

**Franz Josef Fay**

**Oberstudienrat am Ruhr-Kolleg, Essen  
Dozent für Wirtschaftsmathematik an der HWF, Bochum**

**Lineare Algebra**  
und  
**lineare Optimierung**

**Mathematische Grundlagen und Beispiele zur**  
**linearen Programmierung**

von

**Franz Josef Fay**

**Oberstudienrat am Ruhr-Kolleg, Essen**

**Dozent für Wirtschaftsmathematik an der HWF, Bochum**



---

**Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH**

ISBN 978-3-663-12591-4      ISBN 978-3-663-13201-1 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-663-13201-1

*Verlags-Nr. 953*

---

Copyright by Springer Fachmedien Wiesbaden 1968  
Ursprünglich erschienen bei Betriebswirtschaftlicher Verlag Dr. Th. Gabler GmbH, Wiesbaden 1968.

## Vorwort

Bei der Behandlung linearer Optimierungsprobleme werden mathematische Kenntnisse benötigt, über die mancher Leser noch von seiner Schulzeit her verfügen wird. Er kann dann der Lösung der gestellten Probleme im nachfolgenden Abschnitt der Linearplanung wohl ohne größere Schwierigkeiten folgen. Den weitaus meisten Lesern wird aber die dort verwendete Symbolik der Mengenlehre noch nicht geläufig sein. Deshalb wird im ersten Kapitel eine Einführung in die Mengenlehre gegeben. Sie wird nur so weit getrieben, als Sprache und Symbolik der Mengenlehre in den späteren Ausführungen der Linearplanung Verwendung finden. Es muß insbesondere der Begriff der Erfüllungsmenge von Gleichungs- und Ungleichungssystemen verständlich werden.

Viele Benutzer dieses Buches werden dankbar sein, wenn in einem zweiten Kapitel diejenigen Grundbegriffe aus der Gleichungs- und Ungleichungslehre und aus der Funktionentheorie aufgefrischt und zusammenfassend dargestellt werden, die in den Rechnungen und Zeichnungen der Linearplanung auftreten.

Die Behandlung von linearen Gleichungssystemen gibt Veranlassung, dem Leser eine Einführung in die Determinantenlehre anzubieten. Da Determinanten und Matrizen in der Wirtschaftstheorie immer häufiger benutzt werden, dürfte auch dieses Kapitel vielen Benutzern des Buches willkommen sein. Die Beherrschung des Rechnens mit Determinanten ist aber nicht Voraussetzung für das Verständnis der nachfolgenden Ausführungen über Linearplanung.

F. J. Fay

# Inhaltsverzeichnis

<b>A. Lineare Algebra</b> . . . . .	5
I. Grundbegriffe der Mengenlehre zur Behandlung von Gleichungs- und Ungleichungssystemen . . . . .	5
1. Definition des Mengenbegriffs . . . . .	5
a) Der Mengenbegriff von Cantor . . . . .	5
b) Beispiele für Mengen . . . . .	6
2. Operationen mit Mengen . . . . .	7
a) Der Durchschnitt von Mengen . . . . .	7
b) Die Vereinigung von Mengen . . . . .	7
3. Erfüllungsmengen von Gleichungen und Ungleichungen . . . . .	8
a) Regeln für das Umformen von Gleichungen und Ungleichungen . . . . .	8
b) Erfüllungsmengen von Gleichungen . . . . .	11
c) Erfüllungsmengen von Ungleichungen und ihre graphische Darstellung . . . . .	12
4. Die Erfüllungsmenge von Gleichungs- und Ungleichungssystemen als Durchschnitt der Erfüllungsmengen der einzelnen Gleichungen und Ungleichungen . . . . .	15
a) Systeme von linearen Gleichungen mit zwei Variablen . . . . .	15
b) Systeme linearer Ungleichungen mit zwei Variablen und ihre graphische Darstellung . . . . .	17
c) Übungsbeispiele . . . . .	18
II. Die Lösung von Gleichungen und Gleichungssystemen . . . . .	19
1. Rechnerische Lösung von linearen, quadratischen und kubischen Bestimmungsgleichungen mit einer Unbekannten . . . . .	19
a) Die lineare Gleichung . . . . .	19
b) Die quadratische Gleichung . . . . .	19
c) Die kubische Gleichung . . . . .	20
2. Graphische Lösung von Gleichungen mit Hilfe von Funktionen und Kurven . . . . .	21
3. Die Gleichung und die Steigung der Geraden . . . . .	22
4. Methoden zur Lösung von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten . . . . .	25
5. Lineare Gleichungssysteme mit drei und mehr Unbekannten . . . . .	26
III. Einführung in die Determinantenrechnung . . . . .	28
1. Schreibweise für lineare Gleichungssysteme mit n Unbekannten . . . . .	28
2. Eine Gleichung mit einer Unbekannten . . . . .	29
3. Die Auflösung von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten und die Definition der Determinanten zweiter Ordnung . . . . .	29

4.	Die Determinante dritter Ordnung bei drei Gleichungen mit drei Unbekannten und die Sarrussche Regel . . . . .	33
5.	Die Determinante n. Ordnung und die Cramersche Regel . . . . .	35
6.	Sätze über Determinanten . . . . .	36
	a) Spiegelung an der Hauptdiagonalen . . . . .	36
	b) Multiplikation mit einer Konstanten . . . . .	37
	c) Addition des Vielfachen einer Reihe zu einer anderen Reihe . . . . .	37
7.	Bestimmung des Wertes von Determinanten beliebiger Ordnung mit Hilfe der Adjunkten . . . . .	39
8.	Übungsbeispiele für dreireihige Determinanten . . . . .	41
9.	Beispiel für eine Determinante 4. Ordnung . . . . .	42
<b>B.</b>	<b>Lineare Programmierung . . . . .</b>	<b>44</b>
I.	Einführungsbeispiel aus der Landwirtschaft . . . . .	44
1.	Aufstellung des Ungleichungssystems und seine geometrische Veranschaulichung . . . . .	44
2.	Die Geradenschar der Zielfunktion . . . . .	46
3.	Geometrische und rechnerische Bestimmung der optimalen Lösungen . . . . .	46
II.	Ein Transportproblem . . . . .	48
1.	Ermittlung der Zielfunktion . . . . .	48
2.	Bestimmung des Kostenminimums . . . . .	49
3.	Bestimmung eines Gewinnmaximums . . . . .	50
III.	Ein Beispiel aus einem Produktionsprozeß . . . . .	51
IV.	Beispiel mit 3 Variablen, zurückführbar auf 2 Variable . . . . .	54
V.	Mathematisches Zahlenbeispiel . . . . .	57
VI.	Der Hauptsatz der Linearplanung . . . . .	58
1.	Die konvexe Punktmenge und das konvexe Polygon als Bild eines linearen Ungleichungssystems . . . . .	58
2.	Der Hauptsatz und sein Beweis . . . . .	59
VII.	Herleitung eines Rechenverfahrens ohne geometrische Veranschaulichung . . . . .	61
1.	Zeichnerischer Weg . . . . .	62
2.	Entwicklung des Rechenverfahrens aus den Erkenntnissen des zeichnerischen Vorgehens . . . . .	63
3.	Rechnerischer Weg . . . . .	64
VIII.	Linearplanung mit drei Variablen . . . . .	65
1.	Die Möglichkeit der geometrischen Veranschaulichung im Raum . . . . .	65
2.	Lösung eines Beispiels auf rechnerischem Weg . . . . .	66
3.	Geometrische Interpretation . . . . .	67
IX.	Ausblick auf ein Simplexverfahren zur Lösung von Problemen mit n Variablen . . . . .	69