

mathematik-abc für das Lehramt

K. P. Müller

Raumgeometrie

mathematik-abc für das Lehramt

Herausgegeben von

Prof. Dr. Stefan Deschauer, Dresden

Prof. Dr. Klaus Menzel, Schwäbisch Gmünd

Prof. Dr. Kurt Peter Müller, Karlsruhe

Die Mathematik-**ABC**-Reihe besteht aus thematisch in sich abgeschlossenen Einzelbänden zu den drei Schwerpunkten:

Algebra und Analysis,
Bilder und Geometrie,
Computer und Anwendungen.

In diesen drei Bereichen werden Standardthemen der mathematischen Grundbildung gut verständlich behandelt, wobei Zielsetzung, Methoden und Schulbezug des behandelten Themas im Vordergrund der Darstellung stehen.

Die einzelnen Bände sind nach einem „Zwei-Seiten-Konzept“ aufgebaut: Der fachliche Inhalt wird fortlaufend auf den linken Seiten dargestellt, auf den gegenüberliegenden rechten Seiten finden sich im Sinne des „learning by doing“ jeweils zugehörige Beispiele, Aufgaben, stoffliche Ergänzungen und Ausblicke.

Die Beschränkung auf die wesentlichen fachlichen Inhalte und die Erläuterungen anhand von Beispielen und Aufgaben erleichtern es dem Leser, sich auch im Selbststudium neue Inhalte anzueignen oder sich zur Prüfungsvorbereitung konzentriert mit dem notwendigen Rüstzeug zu versehen. Aufgrund ihrer Schulrelevanz eignet sich die Reihe auch zur Lehrerweiterbildung.

Raumgeometrie

Raumphänomene – Konstruieren – Berechnen

Von Prof. Dr. Kurt Peter Müller
Pädagogische Hochschule Karlsruhe



Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

Prof. Dr. Kurt Peter Müller

Geboren 1941 in Stuttgart. Studium (Lehramt in Mathematik und Physik, Diplom in Mathematik) an der Universität Stuttgart (TH). Promotion in Mathematik an der Universität Stuttgart 1970. Von 1970 bis 1971 Referendariat. In der Lehrerausbildung tätig seit 1971 an den Pädagogischen Hochschulen in Esslingen, Reutlingen und – seit 1987 – Karlsruhe.

Arbeitsgebiete: Mathematik und ihre Didaktik, Schwerpunkte Einsatz des Taschenrechners/Geometrie/Primarstufe.

Kurt-Peter.Mueller@PH-Karlsruhe.de

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme
Ein Titeldatensatz für diese Publikation ist bei
Der Deutschen Bibliothek erhältlich.

1. Auflage November 2000

Alle Rechte vorbehalten

© Springer Fachmedien Wiesbaden 2000

Ursprünglich erschienen bei B. G. Teubner GmbH, Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden 2000.

Der Verlag Teubner ist ein Unternehmen der Fachverlagsgruppe BertelsmannSpringer.



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt besonders für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

www.teubner.de

Gedruckt auf säurefreiem Papier
Umschlaggestaltung: Peter Pfitz, Stuttgart

ISBN 978-3-519-02397-5 ISBN 978-3-663-11237-2 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-663-11237-2

Vorwort

Der vorliegende Band der Reihe „mathematik-abc für das Lehramt“ ist eine elementar gehaltene Einführung in die Raumgeometrie. Eine solche „Raumgeometrie“ hat neben einer eher problemorientierten „Elementargeometrie“ und einer eher systematischen „Abbildungsgeometrie“ auch einen bedeutsamen Platz in der Lehrerbildung. Die wichtigsten Gründe dafür sind:

- Geometrie ist eine mathematische Theorie. Sie ist aber als Abstraktion aus der Erfahrungswelt entstanden, und sie findet Anwendung in der Erfahrungswelt. Deshalb soll die Erarbeitung elementarer geometrischer Überlegungen von der Erfahrungswelt ausgehen – und diese Erfahrungswelt ist dreidimensional.
- Raumgeometrie wird oft vernachlässigt. Allenfalls die rechnende „Analytische Geometrie“ behandelt auch räumliche Probleme.
- Raumvorstellung ist mit ebenen Figuren trainierbar, doch sollten, dem Namen entsprechend, zumindest auch räumliche Überlegungen mit einbezogen werden.

Das Betrachten von Bauwerken, insbesondere von Dächern, ist hier das möglichst durchgängig verwendete Beispiel. Dies hat zum einen seinen Grund darin, dass man praktisch alle geometrischen Phänomene an geeignet gewählten Dächern entdecken kann. Andererseits kann man daran auch aufzeigen, dass das „mit offenen Augen“ durch die (Erfahrungs-)Welt Gehen zum Mathematisieren – hier zum „Geometrisieren“ – führt. Die gesamte Mathematik – besonders die Geometrie – ist für die Schule nicht vorrangig Kulturgut und auch nicht nur ein oder gar der Bereich, in dem logisch gedacht werden muss, sondern sie ist ein Gebiet, das viele Anwendungen im Alltagsleben hat.

Schon sehr bald werden (ebene) Zeichnungen von (räumlichen) Objekten oder Sachverhalten zu sehen und meist sofort zu verstehen sein. Dies ist besonders im Teil 1.2 der Fall. Wenn die Aussagen komplizierter werden, wird das Anschauen vielleicht schon dort nicht mehr ganz ausreichen. Dann wird beim Lesen ein Wissens- oder Theorie-Defizit erkennbar, das anschließend ausgeglichen wird. Der Aufbau der Darstellung folgt (oft unterschwellig, nicht immer explizit angesprochen) folgender Stufung:

- Zeichnungen „lesen“, also anschauen und räumlich interpretieren – so lange das geht. Die räumliche Interpretation führt dazu, Klarheit über Grundtatsachen der Geometrie im Raum zu gewinnen. Wie können Punkte, Geraden und Ebenen im Raum liegen (eher statische Überlegung), wie können sie bewegt werden (eher dynamische Überlegung) usw.? Man entdeckt dabei **Raumphänomene**.
- Zeichnungen ergänzen, um neue Erkenntnisse zu gewinnen. Das bedeutet oft auch, sich mit Hilfe der Zeichnung kontinuierliche Veränderungen bestimmter Eigenschaften vorzustellen. Es geht dabei um (dynamisches) **räumliches Denken**. Insgesamt ist dieser Teil in das Umfeld „Räumliches Vorstellungsvermögen“ einzuordnen, wozu eben nicht nur das statische „Vorstellen“ von Sachverhalten zählt, sondern auch das **dynamische Umgehen mit** (gedachten) geometrischen **Objekten**.
- Zeichnungen erstellen und, wenn nötig, auch während des Zeichnens über das eigentliche Objekt hinaus fortsetzen, um das Objekt korrekt zeichnen zu können. Hauptinhalt ist dabei das **Darstellen** räumlicher Objekte, das **Konstruieren** von ebenen Bildern. Ziel ist dabei nicht das Einüben vieler Standardverfahren, son-

dem das Bereitstellen weniger wichtiger grundlegender Ideen, damit sie nicht nur beim (gelegentlichen) Zeichnen, sondern beim (häufigen) Lösen raumgeometrischer Fragen und insbesondere auch für das **Skizzieren** zur Verfügung stehen.

- Eine sich hier anschließende Stufe kann im Rahmen einer solchen Darstellung in Buchform kaum umgesetzt werden. Es ist aber einleuchtend, dass nach dem oben genannten Ergänzen und auch dem Dynamisieren zwanglos das **Bauen** von Modellen kommen würde.
- Im Hinblick auf Anwendungen haben solche Überlegungen zur Raumgeometrie auch **Berechnungen** zum Inhalt. Sie werden deshalb hier in diese Darstellung aufgenommen. Dies umfasst an einigen Stellen auch das Arbeiten mit **Koordinatensystemen** und mit **Gleichungen** geometrischer Objekte.

Beim dynamischen Umgehen mit Objekten und bei dem sich an das Dynamisieren anschließenden Bauen wäre die Brücke zu dynamischer Geometrie-Software. Auf diesen wichtigen Bereich wird ausdrücklich hingewiesen. Er ist in dieser Darstellung ausgespart, weil die Entwicklung bei den einschlägigen Programmen noch zu schnell vor sich geht.

Insgesamt ist der Aufbau nicht streng linear. Vielmehr wird oft bewusst aufgrund der Alltagserfahrung vorgegriffen und erst später eine mathematisch präzise Erklärung geliefert. Als Beispiele seien die Ellipse und die perspektive Affinität genannt.

Wenn man von Dachformen an Gebäuden spricht, verwendet man die Fachterminologie, die die Baumeister bzw. Architekten schon immer benutzten. Meist sind es Begriffe, die auch in der Umgangssprache vorkommen. Manche dieser Begriffe sind aber nicht allgemein geläufig. Sie werden deshalb in dieser Darstellung bei ihrer ersten Verwendung **fett kursiv** hervorgehoben, aber nicht eigens in einer strengen „Definition“ ausführlich erläutert. Dieses Problem der (Baumeister-)Fachsprache ist der Hauptgrund dafür, dass nicht zur Abwechslung auch aus dem Bereich des Maschinenbaus verschiedene Werkstücke in die Überlegungen einbezogen werden. Wer jedoch aufgrund seiner persönlichen Erfahrung eher im Umfeld des Maschinenbaus Beispiele zu den hier dargestellten Problemen kennt, kann die Übertragung auf dieses Gebiet sicher leicht selbst leisten und wird hiermit ausdrücklich aufgefordert, dies zu tun. Beides ist ein Ansatz für Fächer verbindendes Arbeiten, das ohne Kenntnis in anderen Bereichen unmöglich ist.

Schließlich sei noch einmal auf die oben angegebenen Punkte vom Lesen von Zeichnungen bis zum Bauen von Modellen und das Berechnen hingewiesen. Nur in der Kombination dieser verschiedenen Ansätze sind alle dargestellten Gedanken nachvollziehbar. Schließlich soll hier auch nachdrücklich zum Überlegen mit Unterstützung durch einfacher Hilfsmittel (Aktendeckel, die man auf- und zuklappen kann, Geodreiecke, Bleistifte usw. sind gut geeignet), zum Skizzieren oder genauen (konstruierenden) Zeichnen und eventuell sogar zum Bauen aufgefordert werden!

Für viele konstruktive Hinweise zum Manuskript danke ich Frau Christiane Schulz. Ihre immer wieder geäußerten Forderung hat auch dazu geführt, dass die Lösungen praktisch aller Aufgaben aufgenommen wurden. Dem Verlag B. G. Teubner und Herrn J. Weiß in Leipzig danke ich für die stets engagierte Betreuung der Reihe „mathematik-abc“ und insbesondere für die Geduld bei der Fertigstellung dieses Manuskripts.

Karlsruhe, im August 2000

Kurt Peter Müller

Inhalt

1 Punkte – Geraden – Ebenen:	
Geometrische Phänomene im Raum	9
1.1 Punkte, Geraden und Ebenen als Grundelemente	9
1.1.1 Die geometrischen Grundgebilde	9
1.1.2 Winkel zwischen Geraden und Ebenen	14
1.2 Erste Folgerungen	16
1.2.1 Zusammenhänge bei Geraden und Ebenen	16
1.2.2 Dynamisches Denken und Erzeugen neuer Gebilde	20
2 Ebene Darstellung räumlicher Objekte	26
2.1 Koordinatensystem: Die Aufbaumethode der Axonometrie	26
2.1.1 Die Vorschrift als Rezept	26
2.1.2 Variation des Axonometrie-Dreibeins	30
2.2 Eintafelprojektion	34
2.2.1 Projektionsarten	34
2.2.2 Zentralprojektion	36
2.2.3 (Schiefe) Parallelprojektion	38
2.2.4 Normalprojektion	42
2.2.5 Der Zusammenhang zwischen Parallelprojektion und Axonometrie	46
2.2.6 Kotierte Projektion	50
2.3 Zwei- und Mehrtafelprojektionen	52
2.3.1 Zwei Normalrisse in der Aufnahmesituation und in der Bildebene	52
2.3.2 Beispiele für eine Zwei- und eine Dreitafelprojektion	54
2.3.3 Allgemeine Seitenrisse zur Bestimmung wahrer Längen	58
2.3.4 Paralleldrehen einer Ebene	60
3 Skizzieren, Konstruieren, Berechnen und Bauen	62
3.1 Grundideen beim Zeichnen	62
3.1.1 Grundideen beim Zeichnen axonometrischer Bilder	62
3.1.2 Parallelprojektion ebener Objekte: Perspektive Affinitäten	64
3.1.3 Ebene Schnitte von Prismen	68
3.2 Grundideen beim Berechnen	70
3.2.1 Hilfsmittel zu Berechnungen bei axonometrischen Bildern	70
3.2.2 Grundsätzliches zu Berechnungen bei Flächeninhalten	72
3.2.3 Berechnungen bei Rauminhalten	76
3.3 Skizzieren und Berechnen beim Ausbau von Dachformen	84
3.3.1 Forderungen an Skizzen bei deren Herstellung und bei deren Interpretation	84
3.3.2 Weitere Variationen und Ergänzungen bei Dächern	86
3.3.3 Skizzieren und räumliche Überlegungen	90

3.4	Geometrische Analyse bei komplizierteren Dächern	94
3.4.1	First und Trauflinien, Höhenlinien	94
3.4.2	Dachausmittlung bei einfachen Grundrissen	96
3.4.3	Dachausmittlung – Verallgemeinerung	98
3.5	Bauen	102
3.5.1	Bauen von Modellen als Hilfe bei der Analyse von Problemen	102
3.5.2	Bauen als Möglichkeit, Ergebnisse darzustellen	104
4	Nicht ebene Teile oder nicht geradlinige Kanten	106
4.1	Nicht ebene Formen bei Dächern und Gebäuden	106
4.1.1	Nicht ebene Dachformen als Notlösung: Übergangsstücke	106
4.1.2	Nicht ebene Dachformen als Gestaltungselement	108
4.1.3	Darstellung von Kreisen mit Hilfe der Kavalier- und Militärprojektion	110
4.1.4	Skizzieren und Konstruieren von Kreisbildern durch Einbetten in Quader	112
4.2	Die Kegelschnitte	114
4.2.1	Die Ellipse als Bild eines Kreises bei orthogonaler Affinität	114
4.2.2	Der Parallelriss von Kreis und Ellipse	116
4.2.3	Ellipse als perspektiv-affines Bild eines Kreises	118
4.2.4	Ellipse als Zylinderschnitt	122
4.2.5	Ausblick: Kegelschnitte	124
4.3	Anwendungen bei Dächern	126
4.3.1	Abwicklung eines Zylinders mit Ellipsen-Schnitt	126
4.3.2	Zueinander konjugierte Richtungen nutzen	128
5	Die Kugel	130
5.1	Zeichnen	130
5.1.1	Parallelriss einer Kugel	130
5.1.2	Halbkugeln und andere Kugelteile	132
5.2	Rechnen	134
5.2.1	Das Volumen einer Kugel	134
5.2.2	Die Oberfläche einer Kugel: Berechnung und Zentralprojektion	136
5.3	Anwendungen	138
5.3.1	Räumliches Denken bei einem Gasbehälter	138
5.3.2	Kugeln als Denkhilfe	140
6	Lösungshinweise zu den Aufgaben	142
6.1	Aufgaben aus Kapitel 1	142
6.2	Aufgaben aus Kapitel 2	143
6.3	Aufgaben aus Kapitel 3	148
6.4	Aufgaben aus Kapitel 4	157
6.5	Aufgaben aus Kapitel 5	162
	Anhang: Fotos räumlicher Objekte	165
	Literaturhinweise	167
	Stichwortverzeichnis	168