
EMIL@A-stat

Medienreihe zur angewandten Statistik

Reihe herausgegeben von

U. Kamps, RWTH Aachen, Institut für Statistik und Wirtschaftsmathematik,
Aachen, Deutschland

Weitere Bände in der Reihe <http://www.springer.com/series/5333>

Erhard Cramer · Johanna Nešlehová

Vorkurs Mathematik

Arbeitsbuch zum Studienbeginn in
Bachelor-Studiengängen

7., überarbeitete und ergänzte Auflage

 Springer Spektrum

Erhard Cramer
Institut für Statistik und Wirtschaftsmathematik
RWTH Aachen
Aachen, Deutschland

Johanna Nešlehová
Mathematics and Statistics
McGill University
Montreal, Kanada

EMIL@A-stat

ISBN 978-3-662-57493-5

ISBN 978-3-662-57494-2 (eBook)

<https://doi.org/10.1007/978-3-662-57494-2>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2005, 2006, 2008, 2009, 2012, 2015, 2018
Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Verantwortlich im Verlag: Iris Ruhmann

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorbemerkung

Mathematisches Schulwissen wird in Vorlesungen vieler Studiengänge als bekannt und vollständig verstanden vorausgesetzt. In der Realität zeigt sich jedoch, dass dieser Anspruch zunehmend nicht erfüllt ist und Studierende oft Schwierigkeiten haben, dem Inhalt einer einführenden Veranstaltung zur Mathematik oder Statistik zu folgen. Zur Schließung vorhandener Lücken werden daher oft Vorkurse oder so genannte „Brückenkurse“ angeboten, die das Schulwissen beginnend bei Mengenlehre und Bruchrechnung aufbereiten. Aus einem derartigen Kurs, der von den Autoren an der Universität Oldenburg mehrfach durchgeführt wurde, ist auch die Idee zu diesem Buch entstanden. Der *Vorkurs Mathematik* präsentiert die bis zur Oberstufe des Gymnasiums vermittelte Mathematik in einer Form, die einerseits das Selbststudium ohne weitere Betreuung erlaubt und andererseits den Einsatz des Buchs als Begleittext zu einem Vorkurs unterstützt. Dazu enthält er neben einer ausführlichen Darstellung der Inhalte und einer großen Anzahl von Beispielen eine Vielzahl von Aufgaben mit ausführlichen Lösungen, die Lernende bei der (selbstständigen) Einübung des Stoffs sowie der Analyse der eigenen Bearbeitung unterstützen.

Als ein weiterer zentraler Aspekt enthält dieses Buch viele Beispiele aus der angewandten Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Diese Bereiche stellen ein wichtiges Anwendungsfeld der Mathematik dar und liefern somit die Motivation für die benötigte Mathematik. Die Darstellung in diesem Buch trägt diesem Ziel auch dadurch Rechnung, dass sie Themen wie z.B. Funktionen, Mengen, Folgen etc. und Problemstellungen aufgreift, die in der Statistik von Bedeutung sind. Dabei werden zwangsläufig Begriffe eingeführt, deren inhaltliche Relevanz sich erst im Rahmen einer Veranstaltung zur Statistik erschließt. Eine vertiefende Diskussion sowie der Aufbau eines Verständnisses für diese Begriffe kann und soll hier nicht geleistet werden. Ein Vorteil dieses Ansatzes besteht darin, dass Lernende den Umgang mit Begriffen einüben und den mathematischen Gehalt des Begriffs realisieren. Insofern eröffnet dieser Zugang einen wichtigen Beitrag zum abstrakten Denken und bietet zudem Wiedererkennungseffekte in Veranstaltungen zur Statistik. Zudem kann der Vorkurs begleitend zu einer Statistikveranstaltung genutzt werden, um mathematische Zusammenhänge aufzuarbeiten. Statistische Fachbegriffe können in einführenden Büchern wie z.B. Burkschat, Cramer und Kamps (2012) und Cramer und Kamps (2017) nachgelesen werden.

Der Vorkurs umfasst in zwölf Kapiteln das in Bachelor-Studiengängen benötigte mathematische Schulwissen, wobei ein großer Teil der in Grundvorlesungen zur Statistik vorausgesetzten Mathematikkennntnisse abgedeckt wird. Ausführlicher als in der Schule werden für die Statistik bedeutsame Themen wie *Summen- und Produktzeichen* oder *Folgen und Reihen* behandelt. Einige weiterführende Konzepte wie Funktionen mehrerer Veränderlicher sind nicht enthalten und müssen an anderer Stelle nachgelesen werden (s. z.B. Kamps, Cramer und Oltmanns, 2009).

Der *Vorkurs Mathematik* unterscheidet sich von anderen Lehrbüchern durch die inhaltliche Konzeption, die Art der Darstellung und die problem- und zielorientierte Aufbereitung. Insbesondere werden folgende Aspekte berücksichtigt:

- Alle vorgestellten Begriffe werden ausführlich erläutert und – sofern sinnvoll – graphisch veranschaulicht. Dabei ist die Wiederholung von bereits vorgestellten Inhalten beabsichtigt, um den Lernenden die Möglichkeit zu geben, die Themen selbstständig zu erarbeiten und einzuüben.
- Die Methoden und Verfahren werden durch viele Beispiele aus der angewandten Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung illustriert.
- Ergänzend zur formalen Darstellung werden Begriffe und Eigenschaften durchgehend auch verbal eingeführt bzw. erläutert.
- Die große Auswahl an Aufgaben und deren ausführliche Lösungen unterstützen das selbstständige Lernen und ermöglichen eine effiziente Selbstkontrolle. Das Nachschlagen einer Lösung zu einer Aufgabe (und umgekehrt) wird durch ein einfaches Verweissystem erleichtert: An einer Aufgabe (Lösung) befindet sich jeweils ein Verweis auf die Seite, auf der die zugehörige Lösung (Aufgabe) abgedruckt ist.
- Die Gestaltung dieses Buchs ist an die modulare Online-Präsentation der Inhalte in der Lehr- und Lernumgebung EMILeA-stat angelehnt*. Bezeichnungen, Definitionen, Beispiele und Regeln sind im Buch graphisch hervorgehoben.
- Wichtige Stellen im Text, die einer besonderen Aufmerksamkeit bedürfen, werden auf dem Rand zusätzlich mit dem Achtungssymbol markiert.
- Zur Erhöhung der Übersichtlichkeit ist das Ende eines Beispiels mit ✕ markiert.
- Verweise auf Beispiele, Begriffe und Eigenschaften innerhalb des Lehrtexts sind einer Online-Umgebung nachempfunden. Jedem ³⁴⁹Verweis ist zur schnellen Orientierung die zugehörige Seitenzahl zugeordnet, so dass ein Umweg über den Index entfallen kann.
- Weitere Elemente zur besseren Orientierung sind ein ausführlicher Index und ein strukturiertes Abkürzungs- und Symbolverzeichnis, das neben einer kurzen Erläuterung auch den Verweis auf eine Textstelle enthält.
- Die zweifarbige Umsetzung ermöglicht die Hervorhebung wesentlicher Aspekte und die optische Strukturierung der Inhalte. Zudem werden Rechenschritte und Argumentationen durch die Kennzeichnung von Änderungen deutlicher gemacht.



*s. <http://emilea-stat.rwth-aachen.de>

Aus dem Vorwort zur 1. Auflage

Bei der Entstehung dieses Buchs wurden wir von Freunden und Kollegen in vielerlei Hinsicht unterstützt. Herr Prof. Dr. Udo Kamps hat uns als Herausgeber der EMILeA-stat-Medienreihe zu diesem Projekt eingeladen und es in seiner Entstehung begleitet. Wir danken ihm weiterhin für einige wertvolle Anregungen, die zum Gelingen des Buchs beigetragen haben. Herrn Clemens Heine gilt unser Dank für die ausgezeichnete Zusammenarbeit mit dem Springer-Verlag. Einige Aufgaben und Lösungen wurden von Frau Corinna Krautz und Herrn Christian Mohn erstellt, der auch die Durchsicht einiger Kapitel übernommen hat. Schließlich gebührt unser besonderer Dank Frau Dr. Katharina Cramer und Frau Doreen Scholze, die durch sorgfältiges Lesen des gesamten Manuskripts einige Unstimmigkeiten ausgemerzt und durch ihre Hinweise zur Verbesserung der Darstellung beigetragen haben.

Darmstadt, Oldenburg, Juni 2004

Erhard Cramer, Johanna Nešlehová

Vorwort zur 7. Auflage

Für die 7. Auflage wurde das Layout des Buchs mehrfarbig gestaltet. Dabei wurden insbesondere alle Graphiken vollständig überarbeitet und an einigen Stellen zusätzliche Illustrationen eingefügt. Zudem wurden Lösungen übersichtlicher formatiert und ergänzt sowie der gesamte Text nochmals kritisch durchgesehen.

Weitere Materialien zum Buch bzw. zum mathematischen Grundwissen werden auf der Webseite

www.vorkurs-mathematik.de

zur Verfügung gestellt. Dort können Sie uns auch Ihre Anmerkungen und Vorschläge mitteilen. Wir danken allen Leserinnen und Lesern, die uns Hinweise und Anregungen mitgeteilt haben und damit zur Verbesserung des Vorkurses beigetragen haben, sowie Frau Agnes Herrmann und Frau Iris Ruhmann für die angenehme Zusammenarbeit mit dem Springer-Verlag.

Aachen, Montreal, April 2018

Erhard Cramer, Johanna Nešlehová

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	1
1.1 Grundbegriffe	2
1.2 Zahlbereiche und elementare Verknüpfungen	7
1.3 Runden von Zahlen	22
1.4 Indizierung von Variablen	24
1.5 Aufgaben	27
1.6 Lösungen	32
2 Mengen	41
2.1 Grundbegriffe	41
2.2 Mengenoperationen	47
2.3 Rechenregeln für Mengenoperationen	56
2.4 Spezielle Mengen	58
2.5 Aufgaben	65
2.6 Lösungen	70
3 Elementare Rechenoperationen	77
3.1 Bruchrechnung	77
3.2 Potenzen	84
3.3 Wurzeln	87
3.4 Logarithmen	91
3.5 Aufgaben	96
3.6 Lösungen	102
4 Summen- und Produktzeichen	113
4.1 Summenzeichen	113
4.2 Produktzeichen	132
4.3 Fakultäten und Binomialkoeffizienten	137
4.4 Aufgaben	143
4.5 Lösungen	146
5 Funktionen	155
5.1 Relationen und Funktionen	155
5.2 Grundlegende Funktionen	163
5.3 Funktionen mit Parametern	168
5.4 Verknüpfung von Funktionen	170
5.5 Eigenschaften von Funktionen	175
5.6 Aufgaben	184
5.7 Lösungen	186

6	Gleichungen	193
6.1	Lineare Gleichungen	199
6.2	Quadratische Gleichungen	202
6.3	Bruchgleichungen	215
6.4	Wurzelgleichungen	217
6.5	Logarithmische Gleichungen	224
6.6	Exponentialgleichungen	228
6.7	Betragsgleichungen	234
6.8	Gleichungen mit Parametern	242
6.9	Substitutionsmethode	244
6.10	Lineare Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten	246
6.11	Aufgaben	255
6.12	Lösungen	259
7	Polynome und Polynomgleichungen	285
7.1	Faktorisierung	287
7.2	Substitutionsmethode	289
7.3	Polynomdivision	292
7.4	Aufgaben	297
7.5	Lösungen	299
8	Ungleichungen	313
8.1	Lineare Ungleichungen	315
8.2	Quadratische Ungleichungen	318
8.3	Bruchungleichungen	324
8.4	Betragsungleichungen	328
8.5	Weitere Ungleichungstypen	332
8.6	Aufgaben	335
8.7	Lösungen	337
9	Folgen und Reihen	349
9.1	Folgen	349
9.2	Reihen	358
9.3	Spezielle Reihen	361
9.4	Aufgaben	364
9.5	Lösungen	367
10	Grenzwerte, Stetigkeit, Differenziation	377
10.1	Grenzwerte von Funktionen	377
10.2	Stetige Funktionen	386
10.3	Differenziation	391
10.4	Differenziation parameterabhängiger Funktionen	399
10.5	Aufgaben	400
10.6	Lösungen	402

11 Integration	411
11.1 Integration und Stammfunktionen	411
11.2 Integrationsregeln	418
11.3 Integration von stückweise definierten Funktionen	421
11.4 Anwendungen in der Statistik	424
11.5 Aufgaben	430
11.6 Lösungen	434
12 Optimierung	451
12.1 Monotonieverhalten	454
12.2 Extrema	458
12.3 Konkavität und Konvexität	469
12.4 Optimierung bei stückweise definierten Funktionen	470
12.5 Anwendungen in der Statistik	471
12.6 Aufgaben	480
12.7 Lösungen	481
Literatur	493
Symbol- und Abkürzungsverzeichnis	495
Index	498