

---

# Angewandte Mathematik 1 mit MATLAB und Julia

---

Daniel Bättig

# Angewandte Mathematik 1 mit MATLAB und Julia

Ein anwendungs- und beispielorientierter  
Einstieg für technische Studiengänge

Daniel Bättig  
Technik und Informatik  
Berner Fachhochschule  
Burgdorf, Schweiz

Ergänzendes Material zu diesem Buch finden Sie auf <https://www.springer.com/de/book/978-3-662-60951-4>

ISBN 978-3-662-60951-4      ISBN 978-3-662-60952-1 (eBook)  
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-60952-1>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2020

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Planung/Lektorat: Iris Ruhmann

Springer Vieweg ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

*Für Franziska*

---

# Vorwort

---

## Die Mathematik: Methoden der linearen Algebra und der Differenzialrechnung

Für das vorliegende Buch habe ich unter anderem Materialien eines von mir geleiteten Moduls in angewandter Mathematik der Studiengänge Maschinen- und Elektrotechnik an der Berner Fachhochschule in Burgdorf neu aufbereitet und ergänzend beschrieben. Die Lehrveranstaltung umfasst 15 Semesterwochen mit wöchentlich je vier Vorlesungs- und Übungsstunden. Das Ziel der Vorlesung ist es, die Studierenden in Methoden der linearen Algebra und der Differenzialrechnung einzuführen.

Mathematik ist ein formales Zeichensystem, um Beziehungen zwischen Zahlen und geometrischen Objekten zu beschreiben. Sie dient im Ingenieurwesen dazu, physikalische und chemische Phänomene zu beschreiben. Die Beschreibungen basieren auf verschiedenen *Zahlensystemen*. Im Ingenieurwesen sind zwei Zahlensysteme wichtig: die natürlichen und die reellen Zahlen. Sie werden in diesem Buch daher im Detail vorgestellt.

Auf den vorgestellten Zahlensystemen aufbauend, benötigt man im Ingenieurwesen verschiedene Werkzeuge. So werden Größen benutzt, die eine Richtung und eine Zahl angeben. Diese nennt man *Vektoren*. Physikalische und chemische Phänomene werden mit Gleichungen oder *Gleichungssystemen* beschrieben, die nach Unbekannten gelöst werden müssen. Um physikalische Systeme zu modellieren, benötigt man Variablen wie die Zeit, die Masse, die Temperatur, das Volumen oder den Druck. Diese hängen zum Teil voneinander ab. Mit *Funktionen* und der *Ableitung* werden diese quantifiziert. Diese Begriffe werden im Buch eingeführt und anhand von Beispielen erläutert.

Folgende Gliederung liegt der Darstellung zugrunde:

Kap. 1 Es werden Zahlensysteme in der Mathematik und des Computers vorgestellt. Besprochen werden Einheitensysteme. Es folgt eine Einführung in die Fehlerrechnung.

Kap. 2 und 3 Gezeigt wird, was Vektoren sind und wie man mit ihnen rechnet. Wie Vektoren in der Geometrie und in der Mechanik benutzt werden, wird illustriert.

Kap. 4 und 7 Es werden lineare Gleichungssysteme vorgestellt. Lösungsverfahren nach Gauß und Cramer für die Gleichungssysteme folgen. Ein Einblick in die Methode der kleinsten Quadrate und in die Regression bei affinen Modellen schließt im Kap. 7 an. Dafür werden die Inhalte der Kap. 5 und 6 vorausgesetzt.

Kap. 5 und 6 Vorgestellt werden Funktionen einer und mehrerer Variablen. Illustriert wird, wie Funktionen dargestellt und im Computer implementiert werden können. Spezielle Funktionen, wie Polynome und die Exponentialfunktion, werden eingeführt. Die Interpolation mit Polynomen ist Gegenstand.

Kap. 8 und 9 Gezeigt wird, was die Ableitung und der Gradient einer Funktion sind sowie wie Funktionen linearisiert werden können. Verschiedene Anwendungen der Ableitung in der Dynamik und in der Fehlerfortpflanzung werden diskutiert. Kritische Zustände bei physikalischen Systemen folgen den Darstellungen.

Im Gegensatz zu vielen einführenden Kursen in Mathematik liegt der Schwerpunkt des Stoffs auf Beispielen aus der Technik, der Physik und der Chemie. Mathematische Beweise werden bewusst nicht ins Zentrum gestellt. Sie werden teilweise sogar ausgelassen. Eine vertiefere, mit allen mathematischen Beweisen ausgestattete Auseinandersetzung des Stoffes findet man in den Büchern *Angewandte Mathematik: Body and Soul, Band 1–3* von K. Eriksson, D. Estep und C. Johnson<sup>1</sup>.

Ausgewählte Resultate und Lösungen zu den Aufgaben sowie weiteres Zusatzmaterial sind online unter [www.baettig.one](http://www.baettig.one) im Verzeichnis *Mathematik* verfügbar. Für Lehrende sind Präsentationsfolien zum Buch über den Dozierendenbereich des Verlags abrufbar. Registrierte Dozierende finden alle Informationen dazu auf der Verlagsseite des Buchs unter <https://www.springer.com/de/book/978-3-662-60951-4>.

---

## Der Computer: MATLAB und Julia

Mathematische Modelle, um chemische oder physikalische Phänomene zu beschreiben, sind meistens komplex. Um daraus interessierende Größen zu berechnen, muss man oft viele Additionen, Subtraktionen, Divisionen oder Multiplikationen durchführen. Einzig Computer können dies im Rahmen zumutbarer Zeitspannen leisten. Um Rechenverfahren im Computer zu implementieren, benutzt man Programmiersprachen. Im Ingenieurwesen, bei Physikern und Mathematikern sind *dynamische* Programmiersprachen wie MATLAB, Julia, Python oder R beliebt. Bei diesen Sprachen können Modelle mit mathematischen Schreibweisen implementiert werden. In diesem Buch wird gezeigt, wie dies mit MATLAB und Julia getan wird.

---

<sup>1</sup>Eriksson, K., Estep, D., Johnson, C.: *Angewandte Mathematik: Body and Soul, Band 1–3*, Springer Verlag (2004).

MATLAB ist in der Elektro- und in der Maschinentechnik weit verbreitet. Es wurde an der Universität New Mexiko entwickelt. Viele kommerzielle Pakete („Tool Boxes“), in denen mathematische Modelle zu verschiedenen physikalischen Phänomenen implementiert sind, sind erhältlich. MATLAB basiert aber auf einer Technologie, die Ende der 1970er Jahre umgesetzt wurde. Das bewirkt, dass implementierte Programme langsam sind. Im Bereich des maschinellen Lernens, wo riesige Datenmengen verarbeitet werden müssen, kann dies ein großer Nachteil sein. MATLAB ist ein kommerzielles Produkt der amerikanischen Firma MathWorks. Wegen der preisgünstigen Studierendenversion ist es relativ weit verbreitet. In kleineren und mittleren Unternehmen findet man MATLAB jedoch kaum. Informationen zu MATLAB und zu seiner Installation findet man auf der Homepage [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com). In diesem Buch werden MATLAB-Befehle aus der Version 2019b vorgestellt.

Julia ist eine moderne, auf der heutigen Technologie basierende Programmiersprache. Sie wurde von einer Informatiker-Gruppe am Massachusetts Institute of Technology (MIT) zu Beginn der 2000er Jahre entwickelt. Sie wurde 2012 als Software frei zur Verfügung gestellt. Julia dient für numerisches und wissenschaftliches Rechnen. Sie hat, da sie auf einer Low-Level-Virtual-Maschine basiert, eine hohe Ausführungsgeschwindigkeit<sup>2</sup>. Daher ist sie ideal, um große Datenmengen und komplexe mathematische Modelle zu bewältigen. Obwohl die Programmiersprache jung ist, sind viele Pakete mit mathematischen Algorithmen vorhanden. Zudem ist die Syntax von Julia ähnlich wie jene von MATLAB. Dies erleichtert die Immigration von MATLAB in Julia. Wie man Julia auf einen Computer installiert, findet man auf der Homepage [www.julialang.org](http://www.julialang.org). In diesem Buch werden Julia-Befehle der Version 1.2 benutzt, welche im Herbst 2019 veröffentlicht wurde.

Mathematik und Programmiersprachen werden mit formalen Sprachen beschrieben. So benutzt man in der Mathematik eine formale Sprache, um Größen und Zahlen zu verbinden oder um chemische und physikalische Phänomene zu modellieren. Programmiersprachen dienen dazu, Berechnungen zu Größen und Zahlen zu beschreiben. Mathematik und Programmiersprachen sind deshalb verwandt. Sie sind im Bereich der angewandten Mathematik im Ingenieurwesen oder in der Industrie daher auch kaum trennbar. Dies wird in diesem Buch berücksichtigt. Formale Sprachen sind aber syntaktisch dichter als natürliche Sprachen wie Deutsch, Französisch oder Englisch. Dies macht es schwieriger mit ihnen zu arbeiten. Die im Buch vorgestellten zahlreichen Beispiele aus der Praxis sollen dabei helfen, diese Arbeit leichter zu machen.

---

<sup>2</sup>siehe Bezanson, J., Edelman, A., Karpinski, St., Shah, V.B.: Julia: A Fresh Approach to Numerical Computing, SIAM Review, Vol. 59, No. 1, 65–98 (2017).

## **Leserschaft**

Das Buch richtet sich an Studierende, die ein Bachelorstudium in angewandten Wissenschaften – wie Ingenieur-, Naturwissenschaften oder Chemie – an einer technischen Hochschule beginnen. Es umfasst den mathematischen Stoff, der an vielen Fachhochschulen im ersten Semester bearbeitet wird. Wie in Studiengängen an Fachhochschulen üblich liegt der Schwerpunkt des Stoffes auf Anwendungen und auf Beispielen.

Für Studierende an technischen Universitäten kann das Buch dank den vielen Beispielen aus der Technik helfen, einführende Kurse in Analysis und linearer Algebra besser zu verstehen.

Verschiedene Kapitel zu Zahlensystemen, Vektoren, Funktionen und zur Differenzialrechnung können auch für Kurse an Gymnasien benutzt werden.

## **Dank**

Der Autor dankt den Studierenden in Maschinen- und Elektrotechnik der Berner Fachhochschule in Burgdorf, die mit ihrer kritischen Lektüre geholfen haben, diesen Text zu elaborieren. Ein Dank geht auch an die Mathematiker F. Bachmann, W. Bani und E. Wyler, die mit ihren Anwendungsbeispielen aus Industrieprojekten gezeigt haben, wie mathematische Modelle sowohl für die Projektplanung wie auch für die Modellierung von Lösungswegen eingesetzt werden können. Ein besonderer Dank geht an Franziska Bitter Bättig für ihre aufmerksame und kritische Lektüre des Texts.

Burgdorf  
Dezember 2019

Daniel Bättig



---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Zahlensysteme: Mathematik und Computer</b> .....	1
1.1	Zählen: Natürliche Zahlen .....	1
1.2	Ganze Zahlen, Betrag und Abstand .....	4
1.3	Ganze Zahlen in Computersprachen .....	6
1.4	Brüche oder rationale Zahlen .....	9
1.5	Unendlich lange Dezimal- und Gleitkommazahlen .....	12
1.6	Normen für Zahlen: IEC, IEEE und SI-Einheiten .....	18
1.7	Fehlerangaben und Fehlerfortpflanzung .....	20
1.8	Überschlagsrechnungen .....	24
	Aufgaben. ....	24
	Literatur. ....	30
<b>2</b>	<b>Vektoren und Programmieren von Schleifen</b> .....	31
2.1	Vektoren und erste Rechenoperationen .....	32
2.2	Das Skalarprodukt und die Norm von Vektoren .....	41
2.3	Repetitive Aufgaben mit dem Computer .....	45
	Aufgaben. ....	48
	Literatur. ....	53
<b>3</b>	<b>Vektoren, Geometrie und Mechanik</b> .....	55
3.1	Ortsvektoren in der Ebene und im Raum .....	55
3.2	Mit der Norm Abstände im Raum berechnen .....	60
3.3	Mit dem Skalarprodukt Winkel und geometrische Projektionen bestimmen .....	61
3.4	Mit dem Kreuzprodukt Flächen und Volumen bestimmen .....	65
3.5	Liniengebundene Vektoren: Kräfte und Drehmomente .....	72
	Aufgaben. ....	77
	Literatur. ....	84

<b>4</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme und Matrizes</b> .....	85
4.1	Beispiele von linearen Gleichungssystemen .....	86
4.2	Vektoren nebeneinander platzieren: Matrizes .....	90
4.3	Der Gauß'sche Algorithmus und das Rückwärts-Einsetzen .....	95
4.4	Die Determinante und die Regel von Cramer .....	100
4.5	Koeffizientenmatrix mit Determinante null .....	106
4.6	Die kompakte Form der Regel von Cramer .....	108
	Aufgaben.....	113
	Literatur.....	120
<b>5</b>	<b>Input-Output: Funktionen</b> .....	121
5.1	Was sind Funktionen? .....	121
5.2	Wie man Funktionen darstellen kann .....	125
5.3	Funktionen programmieren .....	131
5.4	Was ist eine Umkehrfunktion? .....	136
5.5	Funktionen in Serie schalten .....	138
5.6	Verschiebung von Graphen .....	140
	Aufgaben.....	141
	Literatur.....	146
<b>6</b>	<b>Spezielle mathematische Funktionen</b> .....	147
6.1	Polynomfunktionen .....	148
6.2	Interpolieren mit Polynomen .....	151
6.3	Nullstellen von Polynomen .....	155
6.4	Rationale Funktionen .....	158
6.5	Die Exponential- und die Logarithmusfunktion .....	158
	Aufgaben.....	167
	Literatur.....	171
<b>7</b>	<b>Überbestimmte Systeme, affine Funktionen und die Methode der kleinsten Quadrate</b> .....	173
7.1	Einführende Beispiele .....	173
7.2	Matrizes addieren und multiplizieren .....	176
7.3	Die Methode der kleinsten Quadrate für überstimmte Gleichungssysteme .....	181
7.4	Kleinste Quadrate bei linearen und affinen Funktionen .....	185
	Aufgaben.....	193
	Literatur.....	197
<b>8</b>	<b>Die Ableitung einer Funktion</b> .....	199
8.1	Ableitung als Approximation und Änderungsrate .....	199
8.2	Definition der Ableitung mit einer Fehlerkontrolle .....	202
8.3	Symbolisches und automatisches Ableiten .....	209
8.4	Verknüpfte Änderungsraten und die Kettenregel .....	215

---

8.5	Die partielle Ableitung und der Gradient .....	217
8.6	Numerisches Ableiten aus einer Wertetabelle .....	219
	Aufgaben.....	222
	Literatur.....	227
<b>9</b>	<b>Anwendungen der Ableitung</b> .....	<b>229</b>
9.1	Das Differenzial und die Fehlerfortpflanzung .....	229
9.2	Die zweite Ableitung, Beschleunigung und Winkelfunktionen .....	232
9.3	Die Ableitung einer inversen Funktion .....	234
9.4	Maxima, Minima und kritische Punkte einer Funktion .....	237
	Aufgaben.....	245
	Literatur.....	250
	<b>Stichwortverzeichnis</b> .....	<b>251</b>