

Walter Ameling · Laplace-Transformation

Aus dem Programm

Elektrotechnik

Lehrbücher

Einführung in die Elektrotechnik, von R. Jötten
und H. Zürneck, 2 Bände

Allgemeine Elektrotechnik, von A. v. Weiss und M. Krause

Elemente der angewandten Elektronik, von E. Böhmer

Grundlagen der Elektrotechnik,
von W. Ameling, 2 Bände

Elektronik, von B. Morgenstern, 2 Bände

Ergänzende Literatur

Laplace-Transformation, von W. Ameling

Laplace-Transformation, von J. G. Holbrook

Einführung in die Netzwerktheorie, von D. Naunin

Einfache Ausgleichsvorgänge der Elektrotechnik,
von K. Hoyer und G. Schnell

Elektromagnetische Felder, von A. v. Weiss

Lexikon der Elektronik, von O. Neufang

Walter Ameling

Laplace- Transformation

3., durchgesehene Auflage



Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Ameling, Walter:

Laplace-Transformation / Walter Ameling. –

3., durchges. Aufl. – Braunschweig; Wiesbaden:

Vieweg, 1984.

(Studienbücher Naturwissenschaft und Technik;

Bd. 7)

ISBN 978-3-528-39187-4

ISBN 978-3-663-06810-5 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-663-06810-5

NE: GT

1. Auflage 1975

2., durchgesehene Auflage 1979

3., durchgesehene Auflage 1984

Alle Rechte vorbehalten

© Springer Fachmedien Wiesbaden 1984

Ursprünglich erschienen bei Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig 1984

Die Vervielfältigung und Übertragung einzelner Textabschnitte, Zeichnungen oder Bilder, auch für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, gestattet das Urheberrecht nur, wenn sie mit dem Verlag vorher vereinbart wurden. Im Einzelfall muß über die Zahlung einer Gebühr für die Nutzung fremden geistigen Eigentums entschieden werden. Das gilt für die Vervielfältigung durch alle Verfahren einschließlich Speicherung und jede Übertragung auf Papier, Transparente, Filme, Bänder, Platten und andere Medien.

Satz: Günther Hartmann, Nauheim

Umschlaggestaltung: Peter Steinthal, Detmold

Vorwort

Die Laplace-Transformation hat durch die Breite ihrer Anwendungsmöglichkeiten ständig im Bereich der Technik an Bedeutung gewonnen. Sie ist heute für den in der Praxis stehenden Ingenieur, Physiker und Mathematiker ein wertvolles Hilfsmittel zur Bewältigung seiner Aufgaben geworden.

Mit diesem Buch möchte ich sowohl dem Studierenden an Hoch- und Fachhochschulen als auch dem Ingenieur der Praxis die Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation auf übersichtliche Art näherbringen.

An fast allen Hochschulen ist die Theorie der Laplace-Transformation in gewissem Umfang heute bereits ein feststehender Bestandteil in der Grundlagenausbildung. Sowohl für den Elektro-Ingenieur und hier insbesondere für den Elektronik-Ingenieur als auch für den Regelungstechniker ist der vertraute Umgang mit der Laplace-Transformation ein notwendiges Rüstzeug zur Bewältigung seiner Probleme.

Bei der Auswahl und Anordnung des Stoffes bin ich davon ausgegangen, daß die Laplace-Transformation für den Ingenieur nicht nur eine klare und exakte Theorie zur Behandlung von Differentialgleichungen oder technischen Schaltvorgängen sein soll; sie soll ihn außerdem in die Lage versetzen, Probleme der Praxis erfolgreich zu bearbeiten.

Aus didaktischen Gründen habe ich es vorgezogen, nicht direkt mit der Vorstellung und Definition des Laplace-Integrals selbst zu beginnen, sondern eine Hinleitung zu vermitteln und eine Einführung in das Gebiet zu geben. Ich bin davon ausgegangen, daß durch eine kurze Behandlung nichtsinusförmiger periodischer und nichtperiodischer Vorgänge mit Hilfe der Fourier-Reihe bzw. dem Fourier-Integral ein besseres Verständnis für das Wesen der Integraltransformation ermöglicht wird und der Übergang zur Laplace-Transformation dem Leser besser nahegebracht wird.

Da dieses Buch im wesentlichen für Studierende an Hoch- und Fachhochschulen und für den Ingenieur in der Praxis gedacht ist, wird der Stoff in einer solchen Art und in einem solchen Umfang dargeboten, daß es sowohl dem Studierenden als auch dem nach seinem Studium bereits im Berufsleben stehenden Ingenieur möglich ist, sich ein relativ vollständiges Wissen über diese spezielle Integraltransformation anzueignen. Ferner sollen ihm die Anwendungsmöglichkeiten und zweckmäßigen Einsatzgebiete aufgezeigt und die Anwendung selbst bei seinen vielfältigen Arbeiten ermöglicht werden. Als Voraussetzung werden vom Leser Kenntnisse aus Einführungsvorlesungen der Differential- und Integralrechnung und der Grundlagen der Elektrotechnik erwartet. Durch den einleitenden Übergang über Fourier-Reihe und Fourier-Integral zum Laplace-Integral wird, so hoffe ich, das physikalische Verständnis so weit geweckt, daß die Zusammen-

hänge zwischen Ober- und Unterbereich bzw. Original- und Bildbereich dem Leser in jedem Augenblick der Problembearbeitung bewußt sind und er mit weniger Aufwand die Analyse oder Synthese seiner Problemstellung durchführt, als dies bei einer Behandlung ohne Laplace-Transformation möglich wäre.

Mit großer Ausführlichkeit werden die Grundlagen der Laplace-Transformation durch die Darstellung und Behandlung der verschiedenen Sätze über die Laplace-Transformation gelegt. An einfachen, kleinen Beispielen bei jedem dieser Sätze kann der Leser das Wesen der Laplace-Transformation kennen und begreifen lernen. Anschließend werden mit einer gewissen Ausführlichkeit die Methoden der Umkehrung der Laplace-Transformation, der sogenannten Rücktransformation oder inversen Laplace-Transformation, behandelt. Neben dem Gebrauch von Tabellen und der Methode der Partialbruchzerlegung, den beiden wichtigsten Methoden der Rücktransformation, wird auch auf das komplexe Umkehrintegral eingegangen. Da die Rücktransformation den schwierigsten Teil bei der Lösung mit Hilfe der Laplace-Transformation darstellen kann, sollte dieser Abschnitt besondere Beachtung finden.

Auf die Behandlung des asymptotischen Verhaltens von Funktionen konnte nicht verzichtet werden, weil insbesondere in der Regelungstechnik diese Betrachtungsweise die Grundlage für Stabilitätsuntersuchungen ist.

Nachdem in systematischer Folge das notwendige Rüstzeug der Laplace-Transformation dargestellt und behandelt ist, wird im Abschnitt über die Anwendungen der Laplace-Transformation versucht, an Hand einiger ausgewählter Gebiete dem Leser ein Gefühl für die Größe und Bedeutung der technischen Anwendungsgebiete zu vermitteln. Auch hier wurden bei der Auswahl des Stoffes entsprechend dem Einsatz der Laplace-Transformation Fragen der elektrischen Netzwerke und Regelungstechnik, des dynamischen Verhaltens und der Simulation technischer Vorgänge behandelt.

In einem Anhang sind für die praktische Anwendung neben den Tabellen zur Laplace-Transformation mit den wichtigsten Original- und Bildfunktionen auch Tabellen von Übertragungsfunktionen und Übergangsfunktionen dargestellt, die bei der Behandlung von technischen Problemen von großem Nutzen sind.

Mein besonderer Dank gilt meinem Assistenten, Herrn Dr. Rütters, für die Durchsicht des Manuskriptes, bei der er mir wertvolle Anregungen und Hinweise gegeben hat. Darüber hinaus hat mich Herr Dr. Rütters bei der sehr aufwendigen Arbeit der Zusammenstellung und Überprüfung der Tabellen sowie beim Lesen der Korrekturen mit großem Einsatz unterstützt. Für diese Arbeiten, die er mit Umsicht und Sorgfalt durchgeführt hat, möchte ich ebenfalls herzlichst danken. Dem Bertelsmann-Universitätsverlag danke ich für die gute Zusammenarbeit bei der Drucklegung.

Aachen, Dezember 1974

Walter Ameling

In der 2. und 3. Auflage sind Fehler korrigiert und geringfügige Änderungen angebracht worden.

Inhalt

| | | |
|-----------|---|----|
| <i>1.</i> | <i>Einleitung</i> | 11 |
| 1.1 | Geschichtlicher Überblick | 11 |
| 1.2 | Der Begriff der Transformation | 12 |
| <i>2.</i> | <i>Übergang zur Laplace-Transformation</i> | 15 |
| 2.1 | Approximation durch Orthogonalfunktionen | 16 |
| 2.2 | Die Behandlung nichtsinusförmiger periodischer Vorgänge | 20 |
| 2.2.1 | Die Fourier-Reihe | 20 |
| 2.2.2 | Die Auswirkung von Symmetrieeigenschaften auf die Fourier-Koeffizienten | 25 |
| 2.2.3 | Die Fourier-Reihe in komplexer Schreibweise | 29 |
| 2.2.4 | Verfahren zur Harmonischen Analyse | 33 |
| 2.3 | Die Behandlung nichtsinusförmiger nichtperiodischer Vorgänge | 35 |
| 2.3.1 | Das Fourier-Integral | 36 |
| 2.3.2 | Das Laplace-Integral | 47 |
| <i>3.</i> | <i>Die Laplace-Transformation</i> | 52 |
| 3.1 | Ableitung einiger einfacher Bildfunktionen | 53 |
| 3.2 | Hilfssätze der Laplace-Transformation | 56 |
| 3.2.1 | Der Satz über die Linearkombination | 57 |
| 3.2.2 | Der Ableitungssatz für die Originalfunktion | 57 |
| 3.2.3 | Der Integralsatz für die Originalfunktion | 65 |
| 3.2.4 | Der Ableitungssatz für die Bildfunktion | 67 |
| 3.2.5 | Der Integralsatz für die Bildfunktion | 70 |
| 3.2.6 | Der Ähnlichkeitssatz | 72 |
| 3.2.7 | Der Dämpfungssatz | 74 |
| 3.2.8 | Der Verschiebungssatz | 75 |
| 3.2.9 | Der Faltungssatz | 80 |
| 3.3 | Methoden der Rücktransformation | 90 |
| 3.3.1 | Der Gebrauch von Tabellen | 91 |
| 3.3.2 | Die Methode der Partialbruchzerlegung | 91 |
| 3.3.2.1 | Bildfunktionen mit einfachen Polen | 91 |
| 3.3.2.2 | Bildfunktionen mit Polen höherer Ordnung | 95 |

| | | |
|-------|---|-----|
| 3.3.3 | Die Methode der Reihenentwicklung | 102 |
| 3.3.4 | Die direkte Methode (das komplexe Umkehrintegral) | 103 |
| 4. | <i>Spezielle Sätze zur Laplace-Transformation</i> | 117 |
| 4.1 | Die Erzeugung neuer Funktionenpaare aus bekannten Funktionenpaaren mit Hilfe des Faltungssatzes | 118 |
| 4.2 | Die Erzeugung von Bildfunktionen periodischer Funktionen | 126 |
| 4.3 | Bildfunktionen mit gebrochenen Exponenten | 131 |
| 4.4 | Die Differentiation im Falle einer sprunghaften Änderung von $f(t)$ zur Zeit $t = 0$ | 138 |
| 4.5 | Die Transformierte der Deltafunktion | 139 |
| 4.6 | Asymptotisches Verhalten der Originalfunktion | 141 |
| 5. | <i>Die Definition der Übertragungsfunktion und der Übergangsfunktion</i> | 146 |
| 5.1 | Die Übertragungsfunktion | 147 |
| 5.2 | Die Übergangsfunktion | 154 |
| 5.3 | Die Antwortfunktion eines linearen Systems auf spezielle Erregungen | 157 |
| 6. | <i>Die Anwendung der Laplace-Transformation</i> | 161 |
| 6.1 | Die Behandlung gewöhnlicher Differentialgleichungen | 161 |
| 6.1.1 | Die Lösung der Differentialgleichung erster Ordnung | 161 |
| 6.1.2 | Die Lösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung | 163 |
| 6.1.3 | Die Lösung der Differentialgleichung n-ter Ordnung | 166 |
| 6.2 | Die Behandlung von Differentialgleichungssystemen | 168 |
| 6.3 | Ausgleichsvorgänge und ihre Behandlung mit Hilfe der Laplace-Transformation | 170 |
| 6.4 | Einschwingvorgänge in allgemeinen elektrischen Netzwerken | 184 |
| 6.5 | Dynamisches Verhalten von elektrischen Maschinen | 187 |
| 6.6 | Die Anwendung von Übertragungsfunktion und Übergangsfunktion | 192 |
| 6.7 | Regelungstechnische Anwendungen | 200 |
| 7. | <i>Die Lösung partieller Differentialgleichungen</i> | 208 |
| 7.1 | Die Lösung der Wärmeleitungs- oder Diffusionsgleichung | 213 |
| 7.2 | Die Lösung der Telegraphengleichung | 219 |
| 7.2.1 | Die verzerrungsfreie Leitung unendlicher Länge | 225 |
| 7.2.2 | Die verlustfreie Leitung unendlicher Länge | 227 |

| | | |
|--------|---|-----|
| 8. | <i>Die Behandlung von Differenzgleichungen</i> | 229 |
| 8.1 | Schreibweisen für Differenzgleichungen | 231 |
| 8.2 | Anfangswertprobleme bei Differenzgleichungen | 233 |
| 8.3 | Die Laplace-Transformation für Treppenfunktionen | 235 |
| 8.4 | Die diskrete Laplace-Transformation (ϑ -Transformation) | 236 |
| 8.5 | Die Laurent- oder Z-Transformation | 238 |
| 8.6 | Vergleich von \mathcal{L} -, ϑ - und Z-Transformation | 239 |
| 9. | <i>Operatorenrechnung und verwandte Transformationen</i> | 241 |
| 9.1 | Zusammenhang zwischen Laplace-Transformation und Operatorenrechnung | 241 |
| 9.2 | Der Heavisidesche Entwicklungssatz | 246 |
| 9.3 | Die Laplace-Carson-Transformation | 247 |
| 10. | <i>Tabellen zur Laplace-Transformation</i> | 250 |
| 10.1 | Hilfssätze | 250 |
| 10.2 | Spezielle Funktionenpaare | 254 |
| 10.2.1 | Rationale Funktionen | 254 |
| 10.2.2 | Irrationale und transzendente Funktionen | 262 |
| 10.2.3 | Stückweise stetige Funktionen | 267 |
| 10.2.4 | Funktionsverzeichnis | 273 |
| 10.3 | Kurzschlußkernimpedanzen | 274 |
| 10.4 | Übertragungs- und Übergangsfunktionen von Verstärkerschaltungen | 284 |
| | Literaturverzeichnis | 289 |
| | Sachwortverzeichnis | 290 |