Heitmann

Arbitragefreie Bewertung von Zinsderivaten

GABLER EDITION WISSENSCHAFT

Frank Heitmann

Arbitragefreie Bewertung von Zinsderivaten

Mit einem Geleitwort
von Prof. Dr. Siegfried Trautmann

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

Heitmann, Frank:

Arbitragefreie Bewertung von Zinsderivaten

/ Frank Heitmann. Mit einem Geleitw. von Siegfried Trautmann.

- Wiesbaden : Dt. Univ.-Verl. ; Wiesbaden : Gabler, 1997

(Gabler Edition Wissenschaft)

Zugl.: Mainz, Univ., Diss., 1996

ISBN 978-3-8244-6409-8

ISBN 978-3-663-08254-5 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-663-08254-5

© Springer Fachmedien Wiesbaden 1997

Ursprünglich erschienen bei Betriebswirtschaftlicher Verlag Dr. Th. Gabler GmbH, Wiesbaden 1997

Lektorat: Ute Wrasmann / Brigitte Knöringer

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Höchste inhaltliche und technische Qualität unserer Produkte ist unser Ziel. Bei der Produktion und Auslieferung unserer Bücher wollen wir die Umwelt schonen: Dieses Buch ist auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier gedruckt.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Für Susanne

Geleitwort

Einfach anzuwendende Modelle mit großer Erklärungskraft erfreuen sich in der Wirtschaftspraxis großer Beliebtheit. Das gilt zweifellos für das Black-Scholes-Modell zur Bewertung von Aktienoptionen bzw. das Black-Modell zur Bewertung von Zinsderivaten. Letzteres Modell unterscheidet sich vom Black-Scholes-Modell für Aktienoptionen im wesentlichen dadurch, daß die Zustandsvariable Aktienkurs durch die Zustandsvariable Terminzinssatz ersetzt wird. Diese Modellierung ist mit der im Black-Scholes-Modell angenommenen Konstanz des kurzfristigen Kassazinssatzes nicht verträglich. Dennoch sehen viele Derivatehändler, die dieses Modell für ein spezielles Zinsderivatesegment einsetzen, keine Notwendigkeit, dieses einfach anzuwendende Modell durch ein komplexeres Modell zu ersetzen.

Ein komplexeres Zinsstrukturmodell ist aber dann erforderlich, wenn die Bewertung und das Risikomanagement aller Zinsderivate eines Finanzintermediärs (z.B. Caps, Floors, Swaptions, Optionen auf Bundesanleihen, Zins-Futures, etc.) auf der Basis eines einheitlichen Modells erfolgen soll. Heath, Jarrow und Morton (HJM) haben mit ihrem innovativen Modellansatz die dafür notwendigen Grundlagen geschaffen. HJM modellieren das stochastische Übergangsverhalten der Zinsstruktur über die Modellierung der Terminzinsstruktur. Ihr zentrales Ergebnis lautet wie folgt: In der risikoneutralen Welt (d.h. unter dem äquivalenten Martingalmaß) ist die Drift der Terminzinssatzentwicklung nur eine Funktion der Volatilität der Terminzinssätze. Letzteres ermöglicht eine präferenzfreie Bewertung aller Zinsderivate in Analogie zum klassischen Black-Scholes-Modell für Aktienoptionen.

Herr Heitmann stellte sich nun die Aufgabe, für den deutschen Finanzmarkt ein geeignetes Modell im Sinne der HJM-Philosophie zu entwerfen. Die Lösung dieser Aufgabe ist ihm in hervorragender Weise gelungen. Er zeigt zunächst, daß die Modellierung der Zinsunsicherheit von der Terminzinsstruktur ausgehend die Ableitung des allgemeinen Modells erleichtert. Er weist jedoch darauf hin, daß man bei der Schätzung oder Implementation bestimmter Modelle nicht an die Terminzinsstruktur gebunden ist, da ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen der Diskont-, Kassazins- oder Terminzinsstrukturbeschreibung der Zinsstruktur besteht. Das von ihm entwickelte Zweifaktorenmodell ist insbesondere in der Lage, die des öfteren am deutschen Rentenmarkt beobachtete u-förmige Volatilitätsstruktur der Kassazinssätze zu erfassen. Seine praktische Einsetzbarkeit und Erklärungsgüte wird für das Finanzmarktsegment „Zinsoptionsscheine“ eindrucksvoll demonstriert. Die Erklärungsgüte ist nicht zuletzt auf die sorgfältige Zinsstrukturschätzung für Zwecke der Volatilitätsschätzung bzw. zur Bestimmung der Ausgangszinsstruktur zurückzuführen. Diese Dissertation wird daher für weitere Arbeiten auf dem Gebiet der Zinsstrukturmodellierung als Referenzarbeit dienen.

Vorwort

Zinsderivate stellen, gemessen am Handelsvolumen und an der Vielfalt gehandelter Kontrakte, das wohl bedeutendste Marktsegment moderner Finanzinnovationen dar. Seit Mitte der achtziger Jahre wurden daher verschiedene theoretische Ansätze zur Bewertung und zum Hedging von Zinsderivaten entwickelt. Den zahlreichen theoretischen Arbeiten stehen jedoch nur wenige empirische Untersuchungen gegenüber.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, diese Lücke zu schließen und einen Beitrag zur Klärung der Frage nach der praktischen Einsetzbarkeit verschiedener Zinsoptionsbewertungsmodelle zu liefern. Ausgehend von der allgemeinen Charakterisierung arbitragefreier Zinsstrukturmodelle nach Heath/Jarrow/Morton werden die Eigenschaften alternativer Ein- und Zweifaktorenmodelle theoretisch analysiert und empirisch überprüft. Ein Schwerpunkt liegt dabei auf der Berücksichtigung des empirisch beobachtbaren Übergangsverhaltens der Zinsstruktur, welches durch Shifts, Reversionen und Twists gekennzeichnet ist. Als besonders geeignet erweist sich das in dieser Arbeit vorgeschlagene Zweifaktoren-Vasicek-Modell.

Die Schrift entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Finanzwirtschaft der Johannes Gutenberg-Universität Mainz. Sie wurde 1996 von der Fakultät für Rechts- und Wirtschaftswissenschaften als Dissertation angenommen.

Herrn Prof. Dr. Siegfried Trautmann, meinem akademischen Lehrer und Doktorvater, danke ich herzlich für hilfreiche Anregungen und die stets konstruktive Kritik. Seine jederzeitige Gesprächsbereitschaft sowie sein Engagement waren für die Erstellung dieser Arbeit von großem Nutzen. Herrn Prof. Dr. Oliver Heil gilt mein Dank für die Übernahme des Korreferats.

Das Datenmaterial für die empirische Untersuchung wurde mir von der Deutschen Finanzdatenbank der Universitäten Karlsruhe und Mannheim zur Verfügung gestellt. Für die freundliche Überlassung der Daten sowie die Unterstützung bei der Auswertung bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr. Hermann Göppl und Herrn Prof. Dr. Wolfgang Bühler sowie bei Dr. Marliese Uhrig.

Meinen Kollegen, Herrn Dr. Peter Reichling und Frau Dipl.-Math. Barbara Grünewald, bin ich für die allzeit gute Zusammenarbeit und ihre stete Hilfsbereitschaft sehr verbunden. Die intensiven Diskussionen mit ihnen haben viel zum Fortschritt der Arbeit beigetragen. Nicht zuletzt gilt mein ganz besonderer Dank meiner Frau Susanne, die mich in den letzten Jahren auf vielfältigste Weise großartig unterstützt hat.

Frank Heitmann

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
I	Theorie der Bewertung von Zinsderivaten	7
2	Klassifikation alternativer Ansätze zur Bewertung von Zinsderivaten	9
2.1	Probleme bei der Bewertung von Zinsderivaten	10
2.2	Bondpreismodelle	14
2.3	Zinsstrukturmodelle	15
2.3.1	Endogene Zinsstrukturmodelle	16
2.3.2	Inversionsmodelle	18
2.3.3	Modelle der gesamten Zinsstruktur	19
2.4	Kriterien zur Auswahl eines Bewertungsmodells	21
	Anhang 2A Alternative Zinsoptionsbewertungsmodelle	25
3	Grundlagen der arbitragefreien Bewertung	29
3.1	Zeitdiskrete Modelle mit endlichem Zustandsraum	30
3.1.1	Einperiodenmodell	31
3.1.2	Mehrperiodenmodell	36
3.2	Zeitstetiges Modell mit kontinuierlichem Zustandsraum	44
	Anhang 3A Herleitung der Black-Scholes-Formel	59
4	Zinsderivate und ihre arbitragefreie Bewertung mit Hilfe des Martingalan-	61
	satzes	
4.1	Definitionen	62
4.2	Terminrisikoneutrale Bewertung	64
4.3	Unbedingte Zinsterminkontrakte	72
4.4	Bedingte Zinsterminkontrakte	79
4.5	Zusammenfassung	87
	Anhang 4A Vorwärtssubstitution	89

5 Arbitragefreie Zinsstrukturmodellierung	91
5.1 Einfaktormodelle	92
5.1.1 Beschreibung des Übergangsverhaltens der Zinsstruktur	92
5.1.2 Arbitragefreiheit	94
5.1.3 Übergangsverhalten der Zinsstruktur in einer risikoneutralen Welt	100
5.1.4 Terminzins- versus Kassazinsratenmodellierung	102
5.1.5 Gaußsche Zinsstrukturmodelle	104
5.1.6 Bewertung von Contingent Claims	107
5.2 Mehrfaktorenmodelle	109
5.2.1 Beschreibung des Übergangsverhaltens der Zinsstruktur	110
5.2.2 Arbitragefreiheit	111
5.2.3 Übergangsverhalten der Zinsstruktur in einer risikoneutralen Welt	113
5.2.4 Gaußsche Zinsstrukturmodelle	114
5.2.5 Bewertung von Contingent Claims	115
5.3 Zusammenfassung	116
Anhang 5A Ableitung des Bondpreisprozesses	118
Anhang 5B Ableitung des Terminpreisprozesses	118
Anhang 5C Beweis der zinsstrukturkonformen Drift	119
Anhang 5D Beweis der Callpreisformel im Einfaktormodell	120
6 Ein Vergleich Gaußscher Zinsstrukturmodelle	123
6.1 Einfaktormodelle	124
6.1.1 Zeitstetige Version des Modells von Ho/Lee	124
6.1.2 Das zinsstrukturkonforme Vasicek-Modell	128
6.2 Zweifaktorenmodelle	132
6.2.1 Das Modell von Heath/Jarrow/Morton	132
6.2.2 Ein Zweifaktoren-Gaußmodell i.e.S.	136
6.2.3 Ein Zweifaktoren-Gaußmodell i.w.S.	140
6.3 Numerische Approximation	142
6.3.1 Approximation des Bondpreisprozesses mit Hilfe der Zustandsvariablen	142
6.3.2 Die Binomialverfahren von Nelson/Ramaswamy und Tian	144
6.4 Vergleich auf der Basis repräsentativer Parameterwerte	148
6.4.1 Risikoneutrale Wahrscheinlichkeit negativer Kassazinsraten	149
6.4.2 Bewertung von Zinsderivaten	152
6.4.3 Numerische Approximation	159
6.5 Zusammenfassung	164
Anhang 6A Bondpreis im modifizierten HJM-Modell	165

Anhang 6B Analytische Formeln für die Futurespreise in Gauß-Modellen i.e.S.	166
Anhang 6C Callpreise im HJM- und 2FV-Modell	166
Anhang 6D Terminrisikoneutrale Bewertung amerikanischer Optionen	167

II Empirische Ergebnisse 171

7 Zinsstrukturschätzung 173	173
7.1 Das Schätzproblem	174
7.2 Diskrete Schätzung	178
7.2.1 OLS-Methode	178
7.2.2 Ein quadratischer Optimierungsansatz	180
7.3 Kontinuierliche Schätzung	183
7.3.1 Polynomial-Approximation	183
7.3.2 Spline-Verfahren	184
7.4 Datenbasis	189
7.5 Empirische Ergebnisse	193
7.5.1 Bewertungsfehler	194
7.5.2 Glätte und ökonomische Plausibilität	205
7.6 Schlußfolgerungen	210
Anhang 7A Intervalleinteilung beim Spline-Verfahren	212
8 Schätzung der Volatilitätsstruktur 213	213
8.1 Allgemeine Probleme	215
8.2 Hauptkomponentenanalyse	221
8.3 Nichtlineare Regressionsschätzung	224
8.4 Datenbasis	226
8.5 Empirische Ergebnisse	230
8.5.1 Hauptkomponentenanalyse der Kassazinsentwicklung in den Jahren 1980–93	230
8.5.2 Nichtlineare Regressionsschätzung der Volatilitätsstruktur in den Jahren 1980–93	236
8.5.3 Schätzung der Volatilitätsstruktur 1990–94	243
8.6 Zusammenfassung	248
Anhang 8A Grundlagen der Hauptkomponentenanalyse	249
Anhang 8B Hauptkomponentenanalyse: Ausgewählte empirische Studien . . .	251
Anhang 8C Historische Kassazinsvolatilitäten	251

9	Bewertung von Zinsoptionsscheinen	253
9.1	Bisherige empirische Studien	253
9.2	Zinsoptionsscheinhandel in Deutschland	258
9.3	Datenbasis	260
9.4	Empirische Ergebnisse	261
9.4.1	Analyse des Erklärungsgehaltes	264
9.4.2	Analyse auf systematische Verzerrungen	273
9.4.3	Einfluß der Güte der Zins- und Volatilitätsschätzung	277
9.5	Zusammenfassung	282
	Anhang 9A Datenbasis	284
	Anhang 9B Bewertungsfehler nach Restlaufzeit und Moneyness	287
10	Zusammenfassung und Ausblick	289
	Literaturverzeichnis	295

Abbildungsverzeichnis

2.1	Klassifikation der Zinsoptionsbewertungsmodelle	10
2.2	Simulationen von Kursverläufen	12
3.1	Informationsstruktur im Mehrperiodenmodell	38
4.1	Stochastik der Zinsentwicklung	69
4.2	Terminrisikoneutrale Übergangswahrscheinlichkeiten	70
4.3	Klassifikation von Zinsterminkontrakten	72
6.1	Zinsstruktur im Ho/Lee-Modell	127
6.2	Zinsstruktur im Vasicek-Modell	131
6.3	Zinsstruktur im HJM-Modell	135
6.4	Zinsstruktur im 2FV-Modell	139
6.5	Binomialbaum nach Nelson/Ramaswamy	146
6.6	Negative Kassazinsraten im Ho/Lee- und Vasicek-Modell	150
6.7	Negative Kassazinsraten im HJM- und 2FV-Modell	151
6.8	Pull-to-Par-Effekt	154
6.9	Callpreise im Ho/Lee-Modell	155
6.10	Callpreisdifferenz Ho/Lee-Vasicek	156
6.11	Callpreisdifferenz 2FV-HJM	158
7.1	Verteilung der Restlaufzeiten	190
7.2	Anzahl der Anleihen je Schätzung im Zeitablauf	191
7.3	Verteilung der Kupons und Zinstermine	192
7.4	Mittlere absolute Fehler pro Jahr	197
7.5	Anzahl Anleihen bei der quadratischen Optimierung	198
7.6	Bewertungsfehler nach Quadopt am 15. November 1991	199
7.7	Kuponeffekt Spline: Bestimmtheitsmaß und R^2	203
7.8	Bewertungsfehler nach Spline am 7. April 1989	204
7.9	Kassazinsstruktur 1980–94	206
7.10	Terminzinsstruktur 1980–94	207

7.11	Kassazinsstruktur 5. Juni 1992	208
7.12	Terminzinsstruktur 5. Juni 1992	209
7.13	Kassa- und Terminzinsstruktur 5. Juni 1992	211
8.1	Mittlere Kassa-/Terminzinssraten 1/80 – 12/94	227
8.2	Kassazinsentwicklung 1/88 – 12/89	228
8.3	Kassazinsentwicklung 1/90 – 12/91	229
8.4	Varianzerklärung	232
8.5	Volatilitätsstruktur der Kassazinsentwicklung 1/88–12/89	233
8.6	Volatilitätsstruktur der Kassazinsentwicklung 1/80–12/93	234
8.7	Varianzerklärung im Vasicek-Modell	239
8.8	Varianzerklärung im HJM-Modell	241
8.9	Varianzerklärung im 2FV-Modell	242
8.10	Halbjahres-Volatilitätsstruktur 1990–94	244
8.11	Anpassungsgüte im Zeitablauf	246
8.12	Mittlerer absoluter Fehler in den Kassazinsvolatilitäten	247
8.13	Historische Kassazinsvolatilitäten	252
9.1	Money-Ratio und Restlaufzeit	262
9.2	Bewertungsfehler (MAE/ME) nach Quartalen	267
9.3	Bewertungsfehler nach Restlaufzeit	275
9.4	Bewertungsfehler nach Moneyness	276

Tabellenverzeichnis

2.1	Bondpreismodelle	25
2.2	Endogene Zinsstrukturmodelle	26
2.3	Inversionsmodelle	26
2.4	Modelle der gesamten Zinsstruktur	27
6.1	Callpreise in Gauß-Modellen	157
6.2	Europäische Calls auf Nullkuponanleihen	160
6.3	Europäische Calls auf Kuponanleihen	162
6.4	Amerikanische Calls auf Kuponanleihen	163
7.1	Bewertungsfehler nach Teilperioden	195
7.2	Bewertungsfehler nach Wertpapiertyp	196
7.3	Bewertungsfehler am 15. November 1991	200
7.4	Regressionen zur Erklärung des Fehlers	201
7.5	Bewertungsfehler am 7. April 1989	202
7.6	Bewertungsfehler am 5. Juni 1992	210
8.1	Approximationsfehler lokaler Varianzen für $\kappa = 0.5$	219
8.2	Erklärung der Varianz der Kassazinsraten	231
8.3	Interpretation der Faktoren	235
8.4	Parameterschätzung des Ho/Lee-Modells	237
8.5	Parameterschätzung des Vasicek-Modells	237
8.6	Parameterschätzung des HJM-Modells	240
8.7	Parameterschätzung des 2FV-Modells	240
8.8	Mittlere Anpassungsgüte	245
9.1	Empirische Untersuchungen von Zinsoptionspreismodellen	256
9.2	Zeitwert und Wertuntergrenze	263
9.3	Bewertungsfehler	265
9.4	Bewertungsfehler nach Jahren	266
9.5	Vergleich mit anderen Studien	269

9.6	Test des Erklärungsgehaltes nach Optionstyp	270
9.7	Modellvergleich der absoluten Bewertungsfehler	272
9.8	Money-Ratio-Klassen	274
9.9	Bewertungsfehler in den zugrundeliegenden Anleihen	278
9.10	Bewertungsfehler Quadopt vs. CCW5	278
9.11	Optionspreisdifferenzen Quadopt vs. CCW5	279
9.12	Einfluß des Bondpreisfehlers auf den Optionspreisfehler	280
9.13	Volatilitäts-Schätzgüte und Bewertungsfehler	282
9.14	Kauf-Zinsoptionsscheine	284
9.15	Verkaufs-Zinsoptionsscheine	285
9.16	Basis-Anleihen	286
9.17	Bewertungsfehler nach Restlaufzeit im 2FV-Modell	287
9.18	Bewertungsfehler nach Moneyness im 2FV-Modell	288

Abkürzungsverzeichnis

2FV	Zweifaktoren-Vasicek-Modell
Adj- R^2	korrigiertes Bestimmtheitsmaß
ATM	at the money
BIZ	Bank für internationalen Zahlungsausgleich
BDT	BLACK/DERMAN/TOY
BOBL	Bundesobligation
BS	BLACK/SCHOLES
BSA	Bundesschatzanweisung
BUND	Bundesanleihe
CCW	CHAMBERS/CARLETON/WALDMAN
CIR	COX/INGERSOLL/ROSS
CPU	Central Processing Unit
CV	Variationskoeffizient
DITM	deep in the money
DOTM	deep out of the money
DTB	Deutsche Terminbörse
FIBOR	Frankfurt Interbank Offered Rate
FDE	Fonds Deutsche Einheit
FRA	Forward Rate Agreement
FRN	Floating Rate Note
FSFO	future-style Futures Optionen
GMM	Generalized Method of Moments
HL	HO/LEE
HJM	HEATH/JARROW/MORTON
i.e.S.	im engeren Sinne
i.w.S.	im weiteren Sinne
ITM	in the money
LIBOR	London Interbank Offered Rate
MAE	mittlerer absoluter Bewertungsfehler
MAX	maximaler absoluter Bewertungsfehler
ME	mittlerer Bewertungsfehler
MED	Median der absoluten Bewertungsfehler
MIN	minimaler absoluter Bewertungsfehler

MO	mittlerer Optionspreis
MR	Money-Ratio (Kassapreis/Ausübungspreis)
MRE	mittlerer relativer Fehler
MRAE	mittlerer relativer absoluter Fehler
NKA	Nullkuponanleihe
OBS	Anzahl der Beobachtungen
OLS	Ordinary Least Squares
OTM	out of the money
Quadopt	Quadratischer Optimierungsansatz zur Zinsstrukturschätzung
RLS	Restricted Least Squares
RMSE	Root Mean Squared Error
STD	Standardabweichung der absoluten Bewertungsfehler
VAS	erweitertes Vasicek-Modell
vgl.	vergleiche