Grundkurs Mathematik

Die Reihe „Grundkurs Mathematik“ ist die bekannte Lehrbuchreihe im handlichen kleinen Taschenbuch-Format passend zu den mathematischen Grundvorlesungen, vorwiegend im ersten Studienjahr. Die Bücher sind didaktisch gut aufbereitet, kompakt geschrieben und enthalten viele Beispiele und Übungsaufgaben.
In der Reihe werden Lehr- und Übungsbücher veröffentlicht, die bei der Klausurvorbereitung unterstützen. Zielgruppe sind Studierende der Mathematik aller Studiengänge, Studierende der Informatik, Naturwissenschaften und Technik, sowie interessierte Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe II.
Die Reihe existiert seit 1975 und enthält die klassischen Bestseller von Otto Forster und Gerd Fischer zur Analysis und Linearen Algebra in aktualisierter Neuauflage.

Weitere Bände in der Reihe http://www.springer.com/series/12463

Gerd Fischer · Boris Springborn

Lineare Algebra

Eine Einführung für Studienanfänger

19., vollständig überarbeitete und ergänzte Auflage

Springer Spektrum

Gerd Fischer
Zentrum Mathematik (M10)
Technische Universität München
Garching, Deutschland

Boris Springborn
Institut für Mathematik
Technische Universität Berlin
Berlin, Deutschland

ISSN 2626-613X ISSN 2626-6148 (electronic)
Grundkurs Mathematik
ISBN 978-3-662-61644-4 ISBN 978-3-662-61645-1 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-61645-1

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft
Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

We must not accept the old blasphemous nonsense
that the ultimate justification of mathematical science
is the „glory of the human mind“.
Abstraction and generalization
are not more vital for mathematics
than individuality of phenomena
and, before all,
not more than inductive intuition.
Only the interplay of these forces and their synthesis
can keep mathematics alive
and prevent its drying out into a dead skeleton.

RICHARD COURANT

Vorwort zur 19. Auflage

Wir haben die Neuauflage genutzt, um den Text gründlich durchzusehen und zu überarbeiten. Dabei haben wir versucht, die Balance zwischen allgemeiner Theorie und konkreten Anwendungen mit durchgerechneten Beispielen noch zu verstärken. Neben zahlreichen kleineren Verbesserungen hat es folgende größere Veränderungen gegeben:

- Kapitel 1 ist gestrafft, die einführenden Beispiele sind besser an das Leitmotiv der Lösung linearer Gleichungssysteme angepasst.
- In Kapitel 2 haben wir algebraische Vorbereitungen ergänzt, insbesondere den euklidischen Algorithmus.
- Kapitel 3 enthält einen einfachen Beweis für die Gleichheit von Zeilenrang und Spaltenrang, der die Ergebnisse über lineare Gleichungssysteme mit der Dimensionsformel für Kern und Bild kombiniert.
- In Kapitel 5 beweisen wir die Jordansche Normalform mit raffinierteren algebraischen Hilfsmitteln. Dabei war es unser Ziel, die Behandlung übersichtlicher und verständlicher zu machen.
- In Kapitel 6 haben wir die Themen komplett neu und systematischer angeordnet.

Wir hoffen, das bewährte Lehrbuch dadurch kräftig durchgelüftet und an vielen Stellen besser lesbar gemacht zu haben. Zahlreiche weitere Themen werden im *Lernbuch Lineare Algebra und Analytische Geometrie* des erstgenannten Autors behandelt.

Unser Dank gilt vor allem Ulrike Schmickler-Hirzebruch, die uns lebhaft zur Arbeit an der Neuauflage angespornt hat, sowie Iris Ruhmann für die weitere geduldige Betreuung des relativ aufwändigen Projekts im Verlag, Maja Hermann für ihre engagierte Mitarbeit bei den vielen Änderungen und schließlich Micaela Krieger-Hauwede für die sorgfältige Ausführung der TeX-Arbeiten.

Wie immer sind wir dankbar für Hinweise von Leserinnen und Lesern auf Ungenauigkeiten und Fehler jeder Art.

München und Berlin, im Mai 2020 Gerd Fischer und Boris Springborn

Vorwort zur 10. Auflage

Die erste im Jahr 1975 veröffentlichte Auflage dieses Buches war entstanden aus meiner Vorlesung im Wintersemester 1972/73 an der Universität Regensburg und einer von Richard Schimpl angefertigten Ausarbeitung, die als Band 1 der Reihe „Der Regensburger Trichter“ erschienen war. Es freut mich, dass das Buch in den vergangenen 20 Jahren so viel Anklang gefunden hat.

Im Jahr 1994/95 hatte ich an der Universität Düsseldorf wieder einmal Gelegenheit, eine Anfängervorlesung über „Lineare Algebra“ zu halten. Dabei fand ich in dem alten Buch zahllose Dinge, die man wohl besser erklären kann. Dazu kam die Versuchung, die Möglichkeiten von LaTeX zu nutzen, was schließlich dazu geführt hat, dass ich fast das ganze Buch neu aufgeschrieben habe.

Geblieben ist die Überzeugung, dass am Anfang jeder Theorie Probleme stehen müssen, und dass die entwickelten Methoden danach zu bewerten sind, was sie zur Lösung der Probleme beigetragen haben. Dies deutlich zu machen, ist in der linearen Algebra eine vordringliche Aufgabe, weil hier die axiomatische Methode sehr ausgeprägt ist. Mithilfe eines wohlorganisierten Instrumentariums von Begriffen können Beweise kurz und klar durchgeführt werden, Rechnungen können weitgehend vermieden werden und erhalten – wo sie notwendig sind – eine Interpretation von einem abstrakteren Standpunkt aus.

Es hat lange gedauert, bis sich die lineare Algebra von einem Hilfsmittel der sogenannten „analytischen Geometrie“ (das ist die Lehre von den linearen und quadratischen geometrischen Gebilden) zu einer selbständigen Disziplin entwickelt hat. Die größten Veränderungen gab es zu Anfang dieses Jahrhunderts, als die axiomatische Methode durch den Einfluss von D. Hilbert und speziell in der Algebra durch Emmy Noether ausgebaut wurde. Das zeigt ganz deutlich ein Blick in Lehrbücher aus dieser Zeit, etwa die „klassische“ Darstellung von Kowalewski [Kow1]* aus dem Jahr 1910 und die 1931 erschienene „moderne“ Version von Schreier-Sperner [S-S]. Dieser Wandel ist vergleichbar mit dem Übergang vom Jugendstil zum Bauhaus. Inzwischen ist die lineare Algebra durchdrungen von einer Ökonomie der Gedanken sowie einer Ästhetik in der Darstellung, und sie ist unentbehrliches Hilfsmittel in vielen anderen Gebieten geworden, etwa der Analysis und der angewandten Mathematik.

Dieser eindrucksvolle Fortschritt ist nicht frei von Gefahren. Die Axiomatik beginnt mit den allgemeinsten Situationen und schreitet fort in Richtung zu spezielleren Sachverhalten. Dieser Weg wurde mit letzter Konsequenz in den Werken von N. Bourbaki beschritten. Er läuft der historischen Entwicklung – die einem „natürlichen Wachstum“ der Mathematik entspricht – jedoch meist entgegen. So

* Eckige Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis.

wurden etwa *Determinanten* schon von LEIBNIZ urn 1690 benutzt, CAYLEY begann 1850 *Matrizen* als eigenständige Objekte anzusehen, der allgemeine Begriff des *Körpers* ist erstmals in dem 1895 bei Vieweg erschienenen „Lehrbuch der Algebra" von H. WEBER [We] zu finden. Abstrakte Begriffe und ihre Axiome entstehen aus der Entdeckung von Gemeinsamkeiten, sie setzen lange Erfahrung im naiven Umgang und kreative Auseinandersetzung mit den Gegenständen der Mathematik voraus. Eine Darstellung, die mit den Axiomen beginnt, könnte den verhängnisvollen Eindruck erwecken, als seien die aufgestellten Regeln zufällig oder willkürlich. Einer solchen Gefahr entgegenzuwirken, ist das stete Bestreben dieses Buches. Die neue Auflage soll helfen, die abstrakten Begriffe noch mehr zu motivieren und die Beziehungen der linearen Algebra zu ihren Anwendungen deutlicher zu machen.

Viele theoretische Überlegungen der linearen Algebra dienen der Rechtfertigung oder der Entwicklung von Rechenverfahren, mit deren Hilfe man schließlich gegebene Probleme durch eine Iteration lösen kann. Dies wird hier in vielen Fällen bis zur Berechnung konkreter Beispiele vorgeführt. In der Praxis lässt man besser einen Computer rechnen, aber die Schwelle zur Beschreibung von Programmen dafür wurde in diesem Buch mit Vorsatz nicht überschritten. Für einen Anfänger erscheint es mir viel wichtiger, zunächst einmal ohne Ablenkung durch Probleme der Programmierung die Struktur des Lösungsweges zu verstehen und mit einfachsten, im Kopf berechenbaren Beispielen die unmittelbare gute Erfahrung zu machen, dass ein Algorithmus funktioniert. Danach kann man getrost die Ausführung der Rechnungen einem fertigen Programmpaket wie Maple oder Mathematica überlassen. Etwa im Rahmen der numerischen Mathematik hat man Gelegenheit, die Rechenverfahren genauer zu studieren und dazu weitere Hilfsmittel der linearen Algebra kennenzulernen (vgl. etwa [St2]).

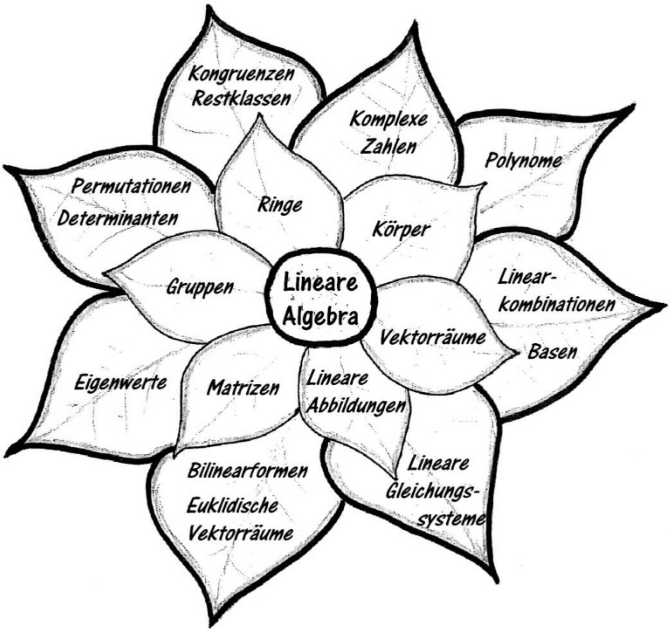
Dieses Buch ist entstanden aus Vorlesungen für Studienanfänger in den Fächern Mathematik, Physik und Informatik; an Vorkenntnissen ist nur das sogenannte „Schulwissen" (etwa im Umfang von [Sch]) nötig. Es enthält insgesamt genügend viel Material für zwei Semester, dabei gibt es zahlreiche Möglichkeiten für Auswahl und Reihenfolge. Der Text ist meist nach den Regeln der Logik angeordnet, in einer Vorlesung kann es gute Gründe geben, davon abzuweichen. Einige Abschnitte sind durch einen Stern $*$ markiert, als Anregung, sie beim ersten Durchgang zu überspringen und später (etwa im zweiten Semester) darauf zurückzukommen. Die Anwendungen der linearen Algebra auf affine und projektive Geometrie sowie die lineare Optimierung sind in einem eigenen Band [Fi2] enthalten, auch damit kann man den vorliegenden Text nach Belieben mischen.

Um Mathematik zu verstehen, genügt es nicht, ein Buch zu lesen oder eine Vorlesung zu hören, man muss selbst an Problemen arbeiten. Als Anregung dazu dienen die zahlreichen Aufgaben. Die dort eingestreuten Sterne sind nicht als Warnung, sondern als besonderer Ansporn zu verstehen.

Der durch diese Neuauflage abgelöste Text war durch zahllose Hinweise von Lesern fast restlos von Druckfehlern befreit worden. Nun gibt es sicher wieder reichlich Nachschub, ich möchte auch die neuen Leser ermuntern, mir „Ansichtskarten“ zu schreiben.

Mein Dank gilt all denen, die bei der Neubearbeitung beteiligt waren: In erster Linie Hannes Stoppel, durch dessen Begeisterung, Bücher zu LaTeX-en, ich in dieses Projekt geschlittert bin, Martin Gräf, der mit viel Sorgfalt die Übungsaufgaben zusammengestellt hat, Carsten Töller, dem einfallsreichen Meister der Bilder und dem Verlag für seine stetige Unterstützung.

Düsseldorf, im September 1995 Gerd Fischer



Diese *Blume der Linearen Algebra* wurde entworfen von Bettina Meserle, Claudia Jochum und Jonathan Zinsl.

Inhaltsverzeichnis