

---

# Prüfungstrainer Lineare Algebra

---

Rolf Busam · Denis Vogel · Thomas Epp

# Prüfungstrainer Lineare Algebra

500+ Fragen und Antworten  
mit interaktivem Online-Trainer

2. Auflage

Unter Mitarbeit von Pascal Klaiber

 Springer Spektrum

Rolf Busam  
Mathematisches Institut  
Universität Heidelberg  
Heidelberg, Deutschland

Denis Vogel  
Mathematisches Institut  
Universität Heidelberg  
Heidelberg, Deutschland

Thomas Epp  
Berlin, Deutschland

Ergänzendes Material zu diesem Buch finden Sie auf <http://extras.springer.com>.

ISBN 978-3-662-59403-2      ISBN 978-3-662-59404-9 (eBook)  
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-59404-9>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2009, 2019

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Planung/Lektorat: Annika Denkert

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

# Vorwort

## Vorwort zur 2. Auflage

In der Neuauflage wurden Druckfehler und einige sachliche Fehler korrigiert, soweit sie bekannt wurden. Bei den Aufgaben haben wir lediglich die „Raumschiffaufgabe“ zusätzlich hinzugenommen. Thomas Epp, der die erste Auflage wesentlich mitgestaltet hat, konnte sich aus beruflichen Gründen an der Neuauflage leider nicht mehr beteiligen. Um eine druckfähige Version zu erhalten, war etlicher technischer Aufwand erforderlich. Doch Pascal Klaiber hat dies mit großem Engagement gemeistert. Er hat auch die QR-Codes bei denjenigen Aufgaben eingefügt, die online bearbeitet werden können.

Ein Novum ist die Möglichkeit, für ausgewählte Fragen den Beweis interaktiv über das Quiz-System der Online-Plattform MaMpf nachzuvollziehen und sich so intensiver mit den Lösungen zu beschäftigen. Hierbei wird der Leser schrittweise durch die Beweise geführt und erhält zu jedem Schritt und jeder Antwort hilfreiches Feedback. Die Online-Plattform **MaMpf** („Mathematische Medienplattform“) wurde von Denis Vogel entwickelt und wird in der Lehre am Mathematischen Institut der Universität Heidelberg eingesetzt. Für dieses Buch wurde eine eigene Webseite eingerichtet, die Rustam Steingart mit viel Kreativität und Engagement mit angeleiteten Beweisen bestückt hat. Der Zugriff auf die Online-Beweise kann wahlweise über die QR-Codes erfolgen, die neben den entsprechenden Aufgaben abgedruckt sind, oder über die Seite

<https://banane.mathi.uni-heidelberg.de>

NutzerIn: gast  
Kennwort: ptlabv

Für Unterstützung beim Layout danken wir Frau Bianca Alton sowie für die Betreuung Frau Dr. Annika Denkert vom Verlag Springer Spektrum.

Heidelberg im April 2019

Rolf Busam  
Denis Vogel

## Vorwort zur 1. Auflage

Bei dem vorliegenden Band haben wir uns von denselben Zielen und Vorstellungen leiten lassen, die wir schon beim „Prüfungstrainer Analysis“ verfolgt haben. Unsere Idee war es, die zentralen Begriffe der Linearen Algebra in einer knappen und zielgerichteten Form zu rekapitulieren, und zwar in einer Weise, die Studentinnen und Studenten bei der Prüfungsvorbereitung eine echte Hilfestellung bietet. Wir wollten weder eine Aufgabensammlung vorlegen noch mit den zahlreichen Lehrbüchern und den Einführungsvorlesungen zur Linearen Algebra konkurrieren. Stattdessen haben wir versucht, Fragen zu formulieren, die man in einer mündlichen Prüfung realistischerweise erwarten kann. In aller Regel wird man dort nicht damit konfrontiert, komplizierte Rechnungen und aufwendige Beweise in allen Details vorzuführen, sondern zu zeigen, dass man die zentralen Begriffe verstanden hat und sie in den wichtigsten Beweistechniken auch anwenden kann. Unter diesem Gesichtspunkt sind die Fragen ausgesucht und die Antworten formuliert worden, wobei wieder wesentlich die Erfahrungen des erstgenannten Autors aus seiner jahrelangen Tätigkeit als Dozent und Prüfer an der Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg eingeflossen sind.

Die Inhalte werden, wie schon beim „Prüfungstrainer Analysis“, in einem knappen Frage- und Antwort-Stil dargestellt. Das soll dem Leser ermöglichen, sein Wissen stichpunktartig zu überprüfen und eventuelle Lücken schnell zu entdecken.

Das Buch richtet sich an alle Studierenden, die ein gewisses mathematisches Pensum in Ihrem Studium zu erfüllen haben. Die Lineare Algebra ist heutzutage derart grundlegend für sämtliche Teilgebiete der Mathematik und in ihrer Darstellung derart einheitlich, dass es künstlich wäre, Niveauunterschiede einzuführen und ein Buch über Lineare Algebra speziell an Diplommathematiker, Lehramtskandidaten oder Informatiker zu adressieren. Es mag sein, dass es in der Analysis Unterschiede in den Ansprüchen gibt, aber über die Grundlagen der Linearen Algebra muss im Großen und Ganzen jeder dasselbe wissen. Daher sind Studenten im Haupt- oder Nebenfach Mathematik (mit den Studienzielen Diplom, Bachelor oder Lehramt) genauso herzlich eingeladen, das Buch zur Hand zu nehmen, wie Studierende, die einen Abschluss in Informatik oder in einer Naturwissenschaft anstreben.

Wir danken dem Verlagsteam von Spektrum Akademischer Verlag für die konstruktive Zusammenarbeit. Besonderer Dank gebührt unserem Lektor Herrn Dr. Rüdinger, ohne dessen kompetente und engagierte Beratung das Buch in dieser Form nicht zustande gekommen wäre, sowie Frau Alton, die uns während der Entstehungsphase in allen organisatorischen Fragen tatkräftig und geduldig unterstützt hat.

Heidelberg/Berlin im September 2008

Rolf Busam  
Thomas Epp

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Algebraische Grundlagen</b>	1
1.1	Der Begriff der Gruppe	1
1.2	Abbildungen zwischen Gruppen, Untergruppen	9
1.3	Der Signum-Homomorphismus	19
1.4	Ringe und Körper	23
1.5	Polynomringe	29
<b>2</b>	<b>Vektorräume</b>	39
2.1	Grundbegriffe	39
2.2	Basis und Dimension	47
2.3	Summen von Vektorräumen	52
<b>3</b>	<b>Lineare Abbildungen und Matrizen</b>	55
3.1	Grundbegriffe	56
3.2	Quotientenvektorräume und affine Unterräume	64
3.3	Matrizen	70
3.4	Matrizenringe	78
3.5	Koordinatenisomorphismen und Basiswechselformalismus	84
3.6	Das Gauß'sche Eliminationsverfahren	92
3.7	Lineare Gleichungssysteme Teil 1	97
3.8	Der Dualraum	105
<b>4</b>	<b>Determinanten</b>	111
4.1	Alternierende Multilinearformen	112
4.2	Determinanten von Matrizen und Endomorphismen	115
<b>5</b>	<b>Normalformentheorie</b>	127
5.1	Eigenwerte und Eigenvektoren	127
5.2	Das charakteristische Polynom	133
5.3	Einsetzen von Matrizen und Endomorphismen in Polynome	141
5.4	Die Jordan'sche Normalform	146

<b>6</b>	<b>Euklidische und unitäre Vektorräume</b> .....	155
6.1	Bilinearformen und Skalarprodukte .....	155
6.2	Normierte Räume .....	163
6.3	Orthonormalbasen und Orthonormalisierungsverfahren .....	171
6.4	Lineare Gleichungssysteme Teil 2 .....	180
6.5	Orthogonale und unitäre Endomorphismen .....	182
6.6	Die adjungierte Abbildung .....	189
6.7	Selbstadjungierte Endomorphismen .....	194
<b>7</b>	<b>Anwendungen in der Geometrie</b> .....	201
7.1	Affine Räume .....	201
7.2	Affine Abbildungen und Koordinaten .....	208
7.3	Projektive Räume .....	215
7.4	Projektive Abbildungen und Koordinaten .....	220
7.5	Invarianten von Projektivitäten .....	226
7.6	Projektive Quadriken .....	234
7.7	Affine Quadriken .....	245
	<b>Literatur</b> .....	251
	<b>Symbolverzeichnis</b> .....	253
	<b>Namen- und Sachverzeichnis</b> .....	257