

HAUPTSÄTZE
DER
DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-RECHNUNG

HAUPTSÄTZE
DER
DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-
RECHNUNG

Als Leitfaden zum Gebrauch bei Vorlesungen

zusammengestellt von

DR. ROBERT FRICKE

GEH. HOFRAT UND PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU BRAUNSCHWEIG

Neunte Auflage

Mit 74 Figuren

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

1923

ISBN 978-3-663-19837-6 ISBN 978-3-663-20172-4 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-663-20172-4

Alle Rechte vorbehalten.

VORWORT.

Die vorliegende Neuauflage meiner „Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung“ ist ein unveränderter Abdruck der voraufgehenden Auflage. Die freundliche Aufnahme des Büchleins, die mir durch den raschen Absatz der früheren Auflagen bezeugt ist, gibt mir die Zuversicht, daß es in der bisherigen Gestalt ein nützliches Hilfsmittel für die studierende Jugend geworden ist. Indem die Darstellung bei allen grundlegenden Erklärungen an die geometrische Anschauung anknüpft und von dieser auch übrigens ausgiebigen Gebrauch macht, wendet sie sich vor allem an diejenigen Studierenden, welche die Mathematik in der Technik und in den Naturwissenschaften verwenden wollen. Der Studierende der Mathematik im engeren Sinne wird die vorliegende Darstellung der Differential- und Integralrechnung natürlich nur zu einer ersten Einführung benutzen können; für ihn ist späterhin eine arithmetische Begründung der Begriffe der Variablen, der Funktion, der Stetigkeit usw. unerlässlich.

Wenn ich das Buch auch ursprünglich nur als einen Vorlesungsleitfaden, und zwar insbesondere für die Studierenden an der hiesigen Hochschule herausgab, so hat es sich zu meiner Freude auch in weiteren Kreisen eingebürgert. Mag auch die neue Auflage neue Freunde gewinnen und seinen Lesern den Weg in die höhere Mathematik ebnen helfen.

Robert Fricke.

INHALTSVERZEICHNIS.

Einleitung.

	Seite
1. Veränderliche und unveränderliche Größen	1
2. Begriff der Funktionen und geometrische Deutung derselben	2
3. Umkehrung oder Inversion der Funktionen	3
4. Die rationalen und die irrationalen Funktionen	4
5. Eindeutigkeit und Mehrdeutigkeit der Funktionen	6
6. Exponentialfunktion und Logarithmus	6
7. Gradmaß und Bogenmaß der Winkel	7
8. Die trigonometrischen Funktionen	8
9. Die zyklometrischen Funktionen	9
10. Benennungen der Funktionen	10
11. Zusammengesetzte Funktionen	11
12. Der Begriff der Grenze	11
13. Stetigkeit einer Variablen und stetige Annäherung an eine Grenze	13
14. Einführung der Zahl e	13
15. Stetigkeit und Unstetigkeiten der Funktionen	15
16. Werte der Funktionen für $x = \infty$	16

Erster Abschnitt.

Grundlagen der Differentialrechnung.

Erstes Kapitel.

Erklärung und Berechnung des Differentialquotienten einer Funktion $f(x)$.

1. Der Differenzenquotient einer Funktion $f(x)$	17
2. Die abgeleitete Funktion $f'(x)$ von $f(x)$	18
3. Die Differentiale und der Differentialquotient	19
4. Unstetigkeiten der abgeleiteten Funktion	20
5. Differentiation einer Summe und eines Produktes mit einem konstanten Faktor	20
6. Differentiation der Potenz und der ganzen rationalen Funktion	20
7. Differentiation des Logarithmus. Der natürliche Logarithmus	21

	Seite
8. Differentiation der Exponentialfunktion	22
9. Differentiation der trigonometrischen Funktionen $\sin x$ und $\cos x$. .	23
10. Differentiation der zyklometrischen Funktionen $\arcsin x$ und $\arccos x$	24
11. Differentiation des Produktes und des Quotienten zweier Funktionen	24
12. Differentiation der rationalen Funktionen, speziell der Funktion x^{-n}	25
13. Differentiation der trigonometrischen Funktionen $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{ctg} x$. .	26
14. Differentiation der zyklometrischen Funktionen $\operatorname{arctg} x$ und $\operatorname{arcctg} x$	26
15. Differentiation zusammengesetzter Funktionen	26
16. Differentiation der Funktion $\sqrt[q]{x^p}$	27
17. Erklärung und Differentiation der hyperbolischen Funktionen . . .	28
18. Die logarithmische Differentiation	29

Zweites Kapitel.

Die Ableitungen und Differentiale höherer Ordnung einer Funktion $f(x)$.

1. Die Ableitungen höherer Ordnung einer Funktion $f(x)$	30
2. Die n^{te} Ableitung eines Produktes zweier Funktionen	31
3. Beweis des binomischen Lehrsatzes	32
4. Die Differenzenquotienten höherer Ordnung von $f(x)$	32
5. Die Grenzwerte der Differenzenquotienten	33
6. Die Differentiale und Differentialquotienten höherer Ordnung . . .	34
7. Die unendlich kleinen Größen höherer Ordnung	35
8. Vergleich unendlich kleiner Größen verschiedener Ordnungen . . .	35

Zweiter Abschnitt.

Anwendungen der Differentialrechnung.

Erstes Kapitel.

Bestimmung der Maxima und Minima einer Funktion $f(x)$.

1. Satz über das Vorzeichen der Ableitung $f'(x)$	37
2. Die Maxima und Minima einer Funktion $f(x)$	37
3. Gebrauch höherer Ableitungen zur Bestimmung der Maxima und Minima von $f(x)$	39

Zweites Kapitel.

Betrachtung des Verlaufes ebener Kurven.

1. Die Tangenten und Normalen einer ebenen Kurve	40
2. Tangenten, Normalen, Subtangenten und Subnormalen der Kurve K	41
3. Bogendifferential der Kurve K	42
4. Beispiele zur Berechnung der Tangenten, Normalen usw.	43
5. Konkavität und Konvexität der Kurven	45
6. Wende- oder Inflexionspunkte einer Kurve	45
7. Die Krümmungskreise einer Kurve	46
8. Berechnung des Krümmungszentrums und Krümmungsradius	47

	Seite
9. Die Evoluten und Evolventen	48
10. Gleichung der Evolute und Beispiele	50
11. Gebrauch der Polarkoordinaten	51
12. Erklärung von Polartangente, Polarnormale usw.	52

Drittes Kapitel.

Theorie der unendlichen Reihen.

1. Begriffe der Konvergenz und Divergenz einer Reihe	53
2. Lehrsätze über konvergente Reihen	54
3. Konvergenzkriterium für Reihen aus positiven Gliedern	56
4. Begriff der Potenzreihen	57
5. Mittelwertsatz	58
6. Der Taylorsche Lehrsatz für ganze rationale Funktionen	60
7. Der Taylorsche Lehrsatz für beliebige Funktionen	61
8. Der Mac Laurinsche Lehrsatz	62
9. Die Reihen von Taylor und Mac Laurin	63
10. Reihenentwicklung der Exponentialfunktion	64
11. Reihenentwickelungen der Funktionen $\sin x$ und $\cos x$	65
12. Reihenentwickelungen der Funktionen $\sin x$ und $\cos x$	65
13. Reihenentwicklung der Funktion $\ln(1+x)$	66
14. Formeln zur Berechnung der Logarithmen	67
15. Die Binomialreihe	68
16. Methode der unbestimmten Koeffizienten	70
17. Unbedingt und bedingt konvergente Reihen	71

Viertes Kapitel.

Bestimmung der unter den Gestalten $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, ... sich darbietenden Funktionswerte.

1. Die unbestimmte Gestalt $\frac{0}{0}$	73
2. Die unbestimmte Gestalt $\frac{\infty}{\infty}$	75
3. Berücksichtigung des Wertes $x = \infty$	76
4. Die unbestimmten Gestalten $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^{∞} , ∞^0 , 1^{∞}	77
5. Gebrauch der Potenzreihen. Unendlichwerden von e^x und $\log x$	78

Dritter Abschnitt.

Grundlagen und Anwendungen der Integralrechnung.

Erstes Kapitel.

Begriffe des unbestimmten und des bestimmten Integrals nebst geometrischen Anwendungen.

1. Begriff des unbestimmten Integrals	80
2. Unmittelbare Integration einiger Differentiale	81
3. Integration einer Summe und eines Produktes mit einem konstanten Faktor	82
4. Integration durch Substitution einer neuen Variablen	83

	Seite
5. Methode der partiellen Integration	84
6. Begriff des bestimmten Integrals	85
7. Zusammenhang zwischen den bestimmten und den unbestimmten Integralen	87
8. Integration bis $x = \infty$ oder bis zu einer Unstetigkeitsstelle von $\varphi(x)$	88
9. Lehrsätze über bestimmte Integrale	89
10. Quadratur ebener Kurven	90
11. Deutung der hyperbolischen und der trigonometrischen Funktionen	91
12. Rektifikation ebener Kurven	93
13. Gebrauch der Polarkoordinaten	94
14. Kubatur der Rotationskörper	95
15. Komplanation der Rotationsoberflächen.	96
16. Angenäherte Berechnung bestimmter Integrale	97

Zweites Kapitel.

Weiterführung der Theorie der unbestimmten Integrale.

1. Hilfssätze über algebraische Gleichungen	99
2. Partialbruchzerlegung der rationalen Funktionen	101
3. Berücksichtigung komplexer Wurzeln von $f(x) = 0$	102
4. Partialbruchzerlegung bei lauter einfachen Wurzeln von $f(x) = 0$	103
5. Integration rationaler Differentiale.	104
6. Integration von Differentialen mit der n^{ten} Wurzel aus einer linearen Funktion	106
7. Integration von Differentialen mit der Quadratwurzel aus einer ganzen Funktion 2^{ten} Grades	107
8. Normalformen für die Integrale mit $\sqrt{a + 2bx + cx^2}$	109
9. Partielle Integration bei Differentialen mit $\sqrt{1 \pm z^2}$	111
10. Fundamentalsatz über die Integrale algebraischer Differentiale . .	111
11. Partielle Integration bei transzendenten Differentialen	112
12. Entwicklung von π in ein unendliches Produkt	114
13. Integration durch unendliche Reihen	116

Vierter Abschnitt.

Funktionen mehrerer unabhängiger Variablen.

Erstes Kapitel.

Differentiation und Integration der Funktionen mehrerer
unabhängiger Variablen.

1. Die Funktionen zweier unabhängiger Variablen	118
2. Eindeutigkeit und Mehrdeutigkeit der Funktionen $f(x, y)$	119
3. Differentiation der Funktionen $z = f(x, y)$	120
4. Differentiation impliziter Funktionen einer Variablen	122
5. Verallgemeinerung auf Funktionen beliebig vieler Variablen . . .	122
6. Differentiation zusammengesetzter Funktionen	123
7. Die partiellen Ableitungen höherer Ordnung	124

	Seite
8. Die totalen Differentiale höherer Ordnung	125
9. Integration zweigliedriger totaler Differentialausdrücke	126
10. Differentiation und Integration eines bestimmten Integrals nach einem Parameter	128

Zweites Kapitel.

Der Taylorsche Lehrsatz und die Theorie der Maxima und Minima.

1. Der Taylorsche Lehrsatz für Funktionen mehrerer Variablen . .	131
2. Untersuchung einer Funktion $f(x, y)$ in der Umgebung einer Stelle (x, y)	139
3. Die Maxima und Minima einer Funktion $f(x, y)$	135
4. Geometrische Deutung der Maxima und Minima einer Funktion $f(x, y)$	137
5. Die Maxima und Minima einer Funktion von mehr als zwei Variablen	138
6. Maxima und Minima bei Angabe von Nebenbedingungen	140

Drittes Kapitel.

Geometrische Anwendungen der Funktionen mehrerer Variablen.

1. Die Tangenten und Normalen einer ebenen Kurve	142
2. Die Doppelpunkte ebener Kurven	143
3. Die Tangentialebenen und Normalen einer Fläche	145
4. Die Tangenten und Normalebenen einer Raumkurve	146
5. Die Schmiegungebenen einer Raumkurve	147
6. Kurvenscharen und deren einhüllende Kurven	149
7. Kubatur der Volumina	151
8. Kubatur des Ellipsoids	152
9. Komplanation der krummen Flächen	153
10. Komplanation der Kugelfläche	154
11. Gebrauch der Polarkoordinaten	154
12. Beispiel einer Kubatur mittels der Polarkoordinaten	155
13. Rektifikation der Raumkurven	156

Fünfter Abschnitt.

Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Bemerkungen über Differentialgleichungen.

1. Begriff der Differentialgleichungen	158
2. Einteilungen der Differentialgleichungen in Ordnungen und in Grade	159
3. Begriff der Lösungen von Differentialgleichungen	160
4. Geometrische Deutung von Differentialgleichungen	162
5. Existenzbeweis von Lösungen für Differentialgleichungen erster Ordnung	164

Zweites Kapitel.

Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei Variablen.

	Seite
1. Differentialgleichungen ohne y	167
2. Lösung von Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen	168
3. Lösung der Differentialgleichungen von der Gestalt $\frac{dy}{dx} = G\left(\frac{y}{x}\right)$.	169
4. Lösung der linearen Differentialgleichungen erster Ordnung	170
5. Der integrierende Faktor einer Differentialgleichung erster Ordnung	171
6. Partielle Differentialgleichung für den integrierenden Faktor . . .	173
7. Lösung der Differentialgleichung vermöge eines integrierenden Faktors	174
8. Von den singulären Lösungen der Differentialgleichungen erster Ordnung	175
9. Von den isogonalen Tajektorien einer Kurvenschar	178

Drittes Kapitel.

Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung mit zwei Variablen.

1. Lösung der Differentialgleichungen $y^{(n)} = G(x)$	179
2. Lösung der Differentialgleichungen $F(y', y'') = 0$	180
3. Lösung der Differentialgleichungen $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$	181
4. Lösung der Differentialgleichungen $F(y, y'') = 0$	182
5. Lösung der Differentialgleichungen $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$	184
6. Auf die erste Ordnung reduzierbare Differentialgleichungen zweiter Ordnung	184
7. Lineare homogene Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung	186
8. Lineare homogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	188
9. Lineare nichthomogene Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung . . .	190
10. Lösung der Differentialgleichungen durch unendliche Reihen . . .	192
11. Die hypergeometrische Reihe	192

A n h a n g .

Komplexe Zahlen und Funktionen komplexer Variablen.

1. Einführung der komplexen Zahlen	195
2. Rechnungsregeln für komplexe Zahlen	196
3. Geometrische Deutung der komplexen Zahlen	197
4. Geometrische Deutung der Addition komplexer Zahlen	198
5. Geometrische Deutung der Multiplikation komplexer Zahlen	199
6. Der Moivresche Lehrsatz	200
7. Radizierung komplexer Zahlen, Einheitswurzeln	200
8. Unendliche Reihen mit komplexen Gliedern	202
9. Funktionen einer komplexen Variablen	204

	Seite
10. Zusammenhang der Exponentialfunktion mit den Funktionen $\sin z$ und $\cos z$	205
11. Zusammenhang zwischen den trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen	206
12. Additionstheorem der Exponentialfunktion	207
13. Additionstheoreme der trigonometrischen und der hyperbolischen Funktionen	208
14. Periodizität der Funktionen e^z , $\sin z$, \dots , $\operatorname{Sh} z$, \dots	209
15. Die Funktion $\log z$ für komplexes Argument	210
16. Die zyklometrischen Funktionen mit komplexem Argument	210
17. Ableitungen und unbestimmte Integrale bei komplexen Funktionen	211
18. Bemerkung zur Integration rationaler Differentiale	213
19. Bemerkung über lineare homogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	214
20. Bestimmte Integrale zwischen komplexen Grenzen	215
Register	217
