Einführung in die Kombinatorik

Peter Tittmann

Einführung in die Kombinatorik

3. Auflage

Springer Spektrum

Peter Tittmann
Hochschule Mittweida
Mittweida, Deutschland

ISBN 978-3-662-58920-5 ISBN 978-3-662-58921-2 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-58921-2

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Planung und Lektorat: Andreas Rüdinger

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort

Dieses Buch liefert eine Einführung in die enumerative Kombinatorik. Das ist ein Teilgebiet der Mathematik, welches sich mit der Bestimmung der Anzahl der Elemente einer endlichen Menge beschäftigt, das heißt mit dem Zählen. Die Lösung eines solchen Problems scheint zunächst denkbar einfach zu sein. Wir listen alle Elemente der fraglichen Menge auf und zählen diese anschließend. Leider scheitert dieser Versuch in den meisten interessanten Anwendungen, da die Anzahl der Elemente der Menge schlicht zu groß für eine explizite Auflistung ist. Zudem sind wir meist nicht zufrieden, wenn wir als Antwort nur eine Zahl erhalten; meist erwarten wir eine Formel, welche die gegebene Anzahl in Abhängigkeit von Parametern liefert.

Als Beispiel betrachten wir die Aufgabe, alle Wörter mit n Buchstaben, die dem Alphabet $\{A, C, G, T\}$ angehören, zu zählen. Als Antwort erwarten wir eine Formel, welche die gesuchte Anzahl in Abhängigkeit der natürlichen Zahl n liefert. Diese Frage ist noch recht einfach. Schwieriger wird sie, wenn weitere Bedingungen dazukommen. So könnten wir fordern, dass jedes Wort genau k-mal den Buchstaben G enthält, keine benachbarten Buchstaben A auftreten und kein Wort die Buchstabenfolge CGT als Unterwort enthält.

Die Anwendungen der Kombinatorik sind zahlreich. In der Informatik ist die Anzahl von binären Bäumen mit gewissen Eigenschaften gefragt, um die Zeitkomplexität von Algorithmen zu bewerten. In der Chemie interessiert man sich für die Anzahl der Isomere. Das sind Verbindungen mit unterschiedlicher Struktur, aber gleicher Summenformel (gleicher Zusammensetzung). Um diese zu zählen, müssen wir in der Lage sein, die Anzahl nicht-isomorpher Graphen mit gegebener Knotenzahl, Kantenzahl und Gradfolge zu bestimmen. Viele Fragen der Kombinatorik haben ihren Ursprung in der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt man bei einem Wurf mit vier Spielwürfeln die Augensumme 14? Um diese Frage zu beantworten, müssen wir zunächst ermitteln, wie viele Lösungen die Gleichung $v + x + y + z = 14$ hat, wenn v, x, y, z nur ganze Zahlen zwischen 1 und 6 sein dürfen.

Das vorliegende Buch stellt zunächst in der ersten vier Kapiteln grundlegende Methoden der Kombinatorik vor. Dazu gehören elementare Anzahlfolgen, erzeugende Funktionen, Rekurrenzgleichungen und Summen. Insbesondere die gewöhnlichen und exponentiellen erzeugenden Funktionen bilden den Kern der modernen enumerativen Kombinatorik. Das Kap. 5 gibt eine kurze Einführung in Konzepte der Graphentheorie, die dann genutzt werden, um Anzahlprobleme auf Graphen zu lösen. Die dafür verwendeten erzeugenden Funktionen führen uns in das faszinierende Gebiet der Graphenpolynome. Zahlreiche Probleme der enumerativen Kombinatorik erfordern die Untersuchung von Mengen mit einer zusätzlichen weiteren Struktur, zum Beispiel einer Ordnungsrelation. Das sechste Kapitel behandelt geordnete Mengen, Inzidenzalgebren und die Möbius-Inversion. Eine Art Zusammenfassung und Systematisierung zum Thema erzeugende Funktionen bieten kombinatorische Klassen, die der Gegenstand des Kap. 7 sind. Symmetrien von Objekten der Kombinatorik lassen sich durch die Wirkung einer Permutationsgruppe auf eine Menge beschreiben. Abzählprobleme unter Symmetrie und Permutationen bilden den Inhalt des Kap. 8 in diesem Buch. Die letzten beiden Kapitel sind einerseits dem Zählen von Bäumen und Graphen sowie andererseits endlichen Automaten gewidmet.

Einen Hinweis zum Studium dieses Buches möchte ich geben: Nur durch Lesen des Textes kann man die enumerative Kombinatorik nicht wirklich erlernen. Ein Problemlöser wird man nur durch Lösen vieler Probleme. Daher finden Sie zahlreiche Übungsaufgaben jeweils am Kapitelende sowie deren Lösungen im hinteren Teil des Buches. Der Blick in die Lösung sollte jedoch erst nach einer intensiven Beschäftigung mit der Aufgabe erfolgen, um den eigenen Lösungsweg zu vergleichen. Weitere Probleme zum Üben kann der Studierende leicht selbst durch Abwandlung der gegebenen Beispiele und Aufgaben erzeugen.

Ich freue mich, dass dieses Buch so guten Zuspruch erfahren hat, dass es nun bereits in der dritten Auflage erscheint. Die Neuauflage nutzte ich, um einige kleine Fehler zu beseitigen und ein neues Kapitel über kombinatorische Klassen sowie einen Abschnitt zum Zuverlässigkeitspolynom aufzunehmen. Für Hinweise zur Gestaltung des Buches, zur Verbesserung des Textes und zum Umgang mit dem Satzsystem LaTeX möchte ich mich bei André Pönitz, Anja Kohl, Grit Fischer, Melanie Gerling und Nikolai Giesbrecht bedanken. Ich danke auch allen Lesern der ersten Auflagen, die durch Hinweise auf Fehler zur Verbesserung des Werkes beigetragen haben. Ganz herzlich danke ich Herrn Dr. Andreas Rüdinger vom Springer-Spektrum-Verlag für die angenehme Zusammenarbeit (auch schon bei den ersten beiden Auflagen) und für die Ermutigung zu einer neuen erweiterten Auflage. Frau Bianca Alton vom Springer-Verlag danke ich für die Beratung und Unterstützung bei allen Problemen des Buchsatzes.

28. Februar 2019 Peter Tittmann

Inhaltsverzeichnis