Grundlagen der ebenen Geometrie

Hendrik Kasten · Denis Vogel

Grundlagen der ebenen Geometrie

Springer Spektrum

Hendrik Kasten
Mathematisches Institut
Universität Heidelberg
Heidelberg, Deutschland

Denis Vogel
Mathematisches Institut
Universität Heidelberg
Heidelberg, Deutschland

ISBN 978-3-662-57620-5 ISBN 978-3-662-57621-2 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-57621-2

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Verantwortlich im Verlag: Annika Denkert

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort

Das vorliegende Buch ist aus unserem gemeinsamen Skript zur Vorlesung „Einführung in die Geometrie“ entstanden, die wir seit 2008 regelmäßig in Heidelberg lesen. Es soll eine auf den mathematischen Anfängervorlesungen aufbauende Einführung in die axiomatische Geometrie geben. Diese ist ein wundervolles Betätigungsfeld für die Studierenden, denn sie können das mathematische Argumentieren an einer Theorie üben, die sehr anschaulich und ihnen aus der Schule bereits vertraut ist. Trotzdem lauern hier unserer Erfahrung nach einige Fallstricke: In den Übungen zu unseren Vorlesungen haben wir beobachtet, dass Studierende gelegentlich Schwierigkeiten hatten, anschaulich entwickelte graphische Beweise korrekt auszuformulieren, oder zusätzliche Fälle übersahen, die von ihren Zeichnungen nicht wiedergegeben wurden. Aus diesem Grund haben wir uns bemüht, die Buchinhalte mit derselben Gründlichkeit und Präzision und mit denselben Methoden auszuarbeiten, wie sie in den Anfängervorlesungen vermittelt werden. Unser Ziel war hierbei eine gleichermaßen gut zugängliche wie wissenschaftlich exakte Darstellung.

Im Kontext der ebenen Geometrie ist uns die Frage nach dem Zusammenhang und dem Wechselspiel zwischen axiomatischer und analytischer Geometrie sehr wichtig. Häufig werden diese Zugänge voneinander getrennt vermittelt, was bei vielen Studierenden zu dem Glauben führt, sie hätten nur wenig miteinander zu tun. Um darzulegen, dass sie vielmehr zwei Seiten derselben Medaille sind, verwenden wir viel Mühe auf die Herleitung des von uns als „Hauptsatz für euklidische Ebenen“ bezeichneten Satzes, der besagt, dass jede euklidische Ebene isomorph zur euklidischen Standardebene ist. Nach Beweis des Hauptsatzes stehen uns sowohl synthetische als auch analytische Argumente zur Verfügung. Wir verwenden im weiteren Verlauf dann auch Argumente beider Arten, so wie es uns an der jeweiligen Stelle geeigneter erscheint.

Viel Platz haben wir auch dem Nachweis dafür eingeräumt, dass das Poincaré’sche Kreismodell des hyperbolischen Ebene ein gültiges Beispiel für eine nichteuklidische Geometrie ist. Auch hier haben wir, unserem Leitprinzip der Gründlichkeit und Präzision folgend, versucht, eine detaillierte und lückenlose Darstellung zu geben.

Exemplarisch seien hierzu die das Thema vorbereitenden Ausführungen zur Winkeltreue der Inversion am Kreis genannt.

Aufgrund der Vielzahl interessanter Fragestellungen in der ebenen Geometrie war es uns nicht möglich, alle Themen gleichermaßen zu behandeln. Bei der Stoffauswahl haben wir dem axiomatischen Aufbau der ebenen Geometrie und den damit unmittelbar zusammenhängenden Fragen Vorrang gegeben.

An dieser Stelle möchten wir noch auf eine Besonderheit unserer Notation hinweisen: Da wir die Axiome der euklidischen Ebene sukzessive einführen, würde es ohne weitere Klarstellung ein gewisses Maß an Recherche erfordern, herauszufinden, welche Axiome in den Beweis einer konkreten Aussage eingegangen sind. Zur Erhöhung der Übersichtlichkeit haben wir daher Kurzschreibweisen eingeführt, die es erlauben, sofort abzulesen, unter Voraussetzung welcher Axiome eine Aussage bewiesen wurde. Einen Überblick über diese Kurzschreibweisen gibt das Abkürzungsverzeichnis.

Abschließend möchten wir einige Bücher erwähnen, an denen wir uns als Dozenten orientiert und die wir sehr zu schätzen gelernt haben. Das sind die Bücher von Borsuk-Szmielew [BS], Greenberg [Gre], Kay [Kay], Koecher-Krieg [KK] und Martin [Mar]. Außerdem möchten wir uns bei unseren Kollegen bedanken, die im Laufe der Jahre dazu beigetragen haben, die Vorlesung stetig zu verbessern. Genannt seien hier Ralf Butenuth, Michael Caspari, Peter Gräf, Andreas Ott und Johannes Schmidt. Zu guter Letzt bedanken wir uns beim Springer-Verlag und insbesondere bei Frau Denkert für die tolle Zusammenarbeit.

Heidelberg, April 2018

Hendrik Kasten
Denis Vogel

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis

Die folgenden Kurzschreibweisen dienen dazu, die Formulierungen der von uns gezeigten Resultate zu vereinfachen und leichter erkennbar zu machen, welche Axiome in die jeweiligen Beweise eingehen.

(aff)	Sei $\mathbb{A} = (\mathbf{P}, \mathbf{G})$ eine affine Ebene.
$(\mathbb{E})$	Sei $\mathbb{E} = (\mathbb{R}^2, \mathbf{G}_{\mathbb{R}}, \star, \cong, \simeq)$ die euklidische Standardebene.
(E)	Sei $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$ eine euklidische Ebene.
$(\mathbb{H}_k)$	Sei $\mathbb{H}_k = (\mathbf{P}_k, \mathbf{G}_k, \star_k, \cong_k, \simeq_k)$ das Poincaré'sche Kreismodell.
(H)	Sei $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$ eine Hilbertebene.
(H + P)	Sei $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$ eine Hilbertebene, in der das Parallelenaxiom (P) gilt.
(H + V)	Sei $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong, \simeq)$ eine Hilbertebene, in der das Vollständigkeitsaxiom (V) gilt.
(I)	Sei $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ eine Inzidenzebene.
(I + A)	Sei $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ eine Inzidenzebene, die zusammen mit der Anordnung $\star$ die Anordnungsaxiome erfüllt.
(I + A + K)	Sei $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ eine Inzidenzebene, die zusammen mit der Anordnung $\star$ die Anordnungsaxiome und zusammen mit der Relation $\cong$ auf **S** die Kongruenzaxiome für Strecken erfüllt.
(Koord)	Sei x ein Strahl mit Anfangspunkt O, sei g die eindeutig bestimmte Gerade, die den Strahl x enthält, und sei H eine Seite von g. Des Weiteren sei $e \in \mathbb{S}$.
(proj)	Sei $\mathbb{P} = (\mathbf{P}, \mathbf{G})$ eine projektive Ebene.