

LEHRBUCH DER FUNKTIONENTHEORIE

VON

DR. LUDWIG BIEBERBACH

O. Ö. PROF. AN DER FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT
IN BERLIN

BAND I ELEMENTE DER FUNKTIONENTHEORIE

MIT 80 FIGUREN IM TEXT



SPRINGER FACHMEDIEN WIESBADEN GMBH 1921

ISBN 978-3-663-15317-7 ISBN 978-3-663-15885-1 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-663-15885-1

SCHUTZFORMEL FÜR DIE VEREINIGTEN STAATEN VON AMERIKA
COPYRIGHT 1921 BY SPRINGER FACHMEDIEN WIESBADEN
URSPRÜNGLICH ERSCHIENEN BEI B.G. TEUBNER LEIPZIG

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN

Vorwort.

Noch ein Lehrbuch der Funktionentheorie, wird mancher rufen, wenn dies Buch ihm in die Hände kommt. Endlich ein Lehrbuch der Funktionentheorie hoffte ich zu schreiben. Diese Sätze erscheinen anmaßend. Drum muß ich sie erläutern. Sie stehen und fallen mit der Auffassung des Begriffs „Lehrbuch“. Was ist ein Lehrbuch? Es soll, so meine ich, eine vollständige, faßliche und einheitliche Darstellung eines Wissensgebietes geben. Diese drei Eigenschaften „vollständig, faßlich, einheitlich“ bedürfen aber noch der näheren Bestimmung. Vollständig soll ja auch ein Handbuch sein. Aber in anderem Sinne. Das Handbuch soll über jede Einzelheit Auskunft geben. Das Lehrbuch will den Leser instandsetzen, jede ihm außerhalb des Buches selbst begehrende Einzelheit in ihrer Bedeutung für das Ganze zu würdigen. Es soll ihn daher vollständig über die wesentlichen Züge der Theorie aufklären und sie ihm verstehen lehren. In diesem Sinne soll es nach Ergebnissen und Methoden vollständig sein. Dabei soll es faßlich sein, also möglichst wenig Vorkenntnisse voraussetzen. Darunter verstehe ich sowohl spezifische Kenntnisse an Sätzen und Methoden als auch allgemeine Geisteseinstellung, oder Übung im mathematisch-wissenschaftlichen Denken. Vielmehr sehe ich die Aufgabe eines Lehrbuches darin, auch in dieser allgemeinen Weise über den speziellen Stoff hinaus den Leser zu bilden. Wissenschaftlich denken lernt man erst durch Beschäftigung mit der Wissenschaft. Endlich war Einheitlichkeit der Darstellung verlangt. Widerspricht diese Forderung aber nicht gerade in der Funktionentheorie der Vollständigkeit? Wer einmal von dem alten Schlachtruf: Hie Riemann, hie Weißerstraß und gar hie Cauchy gehört hat, wird da seine Zweifel haben. Aber in der Wissenschaft hat man in dem Ausgleich der Gegensätze einen Fortschritt zu erblicken. Und mitten in einer solchen Periode des Fortschrittes stehen wir eben. So will denn auch dies Buch an seinem Teil zum Ausgleich der Gegensätze, zur Vereinheitlichung der Funktionentheorie beitragen. Der erste Band behandelt die Elemente der Theorie, d. h. die allgemeinen Begriffsbildungen und die einfachen Sätze aus der Funktionentheorie, die bei dem heutigen Stand dieser Wissenschaft

allenthalben auf Schritt und Tritt gebraucht werden. Der zweite Band, welcher in Bände folgen soll, will aufweisen, wieviel herrliche Wohnungen das hier in diesem ersten Band im Grundriß vorgeführte Gebäude in sich zu bergen vermag. Es wäre peinlich für mich, näher als es hier geschehen ist, die in den Eingangssätzen enthaltene Hoffnung rechtfertigen zu müssen. Ich glaube aber, daß der sachkundige Leser mich von dieser Aufgabe entbinden wird, ohne mich der mangelnden Objektivität und Anmaßung zu zeihen. Ob ich allerdings selbst das Ziel, dem ich nachstrebte, erreicht habe, muß ich billigerweise dem Urteil des geneigten Lesers überlassen. Doch darf ich hoffen, daß redliches Bemühen nicht ganz erfolglos gewesen ist. Der Leserkreis, an den ich mich wende, und den ich durch dies Buch fördern möchte, ist derselbe, vor dem ich schon so oft über dies schöne Gebiet vorgetragen habe: der deutsche Student vom dritten Semester an. Ich setze also lediglich die Elemente der analytischen Geometrie voraus in dem Ausmaß, in dem sie die Schule vermittelt, und einige Kenntnisse aus der Differential- und Integralrechnung. Dabei ist aber nicht einmal so viel nötig, als mein wohl heute schon ziemlich bekannter Leitfaden bietet. Was Geisteseinstellung anlangt, so nehme ich nur an, daß der Leser sich mit williger Freude an das Buch heranmache, und hoffe, daß ihm diese im Laufe der Arbeit nicht abhanden kommt, sondern daß sie wächst und zunimmt.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung	1
Erster Abschnitt. Komplexe Zahlen	4
§ 1. Arithmetische Theorie der komplexen Zahlen	4
§ 2. Geometrische Deutung der komplexen Zahlen	9
Zweiter Abschnitt. Grenzwerte und Reihen	13
§ 1. Einige Grundbegriffe	13
§ 2. Grenzwerte und Reihen	15
Dritter Abschnitt. Funktionen einer komplexen Veränderlichen	21
§ 1. Der Bereichsbegriff	21
§ 2. Stetige Funktionen	22
§ 3. Reihen von Funktionen	24
§ 4. Differenzierbare Funktionen	32
§ 5. Konforme Abbildung	40
Vierter Abschnitt. Studium einiger spezieller Funktionen	45
§ 1. Ganze lineare Funktionen	45
§ 2. $w = \frac{1}{z}$	46
§ 3. Die allgemeine lineare Funktion	53
§ 4. Potenzen und Wurzeln	63
§ 5. Der Begriff des funktionentheoretischen Bereiches	63
§ 6. Nähere Betrachtung der durch $w = z^2$ vermittelten Abbildung	71
§ 7. Exponentialfunktion und Logarithmus	73
§ 8. Hilfssätze über Bereiche und Kontinua	82
§ 9. Nochmals der Logarithmus und seine Abbildung	90
§ 10. Der Tangens	91
§ 11. $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$	94
§ 12. Die trigonometrischen Funktionen	98
Fünfter Abschnitt. Integralrechnung im komplexen Gebiet	100
§ 1. Unbestimmte Integrale	100
§ 2. Rektifizierbare Kurven	101
§ 3. Kurvenintegrale	104
§ 4. Die Substitutionsmethode bei Kurvenintegralen	108
§ 5. Der Weierstraßsche Mittelwertsatz	113
§ 6. Der Hauptsatz der Funktionentheorie	113
§ 7. Anwendung des Hauptsatzes auf die Berechnung bestimmter Integrale	121
Sechster Abschnitt. Die Cauchysche Integralformel	123
§ 1. Ein Spezialfall der Integralformel	123
§ 2. Der allgemeine Fall der Integralformel	127
§ 3. Verallgemeinerung der Cauchyschen Integralformel	128
§ 4. Bemerkungen zur Integralformel	131
§ 5. Umkehrung des Hauptsatzes	133
§ 6. Eine Anwendung der Integralformel	133
§ 7. Die Entwickelbarkeit der analytischen Funktionen in Potenzreihen	135
§ 8. Laurentsche Reihen	139
§ 9. Der Cauchysche Koeffizientensatz	142
§ 10. Isolierte Singularitäten eindeutiger analytischer Funktionen	145
§ 11. Der Weierstraßsche Doppelreihensatz	153
§ 12. Technik der Potenzreihenentwicklung	156
§ 13. Der Vitalische Doppelreihensatz	165

	Seite
Siebenter Abschnitt. Das Residuum	171
§ 1. Funktionen mit isolierten Singularitäten	171
§ 2. Einige Anwendungen der Residuen	174
§ 3. Partialbruchreihen	177
§ 4. Das logarithmische Residuum	183
§ 5. Der Satz von der Gebietstreue	187
§ 6. Die Umkehrfunktion	190
§ 7. Implizite Funktionen	192
Achter Abschnitt. Analytische Fortsetzung	199
§ 1. Begriff der analytischen Fortsetzung	199
§ 2. Die Permanenz der Funktionalgleichungen	204
§ 3. Riemannsche Felder	207
§ 4. Singuläre Stellen	209
§ 5. Die Singularitäten der eindeutigen analytischen Funktionen	213
§ 6. Die Singularitäten der mehrdeutigen analytischen Funktionen	215
§ 7. Der Monodromiesatz	217
§ 8. Das Spiegelungsprinzip	219
Neunter Abschnitt. Einiges über algebraische Funktionen	222
§ 1. Allgemeine Sätze	222
§ 2. Die Gleichung $z = w^3 + 3w^2 + 6w + 1$	227
§ 3. Beliebige rationale Funktionen	230
§ 4. Die Gleichung $w^2 = a_0 z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4$	231
Zehnter Abschnitt. Einiges über Integrale algebraischer Funktionen	234
§ 1. Die Integrale rationaler Funktionen	234
§ 2. Quadratwurzeln aus Polynomen zweiten Grades	234
§ 3. Elliptische Integrale erster Gattung	238
§ 4. Über die Perioden eindeutiger analytischer Funktionen	240
§ 5. Nähere Untersuchung der elliptischen Integrale erster Gattung	246
§ 6. Die Probleme der Uniformisierung	251
Elfter Abschnitt. Abriß einer Theorie der elliptischen Funktionen	256
§ 1. Allgemeine Sätze über doppelperiodische Funktionen	256
§ 2. Analytische Darstellung der doppelperiodischen Funktionen	260
§ 3. Das Umkehrproblem	263
§ 4. Die ζ -Funktion und das Normalintegral zweiter Gattung	268
§ 5. Darstellung der doppelperiodischen Funktionen durch $p(u)$ und $p'(u)$	270
§ 6. Das Additionstheorem der elliptischen Funktionen	273
§ 7. Die elliptischen Integrale	276
§ 8. Die σ -Funktion	277
Zwölfter Abschnitt. Einfachperiodische Funktionen	279
§ 1. Allgemeine Sätze	279
§ 2. Analytische Darstellung der periodischen Funktionen	281
Dreizehnter Abschnitt. Allgemeine Sätze über die Darstellung der analytischen Funktionen durch Reihen und Produkte	284
§ 1. Die Partialbruchdarstellung der meromorphen Funktionen	284
§ 2. Der Mittag-Lefflersche Satz	286
§ 3. Die Produktdarstellung der ganzen transzendenten Funktionen	287
§ 4. Einige Anwendungen	290
§ 5. Der Satz von Runge	292
Vierzehnter Abschnitt. Die Gammafunktion	297
§ 1. Die Eulersche Summenformel	297
§ 2. Definition der Gammafunktion	303
§ 3. Haupteigenschaften der Funktion $\Gamma(z)$	305
§ 4. Die Stirlingsche Formel	306
§ 5. Darstellung der Gammafunktion durch ein bestimmtes Integral	308
§ 6. Integraldarstellung der Funktion $\frac{1}{\Gamma(z)}$	310
Register	313