

Grundlagen der ebenen Geometrie

Hendrik Kasten · Denis Vogel

Grundlagen der ebenen Geometrie

 Springer Spektrum

Hendrik Kasten
Mathematisches Institut
Universität Heidelberg
Heidelberg, Deutschland

Denis Vogel
Mathematisches Institut
Universität Heidelberg
Heidelberg, Deutschland

ISBN 978-3-662-57620-5 ISBN 978-3-662-57621-2 (eBook)
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-57621-2>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2018

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Verantwortlich im Verlag: Annika Denkert

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort

Das vorliegende Buch ist aus unserem gemeinsamen Skript zur Vorlesung „Einführung in die Geometrie“ entstanden, die wir seit 2008 regelmäßig in Heidelberg lesen. Es soll eine auf den mathematischen Anfängervorlesungen aufbauende Einführung in die axiomatische Geometrie geben. Diese ist ein wundervolles Betätigungsfeld für die Studierenden, denn sie können das mathematische Argumentieren an einer Theorie üben, die sehr anschaulich und ihnen aus der Schule bereits vertraut ist. Trotzdem lauern hier unserer Erfahrung nach einige Fallstricke: In den Übungen zu unseren Vorlesungen haben wir beobachtet, dass Studierende gelegentlich Schwierigkeiten hatten, anschaulich entwickelte graphische Beweise korrekt auszuformulieren, oder zusätzliche Fälle übersahen, die von ihren Zeichnungen nicht wiedergegeben wurden. Aus diesem Grund haben wir uns bemüht, die Buchinhalte mit derselben Gründlichkeit und Präzision und mit denselben Methoden auszuarbeiten, wie sie in den Anfängervorlesungen vermittelt werden. Unser Ziel war hierbei eine gleichermaßen gut zugängliche wie wissenschaftlich exakte Darstellung.

Im Kontext der ebenen Geometrie ist uns die Frage nach dem Zusammenhang und dem Wechselspiel zwischen axiomatischer und analytischer Geometrie sehr wichtig. Häufig werden diese Zugänge voneinander getrennt vermittelt, was bei vielen Studierenden zu dem Glauben führt, sie hätten nur wenig miteinander zu tun. Um darzulegen, dass sie vielmehr zwei Seiten derselben Medaille sind, verwenden wir viel Mühe auf die Herleitung des von uns als „Hauptsatz für euklidische Ebenen“ bezeichneten Satzes, der besagt, dass jede euklidische Ebene isomorph zur euklidischen Standardebene ist. Nach Beweis des Hauptsatzes stehen uns sowohl synthetische als auch analytische Argumente zur Verfügung. Wir verwenden im weiteren Verlauf dann auch Argumente beider Arten, so wie es uns an der jeweiligen Stelle geeigneter erscheint.

Viel Platz haben wir auch dem Nachweis dafür eingeräumt, dass das Poincaré'sche Kreismodell der hyperbolischen Ebene ein gültiges Beispiel für eine nichteuklidische Geometrie ist. Auch hier haben wir, unserem Leitprinzip der Gründlichkeit und Präzision folgend, versucht, eine detaillierte und lückenlose Darstellung zu geben.

Exemplarisch seien hierzu die das Thema vorbereitenden Ausführungen zur Winkeltreue der Inversion am Kreis genannt.

Aufgrund der Vielzahl interessanter Fragestellungen in der ebenen Geometrie war es uns nicht möglich, alle Themen gleichermaßen zu behandeln. Bei der Stoffauswahl haben wir dem axiomatischen Aufbau der ebenen Geometrie und den damit unmittelbar zusammenhängenden Fragen Vorrang gegeben.

An dieser Stelle möchten wir noch auf eine Besonderheit unserer Notation hinweisen: Da wir die Axiome der euklidischen Ebene sukzessive einführen, würde es ohne weitere Klarstellung ein gewisses Maß an Recherche erfordern, herauszufinden, welche Axiome in den Beweis einer konkreten Aussage eingegangen sind. Zur Erhöhung der Übersichtlichkeit haben wir daher Kurzschreibweisen eingeführt, die es erlauben, sofort abzulesen, unter Voraussetzung welcher Axiome eine Aussage bewiesen wurde. Einen Überblick über diese Kurzschreibweisen gibt das Abkürzungsverzeichnis.

Abschließend möchten wir einige Bücher erwähnen, an denen wir uns als Dozenten orientiert und die wir sehr zu schätzen gelernt haben. Das sind die Bücher von Borsuk-Szmielew [BS], Greenberg [Gre], Kay [Kay], Koecher-Krieg [KK] und Martin [Mar]. Außerdem möchten wir uns bei unseren Kollegen bedanken, die im Laufe der Jahre dazu beigetragen haben, die Vorlesung stetig zu verbessern. Genannt seien hier Ralf Butenuth, Michael Caspari, Peter Gräf, Andreas Ott und Johannes Schmidt. Zu guter Letzt bedanken wir uns beim Springer-Verlag und insbesondere bei Frau Denkert für die tolle Zusammenarbeit.

Heidelberg, April 2018

*Hendrik Kasten
Denis Vogel*

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Euklids <i>Elemente</i>	1
1.2	Die analytische Geometrie	4
1.3	Hilberts <i>Grundlagen der Geometrie</i>	5
2	Inzidenzgeometrie	7
2.1	Inzidenzebenen	7
2.2	Affine Ebenen	12
2.3	Projektive Ebenen	18
2.4	Der Zusammenhang zwischen affinen und projektiven Ebenen	21
2.5	Das Dual einer projektiven Ebene	26
2.6	Affine und projektive Schnittpunktsätze	31
	Übungsaufgaben	39
3	Hilbertebenen	43
3.1	Die Anordnungsaxiome	43
3.2	Die Kongruenzaxiome für Strecken	56
3.3	Die Kongruenzaxiome für Winkel	61
3.4	Ergänzungswinkel, Gegenwinkel und rechte Winkel	73
3.5	Orthogonalität und Parallelität	76
3.6	Der Kongruenzsatz für Dreiecke	82
3.7	Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende	86
3.8	Innen- und Außenwinkel im Dreieck	89
3.9	Kreise	93
	Übungsaufgaben	97
4	Der Hauptsatz	101
4.1	Das Vollständigkeitsaxiom	101
4.2	Euklidische Ebenen	105
4.3	Die Dreiecksungleichung	106
4.4	Parallelprojektionen	109

4.5	Streckenmaße	118
4.6	Ähnlichkeitsabbildungen	125
4.7	Koordinatensysteme	135
4.8	Der Beweis des Hauptsatzes	144
	Übungsaufgaben	150
5	Euklidische Geometrie	155
5.1	Dreiecke in der euklidischen Standardebene	155
5.2	Kreise in der euklidischen Standardebene	164
5.3	Die Inversion am Kreis	180
5.4	Schnittpunktsätze in der euklidischen Standardebene	201
	Übungsaufgaben	207
6	Geometrische Konstruktionen	211
6.1	Geometrische Konstruierbarkeitsprobleme	211
6.2	Konstruktionen mit Zirkel und Lineal	214
6.2.1	Regelmäßige n -Ecke	225
6.2.2	Die Winkeldreiteilung	235
6.2.3	Die Würfelverdopplung	236
6.2.4	Die Quadratur des Kreises	237
6.3	Der Zirkel und der Satz von Mohr-Mascheroni	238
6.4	Das Lineal und der Satz von Poncelet-Steiner	250
	Appendix	262
	Übungsaufgaben	265
7	Nichteuklidische Geometrie	267
7.1	Hyperbolische Ebenen	268
7.2	Hyperbolische Geometrie	290
7.3	Eine elliptische Ebene	302
7.4	Elliptische Geometrie	313
	Übungsaufgaben	323
	Literaturverzeichnis	327
	Sachverzeichnis	329

Abkürzungsverzeichnis

Die folgenden Kurzschreibweisen dienen dazu, die Formulierungen der von uns gezeigten Resultate zu vereinfachen und leichter erkennbar zu machen, welche Axiome in die jeweiligen Beweise eingehen.

- (aff)** Sei $\mathbb{A} = (\mathbf{P}, \mathbf{G})$ eine affine Ebene.
- (E)** Sei $\mathbb{E} = (\mathbb{R}^2, \mathbf{G}_{\mathbb{R}}, \star, \cong, \simeq)$ die euklidische Standardebene.
- (E)** Sei $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$ eine euklidische Ebene.
- (\mathbb{H}_k)** Sei $\mathbb{H}_k = (\mathbf{P}_k, \mathbf{G}_k, \star_k, \cong_k, \simeq_k)$ das Poincaré'sche Kreismodell.
- (H)** Sei $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$ eine Hilbertebene.
- (H + P)** Sei $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$ eine Hilbertebene, in der das Parallelenaxiom (P) gilt.
- (H + V)** Sei $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$ eine Hilbertebene, in der das Vollständigkeitsaxiom (V) gilt.
- (I)** Sei (\mathbf{P}, \mathbf{G}) eine Inzidenzebene.
- (I + A)** Sei (\mathbf{P}, \mathbf{G}) eine Inzidenzebene, die zusammen mit der Anordnung \star die Anordnungsaxiome erfüllt.
- (I + A + K)** Sei (\mathbf{P}, \mathbf{G}) eine Inzidenzebene, die zusammen mit der Anordnung \star die Anordnungsaxiome und zusammen mit der Relation \cong auf \mathbf{S} die Kongruenzaxiome für Strecken erfüllt.
- (Koord)** Sei x ein Strahl mit Anfangspunkt O , sei g die eindeutig bestimmte Gerade, die den Strahl x enthält, und sei H eine Seite von g . Des Weiteren sei $e \in \mathbb{S}$.
- (proj)** Sei $\mathbb{P} = (\mathbf{P}, \mathbf{G})$ eine projektive Ebene.