

Die angegebenen als unverbindlich anzusehenden Preise sind Grundpreise. Die Ladenpreise ergeben sich für den allgemeinen Verlag aus halbiertem, für Schulbücher (mit * bezeichnet) aus vollem Grundpreis \times Sehl-Baselszahl des Börsenvereins (Juni 1923: 4200).

Wahrscheinlichkeitsrechnung u. ihre Anwend. auf Fehlerausgleichung Statistik und Lebensversicherung. Von Hofrat Dr. *E. Czuber*, Prof. an der Techn. Hochschule Wien. I. Bd.: Wahrscheinlichkeitstheorie, Fehlerausgleich., Kollektivmaßlehre. 4. Aufl. [In Vorb. 1923.] II. Bd.: Mathematische Statistik. Mathemat. Grundlagen der Lebensversicherung. 3., durchges. Aufl. Mit 34 Fig. [X u. 470 S.] gr. 8. 1921. (TmL 9, 1 u. 2.) M. 12.40, geb. M. 15.40

„Außer den rein theoretischen Grundlagen lehrt das Werk auch die Konstruktion und den Gebrauch statistischer Tafeln und enthält davon typische Beispiele in geeigneter Auswahl. Zahlreiche literarische Nachweise ermöglichen das ausgiebigste Studium der behandelten Materie, die auch vom sozialwissenschaftlichen Standpunkte alle Beachtung verdient.“

(Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.)

„Czuber ist es ganz besonders zu danken, daß er im Gegensatz zur allgemeinen Mode von jeher der Wahrscheinlichkeitsrechnung diesen Teil seiner Arbeit gewidmet hat. . . . Gegenüber den veröffentlichten Lehrbüchern der Wahrscheinlichkeitsrechnung bedeutet es einen wesentlichen Fortschritt in der gegenwärtigen Darstellung, daß auf einem verhältnismäßig beschränkten Raume die klassische Wahrscheinlichkeitsrechnung und die modernen Anwendungen gleichzeitig dargestellt werden.“ (Zeitschrift für Mathematik und Physik.)

„Das Buch kann auf dem Gebiete der Wahrscheinlichkeitstheorie als ein Standardwerk bezeichnet werden. Überall tritt uns in der Darstellung des Gebotenen Präzision, strenge und klare Beweisführung entgegen.“ (Zeitschrift f. d. Realschulwesen.)

Die philosophischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von Hofrat Dr. *E. Czuber*, Prof. an der Techn. Hochschule Wien. (Wiss. u. Hyp. Bd. 24.) [VIII u. 343 S.] 8. 1923. Geh. M. 20.—, geb. M. 21.20

Dieses neue Werk des durch seine Arbeiten auf dem einschlägigen Gebiete bekannten Verfassers ist aus der Erwägung hervorgegangen, daß die Behandlung der Wahrscheinlichkeitslehre die philosophische Forschung bisher nicht gebührend in Rechnung gezogen hat. Sie will aus den philosophischen Schriften über Wahrscheinlichkeit das gewinnen, was für die mathematische Behandlung des Gegenstandes wertvoll ist, dabei auch zu den von philosophischer Seite vertretenen Auffassungen Stellung nehmen, um so zu zeigen, wie beide Richtungen befruchtend aufeinander wirken können. Das Werk wird auch als Ergänzung zu der seit nunmehr 20 Jahren als Lehrbuch bewährten „Wahrscheinlichkeitsrechnung“ des gleichen Verfassers vielfach begrüßt werden.

Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von *O. Meißner*, wissensch. Hilfsarb. am Geodät. Inst. Potsdam. 2. Aufl. I. Grundlehren. Mit 3 Fig. [56 S.] 1919. II. Anwend. Mit 5 Fig. im Text. [IV u. 52 S.] 8. 1919. (MPH B 4 u. 33.) Steif je M. 1.40

Behandelt in leichtverständlicher Form im ersten Bändchen Umgrenzung und Grundlehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Gesetzmäßigkeiten, im zweiten Bändchen ihre Anwendung auf dem Gebiete der Ausgleichungsrechnung, Statistik, Kollektivmaßlehre, Physik und Astronomie. Zahlreiche Aufgaben mit Lösung und historische Bemerkungen ermöglichen ein tieferes Verständnis der Hauptprobleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte. Von Hofrat Dr. *E. Czuber*, Prof. an der Techn. Hochschule Wien. Mit 115 Textfig. [VI u. 244 S.] gr. 8. 1884. Geh. M. 6.80

Theorie der Beobachtungsfehler. Von Hofrat Dr. *E. Czuber*, Prof. an der Techn. Hochschule Wien. Mit 7 Textfig. [XII u. 418 S.] gr. 8. 1891. Geh. M. 8.—

Mathematische Bevölkerungstheorie. Von Hofrat Dr. *E. Czuber*, Prof. an der Techn. Hochschule Wien. [U. d. Pr. 1923.]

Das Buch stellt auf Grund des Materiales einer in den sämtlichen australischen Staaten nach einem einheitlichen Plane von einer Zentralstelle aus durchgeführten Volkszählung unter reichlicher Heranziehung anderweiter Ergebnisse eine Theorie des Bevölkerungswechsels, angewendet auf ein einheitliches statistisches Material, dar, wobei die sachliche Darlegung keineswegs zurücktritt. Mit Nachdruck wird die Aufmerksamkeit auf Fragen gelenkt, welche die Zukunft des Menschengeschlechts betreffen und vielleicht schon in naher Zeit auf die Tagesordnung der öffentlichen Erörterung gelangen werden.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Anfragen ist Rückporto beizufügen

**GRUNDLAGEN DER
WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG
UND DER THEORIE DER
BEOBACHTUNGSFEHLER**

VON

F. M. URBAN



SPRINGER FACHMEDIEN WIESBADEN GMBH 1923

ISBN 978-3-663-15382-5
DOI 10.1007/978-3-663-15953-7

ISBN 978-3-663-15953-7 (eBook)

**ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTES, VORBEHALTEN**

Vorrede.

Im Jahre 1907 erhielt ich von der University of Pennsylvania den Auftrag, eine zweistündige, ganzjährige Vorlesung über Statistik für Studenten der biologischen Wissenschaften auszuarbeiten. Dieser Kurs wurde in den folgenden Jahren bis zum Sommer 1914 gegeben, und aus meinen Aufzeichnungen entstand das vorliegende Buch. Die günstigen Arbeitsverhältnisse ließen in mir den Wunsch entstehen, das gesamte Anwendungsgebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Darstellung zu bringen. Der Krieg unterbrach meine Arbeiten, und es wurde mir bald klar, daß dieser Plan unter den gegenwärtigen Verhältnissen für mich unausführbar ist.

Wegen des Interesses, das meinen Arbeiten von verschiedener Seite entgegengebracht wurde, entschloß ich mich, wenigstens jenen Teil zu veröffentlichen, auf welchem meine Studien mehr oder weniger zum Abschluß gekommen sind. Es ist dies das Gebiet der Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Theorie der Beobachtungsfehler. Ich hoffe, daß hieraus meine Gedanken mit hinreichender Klarheit erkannt werden können. Hierdurch entfallen viele interessante Probleme, allein nur diese Beschränkung ließ die Fertigstellung der Arbeit in absehbarer Zeit erhoffen. In manchen Fällen war der Verzicht sehr schwer. Eine Darstellung der mathematischen Statistik ist heute nicht vollständig, falls die biometrischen Untersuchungen Karl Pearsons und seiner Schüler fehlen. Es ist als sicher anzunehmen, daß die bedeutungsvollsten Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung in Zukunft auf dem Gebiete der Biologie zu finden sein werden.

Die physikalischen Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung sowie die analytische Darstellung statistischer Regelmäßigkeiten konnten nur vorübergehend gelegentlich gestreift werden. Die interessanten Probleme der Interpolation, die teilweise unter dem Namen der Kollektivmaßlehre abgehandelt zu werden pflegen, bilden einen umfangreichen Komplex, dessen Bearbeitung viel Zeit und Mühe erfordert. Da keine Möglichkeit bestand, diese Gegenstände auch nur einigermaßen erschöpfend zu behandeln, so verzichtete ich auch auf die Darstellung meiner eigenen einschlägigen Veröffentlichungen.

Durch diese Beschränkungen verlor das Buch zum großen Teil den Charakter eines Lehrbuches. Besonderen Wert legte ich auf die Darstellung des Zusammenhanges der Vorstellungen der Wahrscheinlich-

keitsrechnung mit jenen der übrigen Naturwissenschaften, und allgemeine Betrachtungen nehmen in diesem Buche einen verhältnismäßig breiten Raum ein. Vielleicht kann es als Beleg für die Berechtigung der hier vorgetragenen Anschauungen gelten, daß ich mich in einer sehr weitgehenden Übereinstimmung mit Herrn J. M. Keynes befinde. Nur hinsichtlich der Theorie der Beobachtungsfehler kann ich die Anschauungen des scharfsinnigen Verfassers des „Treatise on Probabilities“ nicht teilen.

Die Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung werden durch rein logische Schlüsse aus den Begriffen der Mengenlehre gewonnen. Hieraus folgt, daß die allgemeinen Voraussetzungen der Mathematik für die Ableitung dieser Sätze hinreichend sind, und daß die Wahrscheinlichkeitsrechnung keine neuen Begriffe einführt. Eine solche rein logische Fassung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes bietet die einzige Möglichkeit, einen unauflösbaren Widerspruch mit unseren allgemeinen Vorstellungen über das Naturgeschehen zu vermeiden. Von einer axiomatischen Darstellung, wie sie Herr Keynes gab, konnte abgesehen werden, da die Voraussetzungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit jenen der Algebra identisch sind, für welche die Aufgabe der axiomatischen Darstellung gelöst ist.

Es ist eine Konsequenz des rein logischen Aufbaues der Wahrscheinlichkeitsrechnung, daß die Methode der kleinsten Quadrate im Zusammenhange mit dem Bernoullischen Satze abgeleitet wird. Die Verteilungsfunktion der Fehler ist in diesem Falle bekannt und aus allgemeinen Voraussetzungen a priori abgeleitet. Die Theorie der Beobachtungsfehler übernimmt diesen Algorithmus und hat zu untersuchen, unter welchen Bedingungen die Voraussetzungen für die Ausgleichung von Beobachtungsdaten nach diesem Rechenverfahren gegeben sind. Die historische Entwicklung hat es mit sich gebracht, daß die Methode der kleinsten Quadrate meist als mit der Theorie der Beobachtungsfehler identisch angesehen wird. Tatsächlich aber können sämtliche Aufgaben der Methode der kleinsten Quadrate aus den Begriffen der Wahrscheinlichkeitsrechnung gestellt und gelöst werden. Zur Anwendung dieses Rechenverfahrens auf Beobachtungsdaten ist aber ein Element der Erfahrung notwendig, durch dessen Vorhandensein die Theorie der Beobachtungsfehler sich von der abstrakten Wahrscheinlichkeitsrechnung unterscheidet.

Die Bearbeitung der Literatur, die durch die Arbeiten Todhunders und Czubers in ausgezeichneter Weise erschlossen ist, wurde durch das Entgegenkommen der Universitätsbehörden zu einer angenehmen Aufgabe. Ich hoffe, daß keine der wichtigeren, vor dem Jahre 1914 erschienenen Veröffentlichungen mir entgangen ist. Da das Buch nicht beabsichtigt, historischen Zwecken zu dienen, so sind Zitationen möglichst vermieden. Der naheliegenden Versuchung, bibliographische Seltenheiten zu zitieren, glaubte ich widerstehen zu müssen. Die Zi-

tationen sind mit möglichster Sorgfalt gesammelt. Da diese Sammelarbeit sich aber über eine Reihe von Jahren erstreckte, und es mir unter meinen jetzigen Lebensumständen nicht möglich ist, die Angaben des Manuskriptes, wie es Vorschrift ist, durch direkten Vergleich mit den angezogenen Stellen zu kontrollieren, so kann ich die Verantwortung für die unbedingte Richtigkeit der Literaturnachweise nicht übernehmen.

Der erste Entwurf dieses Buches war englisch geschrieben und wäre mir eine Veröffentlichung in Amerika, wo ich diese Gedanken auszuarbeiten Gelegenheit hatte, erwünscht gewesen, allein dies hätte die an und für sich großen Schwierigkeiten der Veröffentlichung ins Ungemessene gesteigert. Der University of Pennsylvania habe ich dafür zu danken, daß sie mich durch Verleihung des Harrison Fellowship for Research und durch sonstiges Entgegenkommen in die Lage setzte, mich dieser Arbeit zu widmen. Während meines Aufenthaltes in Stockholm erfreute ich mich eines besonderen Entgegenkommens von seiten der Kungliga Vetenskapliga Akademien bei der Benützung der Bibliothek in Freskati, wofür ich ihr an dieser Stelle gerne meinen gebührenden Dank sage.

Brünn, am 4. November 1922.

Friedrich M. Urban.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
I. Vom Zufalle	1
II. Die Lehren vom Zufalle	14
III. Die Wahrscheinlichkeit	55
IV. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung	151
1. Definition und Allgemeines	151
2. Das Additionstheorem	152
3. Das Multiplikationstheorem	156
4. Ausdehnung auf unendliche Mengen	158
5. Die Voraussetzung gleicher Möglichkeit der Fälle	166
a) Das Mischen beim Kartenspiele	166
b) Das Stoßspiel	171
c) Die Verteilung der Ziffern in den Logarithmen	175
d) Wahrscheinlichkeiten bei Kettenbruchentwicklungen	178
6. Wahrscheinlichkeiten von Wiederholungen	187
7. Begriff der Präzision	197
8. Der Bernoullische Satz und die Erfahrung	199
9. Wahrscheinlichster Wert und Präzision einer Summe	203
10. Mathematische Erwartung	206
11. Wahrscheinlichkeiten a posteriori	214
12. Der Satz von Bayes	215
13. Der Satz von Bayes für unendliche Mengen von Ursachen und die wahr- scheinlichste Annahme	219
14. Die Methode der kleinsten Quadrate	223
V. Die Grundlagen der Theorie der Beobachtungsfehler	239
1. Zweck der Ausgleichung	239
2. Die psychometrischen Funktionen	250
3. Die Methode der ebenmerklichen Unterschiede	265
4. Begriff der Präzision von Beobachtungen	269