

---

# Tutorium Elektrodynamik und Relativitätstheorie

---

Björn Feuerbacher

# Tutorium Elektrodynamik und Relativitätstheorie

Ein anschaulicher Zugang für  
Studierende der Physik im Haupt- und  
Nebenfach

 Springer Spektrum

Björn Feuerbacher  
Schweinfurt, Deutschland

ISBN 978-3-662-54554-6  
DOI 10.1007/978-3-662-54555-3

ISBN 978-3-662-54555-3 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag GmbH Deutschland 2017

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Planung: Dr. Lisa Edelhäuser

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Spektrum ist Teil von Springer Nature

Die eingetragene Gesellschaft ist Springer-Verlag GmbH Germany

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

---

## Vorwort

Wer dieses Buch liest, kennt wahrscheinlich bereits den ersten Band meines Tutoriums zur Elektrodynamik, in dem statische und quasistationäre Problemstellungen besprochen wurden. Wer so weit gekommen ist, hat schon einige der größten Hürden genommen: Man beherrscht (hoffentlich) die Vektoranalysis und kennt sich auch mit Delta-„Funktionen“ und Green'schen Funktionen aus, weiß über den Separationsansatz zum Lösen von partiellen Differenzialgleichungen Bescheid, hat sich mit vollständigen Funktionensystemen beschäftigt und die (zylindrischen) Bessel-Funktionen als eine wichtige Klasse von speziellen Funktionen kennengelernt. Dieser Band baut natürlich auf diesen Vorkenntnissen auf – wer das alles verstanden hat, der sollte hier keinen größeren Problemen mehr begegnen: An vielen Stellen wird einfach das Wissen aus Band 1 nochmals in neuen Zusammenhängen angewendet. Nur in Teil III, der speziellen Relativitätstheorie, tauchen einige wirklich neue mathematische Konzepte auf, die aber im Vergleich zum Bisherigen relativ einfach verständlich sein sollten.

Dieser Band ist prinzipiell ähnlich wie der erste aufgebaut: vom Speziellen (Einfachen) zum Allgemeinen (Komplizierten). So verwendet Teil I zwar, im Gegensatz zu Band 1, prinzipiell die vollständigen Maxwell-Gleichungen – beschränkt sich aber auf den einfachen Fall, dass keine Quellen vorhanden sind. Erst Teil II bezieht auch die Quellen mit ein und zeigt, wie die Maxwell-Gleichungen in vollster Allgemeinheit gelöst werden können. Das erste Kapitel von Teil III ist dann weitgehend unabhängig von allem Vorhergehenden und setzt fast nur Kenntnisse der Mechanik voraus; erst im zweiten Kapitel wird dort wieder auf die komplette Elektrodynamik Bezug genommen und in praktisch derselben Reihenfolge alles nochmals in neuem Gewand dargestellt. Teil IV beschäftigt sich schließlich mit Themen, die für viele Leser (insbesondere solche, die später einmal in der angewandten Physik arbeiten wollen) eher unwichtig sein dürften und wohl auch in manchen Vorlesungen gar nicht erwähnt werden: die Anwendung des Lagrange- und Hamilton-Formalismus in der Elektrodynamik und Relativitätstheorie.

Wieder ist es mein Ziel, Rechnungen möglichst anschaulich zu motivieren, so dass man sich als Leser eben nicht fragen muss „Wie kommt man denn darauf?!“. Euch Lesern sollte klar werden, wie wichtig das geschickte systematische Probieren

beim Finden von Lösungen ist. An mehreren Stellen gehe ich deshalb auch darauf ein, welche prinzipiellen Möglichkeiten wir denn haben bzw. schon kennen, um die jeweilige Problemstellung anzupacken, und erläutere dann, wie man sich entscheidet, was im jeweiligen Kontext die sinnvollste Vorgehensweise ist.

Wie bereits im ersten Band verzichte ich in den meisten Kapiteln auf die Einstein'sche Summenkonvention – erst in Teil III (Spezielle Relativitätstheorie) wird sie eingeführt, ab dort dann aber auch konsequent durchgezogen. Wieder werde ich manche Rechnungen und Formeln, im Gegensatz zu anderen Büchern, (auch) mit den „kompletten“ Vektoren und Matrizen statt nur in Komponenten präsentieren.

Zu den physikalischen Voraussetzungen: Die Kenntnis der in Band 1 behandelten Themen ist natürlich selbstverständlich; die Maxwell'schen Gleichungen sollte man am besten auswendig wissen. Als Referenz sind sie und einige andere wichtige Gleichungen am Anfang des Buches aber nochmals zusammengefasst. Ansonsten werden, beispielsweise in Kap. 8, auch einige Grundkenntnisse aus der Mechanik verwendet.

Die mathematischen Voraussetzungen sind dieselben wie im ersten Band: Differenzial- und Integralrechnung für eine Variable und komplexe Zahlen sollte man natürlich beherrschen. Nach dem Durcharbeiten von Band 1 sollte man, wie oben schon erwähnt, nun auch die Vektoranalysis sicher anwenden können. Außerdem sind in diesem Band, insbesondere in Teil III (Spezielle Relativitätstheorie), einige Kenntnisse der linearen Algebra wie beispielsweise lineare Abbildungen und allgemeine Skalarprodukte hilfreich. Auch hier sei wieder auf das (noch erscheinende) Tutorium *Mathematische Methoden* verwiesen.

Die Notationen sind wie in Band 1: Für das Skalarprodukt zwischen (dreidimensionalen) Vektoren schreibe ich  $\circ$ , für das Vektorprodukt wie üblich  $\times$ . Energien werden weiterhin mit  $W$  bezeichnet, Kräfte mit  $\mathbf{K}$ , Flächennormalenvektoren mit  $\mathbf{F}$ .  $\phi$  ist das Potenzial,  $\varphi$  der Azimutalwinkel in Zylinder- und Kugelkoordinaten;  $\rho$  ist die Ladungsdichte,  $\varrho$  dagegen der Abstand zur  $z$ -Achse in Zylinderkoordinaten;  $\vartheta$  ist der Polarwinkel in Kugelkoordinaten,  $\theta$  dagegen ein beliebiger anderer Winkel.  $\mathbb{N}$  steht für die natürlichen Zahlen einschließlich der Null,  $\mathbb{N}^*$  enthält die Null dagegen nicht.

Die Literaturempfehlungen sind sehr ähnlich wie in Band 1: Jackson (2013) ist auch für die hier behandelten Themen sicher die ausführlichste, aber auch die anspruchsvollste Quelle. Auch in Fließbach (2012) findet sich wieder viel Hilfreiches; außerdem hat mir die Behandlung vieler Themengebiete in Griffiths (2011) gut gefallen. Auch hier sei nochmals auf die zusammenfassende Darstellung der theoretischen Physik in Bartelmann et al. (2014) hingewiesen, die allerdings an vielen Stellen deutlich knapper ausfällt.

### Danksagung

Zunächst möchte ich Vera Spillner danken, die mich vor ihrem Weggang vom Springer-Verlag dazu angeregt hat, dieses Tutorium zu schreiben. Besonderer Dank gebührt auch Lisa Edelhäuser, die das Lektorat dieses Projekts von Frau Spillner übernommen und alles gut zum Abschluss gebracht hat, ebenso wie Stefanie

---

Adam für die Betreuung des Projekts und die schnelle Beantwortung meiner vielen organisatorischen Fragen.

Kristin Riebe danke ich für die Erstellung der Abbildungen, Herrn Benjamin Bahr sowie Tatjana Strasser für das sorgfältige Korrekturlesen und Herrn Michael Kinza für die Korrekturen zum ersten Kapitel.

Wie bereits in Band 1 gebührt auch meiner Lerngruppe im Studium (Hannes Klehr, Wouter Kornelis, Max Urban und Alexander Wingler) Dank für die Anregung, die Elektrodynamik einmal selbst didaktisch aufzuarbeiten.

Und schließlich geht noch Dank an meine Familie für die moralische Unterstützung während der Arbeit an diesem Buch.

# Übersicht: Die Grundgleichungen der Elektrodynamik

- Maxwell-Gleichungen im Vakuum in integraler Form:

$$\oint_{\partial V} \mathbf{E} \circ d\mathbf{F} = 4\pi Q, \quad (1)$$

$$\oint_{\partial F} \mathbf{E} \circ d\mathbf{r} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_F \mathbf{B} \circ d\mathbf{F}, \quad (2)$$

$$\oint_{\partial V} \mathbf{B} \circ d\mathbf{F} = 0, \quad (3)$$

$$\oint_{\partial F} \mathbf{B} \circ d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_F \mathbf{E} \circ d\mathbf{F}. \quad (4)$$

- Maxwell-Gleichungen im Vakuum in differentieller Form:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (5)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (6)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (7)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (8)$$

- Maxwell-Gleichungen in Materie in integraler Form:

$$\oint_{\partial V} \mathbf{D} \circ d\mathbf{F} = 4\pi Q_f, \quad (9)$$

$$\oint_{\partial F} \mathbf{E} \circ d\mathbf{r} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_F \mathbf{B} \circ d\mathbf{F}, \quad (10)$$

$$\oint_{\partial V} \mathbf{B} \circ d\mathbf{F} = 0, \quad (11)$$

$$\oint_{\partial F} \mathbf{H} \circ d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c} I_1 + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_F \mathbf{D} \circ d\mathbf{F} \quad (12)$$

und in differenzieller Form:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho_f, \quad (13)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (14)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (15)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_1 + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (16)$$

Dabei sind  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  nun räumlich gemittelte Felder, bei denen mikroskopische Fluktuationen vernachlässigt werden.  $\rho_f$  ist die Dichte der freien Ladungsträger und  $\mathbf{j}_1$  die Stromdichte der Leitungsströme.

- $\mathbf{D}$  heißt elektrische Verschiebungsdichte,  $\mathbf{H}$  magnetische Feldstärke. Mit den gemittelten Feldern hängen sie folgendermaßen zusammen:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P} \quad (17)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}, \quad (18)$$

wobei die Polarisation  $\mathbf{P}$  die (räumlich gemittelte) Dichte der elektrischen Dipole ist und die Magnetisierung  $\mathbf{M}$  die (räumlich gemittelte) Dichte der magnetischen Momente.

- In linearen, homogenen, isotropen Medien gilt

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (19)$$

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (20)$$

mit den elektrischen bzw. magnetischen Suszeptibilitäten  $\chi_e$  bzw.  $\chi_m$ , der Permittivität (Dielektrizitätszahl)  $\epsilon$  und der Permeabilität  $\mu$ .



- Kontinuitätsgleichung (entspricht Ladungserhaltung  $\dot{Q} = -I$ ):

$$\dot{\rho} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \quad (21)$$

- elektromagnetische Kraft(dichte):

$$\mathbf{K} = q \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \iff \mathbf{k} = \rho \mathbf{E} + \frac{\mathbf{j}}{c} \times \mathbf{B} \quad (22)$$

---

# Inhaltsverzeichnis

## Teil I Wellenausbreitung und Optik

<b>1</b>	<b>Wellenausbreitung im Vakuum – und Beugung</b>	3
1.1	Die Wellengleichung	3
1.2	Lösungen in kartesischen Koordinaten	6
1.3	Lösungen in Kugelkoordinaten	18
1.4	Beugung	26
1.5	Aufgaben	39
<b>2</b>	<b>Wellenausbreitung in Medien – und Brechung</b>	53
2.1	Ausbreitung in nichtleitenden Medien	53
2.2	Reflexion und Brechung	60
2.3	Ausbreitung in Wellenleitern	71
2.4	Ausbreitung in leitenden Medien	81
2.5	Aufgaben	89

## Teil II Dynamik

<b>3</b>	<b>Erhaltungssätze</b>	107
3.1	Energie in den Feldern: statisch und quasistationär	107
3.2	Energieerhaltung: Der Poynting'sche Satz	121
3.3	Impulserhaltung	129
3.4	Drehimpulserhaltung	140
3.5	Aufgaben	144
<b>4</b>	<b>Vollständige Lösung der Maxwell-Gleichungen</b>	159
4.1	Potenziale und Eichung	159
4.2	Allgemeine Lösungen	170
4.3	Die Liénard-Wiechert-Potenziale	180
4.4	Aufgaben	188

<b>5</b>	<b>Abstrahlung von elektromagnetischen Wellen</b> . . . . .	203
5.1	Langsam bewegte Punktladung . . . . .	203
5.2	Bewegte Punktladung – allgemein . . . . .	215
5.3	Monochromatische Dipolstrahlung . . . . .	224
5.4	Sphärische Multipolentwicklung . . . . .	229
5.5	Aufgaben . . . . .	236
<b>Teil III Spezielle Relativitätstheorie</b>		
<b>6</b>	<b>Relativistische Mechanik</b> . . . . .	249
6.1	Grundideen der speziellen Relativitätstheorie . . . . .	249
6.2	Der Vierervektor-Formalismus . . . . .	265
6.3	Kovariante Formulierung der klassischen Mechanik . . . . .	277
6.4	Aufgaben . . . . .	289
<b>7</b>	<b>Kovariante Formulierung der Elektrodynamik</b> . . . . .	301
7.1	Elektrodynamik im Vakuum . . . . .	302
7.2	Elektrodynamik in Medien . . . . .	317
7.3	Wellenausbreitung . . . . .	323
7.4	Erhaltungssätze . . . . .	329
7.5	Vollständige Lösung der Maxwell-Gleichungen . . . . .	335
7.6	Aufgaben . . . . .	346
<b>Teil IV Ergänzungen</b>		
<b>8</b>	<b>Lagrange- und Hamilton-Formalismus in der Elektrodynamik</b> . . . . .	365
8.1	Elektrisch geladene Teilchen . . . . .	365
8.2	Elektromagnetische Felder . . . . .	374
8.3	Das Noether-Theorem für Felder . . . . .	381
8.4	Aufgaben . . . . .	389
<b>Literatur</b> . . . . .		397
<b>Sachverzeichnis</b> . . . . .		399