsmaßes. 5. Hinweise für die praktische Rechnung. 6. Beispiele.	
§ 23. Ausgleichsrechnung	263
1. Die Aufgabe der Ausgleichsrechnung und die Methode der kleinsten Quadrate. 2. Ausgleichung direkter Beobachtungen ungleicher Genauigkeit. 3. Das Gaußsche Eliminationsverfahren zur Auflösung linearer Gleichungen. 4. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen gleicher Genauigkeit. 5. Vermittelnde Beobachtungen ungleicher Genauigkeit. 6. Die Bestimmung der Gewichte und mittleren Fehler der unbekanntenen Größen. 7. Bedingte Beobachtungen.	
§ 24. Die Approximation gegebener Funktionen	276
1. Vorbemerkungen. 2. Approximation empirischer Funktionen. 3. Approximation in einem Intervall.	
V. Lineare Algebra.	
§ 25. Determinanten und Matrizen	281
1. Begriff der Matrix und Determinante. 2. Die wichtigsten Eigenschaften der Determinanten. 3. Der allgemeine Entwicklungssatz von LAPLACE. 4. Der Multiplikationssatz für Determinanten. 5. Entwicklung nach den Elementen einer Reihe. 6. Numerische Berechnung einer Determinante. 7. Der Rang einer Matrix. 8. Lineare Abhängigkeit.	
§ 26. Lineare Gleichungen	294
1. Inhomogene lineare Gleichungen. 2. Homogene lineare Gleichungen. 3. Eine andere Form der Existenzsätze.	
§ 27. Lineare Transformationen, Vektoren und Tensoren	301
1. Punkt- und Koordinatentransformation. 2. Die affine Geometrie im R_n . 3. Die euklidische Geometrie im R_n . 4. Vektoren im euklidischen R_n . 5. Tensoren im R_n . 6. Die Tensoroperationen. 7. Das äußere Produkt von Vektoren des R_3 .	
§ 28. Tensoren zweiter Stufe	319
1. Rang eines Tensors. 2. Der Vektor eines Tensors im R_3 . 3. Eigenrichtungen und Eigenwerte eines Tensors. 4. Symmetrische Tensoren. 5. Quadriken im R_n .	
VI. Tensoranalysis.	
§ 29. Der Begriff des Tensorfeldes und die Differentiation der Feldgrößen.....	328
1. Tensorfelder. 2. Die Differentiation der Feldgrößen. 3. Kombinierte Operationen. 4. Die geometrische Darstellung der Skalar- und Vektorfelder.	
§ 30. Die Integration der Feldgrößen.....	333
1. Kurvenintegrale. Das Potential. 2. Flächenintegrale. 3. Raumintegrale. 4. Der Gaußsche Integralsatz. 5. Die Integralsätze von GREEN. 6. Der Integralsatz von STOKES. 7. Das Vektorpotential.	
Anhang I. Tabelle der Gaußschen Transzendenten	351
Anhang II. Lösungen der Aufgaben	354
Namenverzeichnis	382
Sachverzeichnis	382