
Statistik für Ausfalldaten

Gisela Härtler

Statistik für Ausfalldaten

Modelle und Methoden für
Zuverlässigkeitsuntersuchungen

Gisela Härtler
Berlin, Deutschland

Vorherige Auflage: „Statistik für Ausfalldaten“, Gisela Härtler, 2008, LiLoLe-Verlag, Hagen

ISBN 978-3-662-50302-7 ISBN 978-3-662-50303-4 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-50303-4

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2016

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen.

Planung: Annika Denkert

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist Teil von Springer Nature
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer-Verlag GmbH Berlin Heidelberg

Vorwort

Dieses Buch ist eine Neubearbeitung meines Buches *Statistik für Ausfalldaten*, das 2007 im LiLoLe (LifeLongLearning)-Verlag, Hagen, erschienen ist. Der LiLoLe-Verlag wurde von Herrn Prof. Winfried G. Schneeweiss gegründet, um Lehrbücher über Teilgebiete der Technischen Zuverlässigkeit in deutscher Sprache herauszugeben. Im Jahre 2010 hat dieser Verlag seine Arbeit eingestellt. Der Springer-Verlag war in dankenswerter Weise bereit, eine überarbeitete Version meines Buches *Statistik für Ausfalldaten* in das Imprint Springer-Spektrum aufzunehmen. Es enthält die heute in der Zuverlässigkeitstechnik häufig angewandten Wahrscheinlichkeitsmodelle und statistischen Methoden.

Der Gegenstand der Technischen Zuverlässigkeit ist die Bewertung der Funktionswahrscheinlichkeit technischer Systeme und Komponenten in der Zeit. Dabei geht es um die Wahrscheinlichkeit des zufälligen Ereignisses „Ausfall“. Die Quantifizierung der Zuverlässigkeit erfolgt durch Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen oder stochastischen Prozessen, z. B. in der Form der zeitabhängigen Ausfallintensität bzw. Ausfallrate. Die in der Mathematischen Statistik bekannteste und am häufigsten angewendete Wahrscheinlichkeitsverteilung, die Normalverteilung, spielt in diesem Zusammenhang nicht die zentrale Rolle, hier ist es die Exponentialverteilung. Unter anderem deshalb findet man die in Zuverlässigkeitsuntersuchungen benötigten statistischen Methoden in den üblichen Statistiklehrbüchern nur selten.

Dieses Buch enthält eine Auswahl der wichtigsten und in Zuverlässigkeitsuntersuchungen üblichen Wahrscheinlichkeitsmodelle und statistischen Methoden. Es sind jene, die die Anwendung dominieren. Die Zuverlässigkeit technischer Erzeugnisse wird anhand von Ausfallzeitpunkten und Ausfallhäufigkeiten in Stichproben während einer begrenzten Zeit untersucht, geschätzt oder getestet. Die dabei gewonnenen Beobachtungswerte heißen Ausfalldaten (failure data). Die für ihre Beschreibung und Analyse infrage kommenden Wahrscheinlichkeitsmodelle und statistischen Methoden liegen z. B. den gültigen internationalen Normen für Zuverlässigkeitsprüfungen zugrunde. Für die Erzeugnisse der Elektrotechnik/Elektronik etwa sind das die Prüfnormen des TC 56 (Technical Committee Reliability/Availability) der IEC (International Electrotechnical

Commission)¹. Ihre Anwendung gehört in der Regel zu den Interna von Firmen, die die Prüfvorschriften meistens ziemlich formal anwenden. Diese spezielle Anwendung der Mathematischen Statistik wird von außen, etwa vom universitären Lehrbetrieb, kaum wahrgenommen. Normen enthalten grundsätzlich nicht den theoretischen Hintergrund der vorgeschriebenen Prüfschemata oder erläutern gar den des statistischen Schließens allgemein. Deswegen sind die Grundlagen der Prüfvorschriften den Anwendern – meistens Ingenieuren technischer Fachrichtungen – nur selten bzw. unzureichend bekannt. Entsprechendes Lehrmaterial in deutscher Sprache gibt es kaum. Dieses Buch wurde mit der Absicht geschrieben, diese Lücke zu schließen.

Die Daten statistischer Zuverlässigkeitsanalysen stammen, wie die anderer Anwendungsgebiete der Statistik auch, aus Stichproben. Hier sind es für die Objekte dieser Stichproben die Zeiten bis zum Ausfall, zwischen den Ausfällen oder die Ausfallhäufigkeiten in festen Zeitintervallen. Die Gewinnung solcher Daten ist meistens kostspielig. Ist die Zuverlässigkeit hoch, und das ist heute meistens der Fall, ist die Ausfallwahrscheinlichkeit gering und man steht vor einem Dilemma: Weil es sich um zerstörende Prüfungen handelt, sind die Untersuchungen teuer und die Stichproben müssen klein sein. Je höher die Zuverlässigkeit ist, umso ungenauer wird ihre Schätzung: Man benötigt eigentlich größere Stichproben. Man könnte die Beobachtung auf ein längeres Zeitintervall ausdehnen, doch dann erhält man die Ergebnisse nicht mehr rechtzeitig, sondern erst nach Jahren. Deshalb beschleunigt man die Ausfallprozesse durch eine Überlastung der Objekte und führt beschleunigte Lebensdauer- oder Degradationsuntersuchungen durch. Auch das hat unerwünschte Folgen: Es kommen zusätzliche und unbekanntere physikalisch/chemische Prozesse ins Spiel. Man ist nicht mehr sicher, ob man damit nicht weitere Ausfallursachen provoziert. Dem Entwurf von Zuverlässigkeitsexperimenten muss deshalb immer eine sorgfältige Abwägung vieler Zusammenhänge vorangehen. Im Vergleich zu den übrigen Anwendungsgebieten der Mathematischen Statistik sind die Daten (Zeitpunkte in begrenzten Zeitintervallen) stets unvollständig, und es müssen fast ausschließlich zensierte Stichproben ausgewertet werden. Das ist eine weitere Besonderheit dieses speziellen Anwendungsgebietes der Mathematischen Statistik, die im üblichen Lehrmaterial nur am Rande vorkommt.

Dieses Buch wendet sich an Leser mit einer technischen Ausbildung, die nur geringe Vorkenntnisse auf den Gebieten Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik haben. Das wird in der Darstellungsweise der Methoden berücksichtigt: Auf rein mathematisch formale Herleitungen und Beweise wird verzichtet und stattdessen auf die entsprechende Literatur verwiesen. Vieles wird verbal erklärt und durch Abbildungen und Beispiele aus dem speziellen Anwendungsgebiet veranschaulicht. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Grundgedanke der Mathematischen Statistik, die

¹Unter anderem: IEC 60605-4 Equipment Reliability Testing, Statistical Procedures for exponential distribution, IEC 60605-6 Equipment Reliability Testing, Tests for the validity of the constant failure rate or constant failure intensity assumptions. Eine vollständige Liste dieser Normen findet man unter www.iec.ch.

man bei Studenten der einschlägigen Fachrichtungen als bekannt voraussetzen könnte, werden eingeführt. Auch die Gliederung des Buches entspricht den Bedürfnissen der Anwender: Das einleitende Kap. 1 beschreibt vier typische Aufgaben- und Datenstrukturen, denen man in der Praxis häufig gegenübersteht. Auf diese beziehen sich die vier letzten Kapitel. Die Kap. 2 bis 4 sind sozusagen der „Werkzeugkasten“ und enthalten die Grundlagen für die Kap. 5 bis 8. Einige der beschriebenen Methoden, z. B. die grafischen, genügen vielleicht strengen mathematischen Prinzipien nicht, sie sind eher „unbekümmert pragmatisch“. Aber sie werden häufig angewendet und sind deswegen hier beschrieben.

Es bleibt mir, allen zu danken, die mir im Laufe vieler Jahre und nicht erst bei der Erarbeitung dieses Buches, sondern auch seiner Vorläufer, in irgendeiner Form geholfen haben, sei es, dass sie mich auf Publikationen aufmerksam machten oder auf Fehler und Irrtümer hinwiesen. Ich hoffe, dass sich das neue Buch als nützlich erweisen wird und eine freundliche Aufnahme findet.

Berlin, Deutschland
im Mai 2016

Gisela Härtler

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Anliegen und Gegenstand der Zuverlässigkeitstechnik	1
1.2	Schlussweisen der Mathematischen Statistik	6
1.3	Typische Datenerfassungen, Wahrscheinlichkeitsmodelle und statistische Methoden	8
1.3.1	Nicht reparierbare Objekte mit Totalausfällen	9
1.3.2	Reparierbare Objekte mit Totalausfällen	10
1.3.3	Nicht reparierbare Objekte mit Driftausfällen	12
1.4	Beschleunigte Tests	13
	Literatur	15
2	Wahrscheinlichkeitsmodelle	17
2.1	Zufälliges Ereignis und Wahrscheinlichkeit	17
2.2	Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten	20
2.3	Totale Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes	21
2.4	Zufallsvariable und Wahrscheinlichkeitsverteilung	22
2.4.1	Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen	22
2.4.2	Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen	23
2.4.3	Charakterisierung von Zufallsveränderlichen	24
2.5	Wichtige diskrete Verteilungen	27
2.5.1	Binomialverteilung	27
2.5.2	Poisson-Verteilung	28
2.6	Wichtige kontinuierliche Verteilungen	29
2.6.1	Normalverteilung	29
2.6.2	Chi-Quadrat-Verteilung	31
2.6.3	Rechteckverteilung	32
2.6.4	Betaverteilung	33
2.6.5	Verteilung geordneter Stichprobenwerte	35
2.6.6	Asymptotische Extremwertverteilungen	37
2.7	Mehrdimensionale Zufallsveränderliche	40

2.8	Regressionsmodell	45
	Literatur	47
3	Wahrscheinlichkeitsmodelle der Zuverlässigkeit	49
3.1	Ausfallrate	49
3.2	Lebensdauerverteilungen	54
3.2.1	Exponentialverteilung	54
3.2.2	Weibull-Verteilung	57
3.2.3	Gammaverteilung	59
3.2.4	Logarithmische Normalverteilung	60
3.3	Verallgemeinerte Lebensdauerverteilungen	64
3.3.1	Verallgemeinerte Weibull-Verteilung	64
3.3.2	Verallgemeinerte Gammaverteilung	64
3.4	Mischungen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen	65
3.5	Klassen von Lebensdauerverteilungen	66
	Literatur	68
4	Konzepte der Statistik	69
4.1	Daten und Modell in Wahrscheinlichkeitsrechnung, klassischer und Bayes-Statistik	70
4.1.1	Wahrscheinlichkeitsrechnung: Schluss vom Modell auf die Stichprobe	72
4.1.2	Statistik: Schluss von der Stichprobe auf das Modell	73
4.1.3	Bayes-Statistik: Schluss von den Daten auf die zufälligen Modellparameter	75
4.2	Stichproben und Stichprobenfunktionen	76
4.2.1	Stichprobe	77
4.2.2	Stichproben in der Zuverlässigkeitstechnik	77
4.2.3	Stichprobenfunktionen	78
4.3	Aufgabenstellungen und Methoden der Mathematischen Statistik	79
4.3.1	Schätztheorie	79
4.3.2	Annahmetests: Testen einer Hypothese über unbekannte Parameter	82
4.3.3	Anpassungstests: Testen des Wahrscheinlichkeitsmodells	86
4.4	Likelihood-Prinzip	87
4.4.1	Punktschätzung für vollständige Stichproben	87
4.4.2	Punktschätzung für zensierte Stichproben	89
4.4.3	Intervallschätzung	90
4.4.4	Relative Likelihood-Funktion und angenäherte Vertrauensintervalle	91
4.4.5	Profillinien für mehrere Parameter	93
4.5	Methode der Kleinsten Quadrate	95
4.6	Lineare Schätzung: Parameterschätzung in LS-Verteilungen	99
4.7	Grafische lineare Parameterschätzung	101

4.8	Bootstrap	104
4.9	Bayes-Statistik	108
	Literatur	109
5	Nicht reparierbare Objekte mit Totalausfällen	111
5.1	Parameterfreie Datenanalyse	112
5.1.1	Punktschätzung einer Ausfallwahrscheinlichkeit	113
5.1.2	Vertrauensintervalle	115
5.1.3	Vergleich von zwei Stichproben	116
5.2	Parametrische Datenanalyse	117
5.2.1	Exponentialverteilung	118
5.2.2	Weibull-Verteilung	130
	Literatur	143
6	Reparierbare Objekte mit Totalausfällen	145
6.1	Parameterfreie Datenauswertung	148
6.2	Parametrische Datenauswertung	152
6.2.1	Konstante Ausfallintensität (HPP)	152
6.2.2	Nicht konstante Ausfallintensität (NPP)	158
	Literatur	159
7	Nicht reparierbare Objekte mit Driftausfällen	161
7.1	Degradation und lineare Regression	163
7.2	Benötigte Daten	167
7.3	Kritischer Blick auf die Daten	168
7.4	Überschreitungswahrscheinlichkeit der Toleranzgrenze	171
7.4.1	Ein Parameter und lognormalverteilte Schätzwerte	172
7.4.2	Zwei Parameter und zweidimensionale Normalverteilung	173
7.4.3	Allgemeiner Fall	175
	Literatur	175
8	Beschleunigte Tests	177
8.1	Allgemeines	178
8.2	Beschleunigungs- oder Zeitraffungsfaktor	181
8.2.1	Verteilungen vom LS-Typ	182
8.2.2	MLS der Parameter von LS-Verteilungen	183
8.3	Temperatureinfluss: Arrhenius-Modell im ALT	184
8.4	Temperatureinfluss: Arrhenius-Modell im ADT	186
8.5	Inverses Power-Rule-Modell	187
8.6	Eyring-Modell und seine Verallgemeinerung	188
	Literatur	189
	Stichwortverzeichnis	191

Abkürzungen

ADT	Beschleunigter Degradationstest, Accelerated Degradation Test
AF	Beschleunigungsfaktor, Acceleration Factor
ALT	Beschleunigter Lebensdauertest, Accelerated Life Test
BETA[...]	Betaverteilung[Parameter]
BIN[...]	Binomialverteilung[Parameter]
BLIE	Beste lineare invariante Schätzung, Best Linear Invariant Estimation
CDF	Wahrscheinlichkeitsverteilung, Cumulative Distribution Function
CMF	Kumulative Mittelwertfunktion, Cumulative Mean Function
DATA	Daten, allgemein
DFR	Abnehmende Ausfallrate, Decreasing Failure Rate
DFRA	Im Mittel abnehmende Ausfallrate, Decreasing Failure Rate Average
DT	Degradationsexperiment, Degradation Test
E[...]	Erwartungswert[Zufallsgröße]
EXP[...]	Exponentialverteilung[Parameter]
FG	Freiheitsgrad
FIT	Einheit der Ausfallrate, 1 Ausfall pro 10^9 h, Failure In Time
GAM[...]	Gammaverteilung[Parameter]
H	Hypothese
HDR	Bereich großer Verteilungsdichte, Highest Density Region
HPP	Homogener Poisson-Prozess
i.i.d.	Unabhängig identisch verteilt, independent identically distributed
IFR	Zunehmende Ausfallrate, Increasing Failure Rate
IFRA	Im Mittel zunehmende Ausfallrate, Increasing Failure Rate Average
LOGNORM[...]	Logarithmische Normalverteilung[Parameter]
LS	Lage- und Skalenparameter
LT	Lebensdauertest, Life Test
MKQ	Methode der Kleinsten Quadrate
ML	Maximum-Likelihood
MLS	Maximum-Likelihood-Schätzung
MTBF	Mittlere Zeit zwischen den Ausfällen, Mean Time Between Failures
MTTF	Mittlere Zeit bis zum Ausfall, Mean Time To Failure

NBU	Neu besser als gebraucht, New Better Than Used
NBUE	Im Mittel neu besser als gebraucht, New Better Than Used In Expectation
NORM[...]	Normalverteilung[Parameter]
NPP	Nichthomogener Poisson-Prozess
NWU	Neu schlechter als gebraucht, New Worse Than Used
NWUE	Im Mittel neu schlechter als gebraucht, New Worse Than Used In Expectation
POISS[...]	Poisson-Verteilung[Parameter]
SAFT	Zeitraffungsmodell, Scale Accelerated Failure Time Model
SE	Standardabweichung des Mittelwertes, Standard Error
TBF	Zeit zwischen den Ausfällen, Time Between Failures
TTF	Zeit bis zum Ausfall, Time To Failure
UNI[...]	Rechteckverteilung[Parameter]
Var[...]	Varianz[Zufallsgröße]
WEIB[...]	Weibull-Verteilung[Parameter]
$\chi^2(\dots)$	Chi-Quadrat-Verteilung[Parameter]

Abbildungsverzeichnis

Abb. 1.1	Lebensdauern der Elemente in einem Lebensdauertest	10
Abb. 1.2	Beobachtungsdaten von reparierbaren Objekten	11
Abb. 1.3	Beobachtete Degradationen	12
Abb. 1.4	Logarithmus der MTTF, die bei 25 °C den Wert von 1 FIT hat; $E_A = 1$ eV (glatt), $E_A = 0,5$ eV (grob gestrichelt), $E_A = 0,2$ eV (fein gestrichelt)	14
Abb. 2.1	Binomialverteilung, $n = 20, p = 0,1$	28
Abb. 2.2	Binomialverteilung, $n = 20, p = 0,5$	28
Abb. 2.3	Poisson-Verteilung, $\lambda = 1$	29
Abb. 2.4	PDF von Normalverteilungen, $\mu = 0$ (glatt), $\mu = -3$ (gestrichelt), $\mu = 3$ (punktgestrichelt); $\sigma = 1$	31
Abb. 2.5	PDF von Normalverteilungen, $\sigma = 1$ (glatt), $\sigma = \frac{1}{2}$ (gestrichelt), $\sigma = 2$ (punktgestrichelt); $\mu = 0$	31
Abb. 2.6	PDF von Betaverteilungen, $a = b = 3$ (durchgezogen), $a = 2$, $b = 7$ (lang gestrichelt), $a = 7, b = 2$ (kurz gestrichelt), $a = b =$ $1/2$ (dünne Linie)	34
Abb. 2.7	PDF der Betaverteilung, $n = 10, r = 0$ (glatt), $r = 2$ (gestrichelt), $r = 5$ (punktgestrichelt)	34
Abb. 2.8	CDF der Betaverteilung, $n = 10, r = 0$ (glatt), $r = 2$ (gestrichelt), $r = 5$ (punktgestrichelt)	34
Abb. 2.9	Verteilung der geordneten Stichprobenwerte des 5. (glatt), 10. (gestrichelt) und 15. (punktgestrichelt) Stichprobenwertes einer Stichprobe von 30 Elementen mit $EXP[1]$	37
Abb. 2.10	Zweidimensionale Standard-Normalverteilung mit unabhängigen Komponenten	42
Abb. 2.11	Zweidimensionale Standard-Normalverteilung mit positiv abhängigen Komponenten	42
Abb. 2.12	Randverteilungsdichten zur Abb. 2.10	42
Abb. 2.13	Bedingte Verteilungsdichte von y an der Stelle $x = 1$ in Abb. 2.11	42

Abb. 2.14	Regressionskurve	46
Abb. 2.15	Bedingte Verteilungsdichten	46
Abb. 3.1	Ausfallrate als Badewannenkurve.	52
Abb. 3.2	PDF der Exponentialverteilungen mit $\lambda = 1$ (glatt), $\lambda = 1/3$ (gestrichelt)	56
Abb. 3.3	CDF der Exponentialverteilungen mit $\lambda = 1$ (glatt), $\lambda = 1/3$ (gestrichelt)	56
Abb. 3.4	PDF der Weibull-Verteilungen mit $\eta = 10$; $a = 1/2$ (gestrichelt), 1 (glatt) und 3 (kurz gestrichelt).	58
Abb. 3.5	CDF der Weibull-Verteilungen mit $\eta = 10$; $a = 1/2$ (gestrichelt), 1 (glatt) und 3 (kurz gestrichelt)	59
Abb. 3.6	PDF von $X \sim GAM[1, 1]$ (glatt), $X \sim GAM[2, 1]$ (gestrichelt), $X \sim GAM\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (punktgestrichelt)	61
Abb. 3.7	$h(t)$ zu $X \sim GAM[1, 1]$ (durchgezogen), $X \sim GAM[2, 1]$ (gestrichelt), $X \sim GAM\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (glatt)	61
Abb. 3.8	PDF $LOGNORM[\mu, \sigma]$ mit $\sigma = 1$: $\mu = 0$ (glatt), $\mu = 1$ (gestrichelt), $\mu = 2$, (punktgestrichelt)	62
Abb. 3.9	PDF $LOGNORM[\mu, \sigma]$ mit $\mu = 0$: $\sigma = 1$ (glatt), $\sigma = \frac{1}{2}$ (gestrichelt), $\sigma = 2$ (punktgestrichelt)	62
Abb. 3.10	CDF $LOGNORM[\mu, \sigma]$ mit $\sigma = 1$: $\mu = 0$ (glatt), $\mu = 1$ (gestrichelt), $\mu = 2$ (punktgestrichelt)	62
Abb. 3.11	CDF $LOGNORM[\mu, \sigma]$ mit $\mu = 0$: $\sigma = 1$ (glatt), $\sigma = \frac{1}{2}$ (gestrichelt), $\sigma = 2$ (punktgestrichelt)	63
Abb. 3.12	Ausfallrate $LOGNORM[\mu, \sigma]$ mit $\sigma = 1$: $\mu = 0$ (glatt), $\mu = 1$ (gestrichelt), $\mu = 2$, (punktgestrichelt)	63
Abb. 3.13	Ausfallrate $LOGNORM[\mu, \sigma]$ mit $\mu = 0$: $\sigma = 1$ (glatt), $\sigma = \frac{1}{2}$ (gestrichelt), $\sigma = 2$ (punktgestrichelt)	63
Abb. 4.1	90 %-Zufallsstrebereiche für \tilde{r}	72
Abb. 4.2	90 %-Vertrauensintervall für p	74
Abb. 4.3	PDF der Prioriverteilung (dünn), der Posterioriverteilung (dick) und der Likelihood-Funktion (gestrichelt)	75
Abb. 4.4	PDF der nicht-informativen Prioriverteilung (dünn), Posterioriverteilung (dick) und der Likelihood-Funktion (gestrichelt)	76
Abb. 4.5	Relative Likelihood-Funktion mit angenäherter Vertrauensgrenze	93
Abb. 4.6	Relative Likelihood-Funktion über dem Parameterraum	94
Abb. 4.7	Angenähertes Vertrauensintervall zur statistischen Sicherheit 0,9	95
Abb. 4.8	CDF von $WEIB[2,1000]$ und 0,8-Quantil $t_{0,8} = 1268,64$ h	102
Abb. 4.9	CDF von $WEIB[2,1000]$ als Gerade im Wahrscheinlichkeitsnetz	102
Abb. 4.10	20 Weibull-verteilte Zufallszahlen und unterschiedliche Darstellungspunkte: $\hat{v}_{(i,n)} = i/(n + 1)$ (schwarz), $\hat{v}_{(i,n)} = (i - 0,3)/(n + 0,4)$ (grau) und $\hat{v}_{(i,n)} = (i - 0,5)/n$ (hellgrau)	104

Abb. 4.11	Häufigkeitsverteilung der Ergebnisse von 200 Bootstrap-Stichproben für $\hat{p} = 0,5$	106
Abb. 4.12	Summenhäufigkeitsverteilung zu Abb. 4.11 mit den empirischen Quantilen $r_{0,05} = 6$ und $r_{0,95} = 13$	106
Abb. 4.13	Zehn Bootstrap-CDFs, $EXP[0,000914]$, auf den Senkrechten lassen sich die Ausfallwahrscheinlichkeiten nach 1000 und 2000 h ablesen	107
Abb. 5.1	Daten aus Beispiel 4.4 mit zweiseitigen Vertrauensbereichen	115
Abb. 5.2	Trennschärfe als Funktion der Ausfallzahl	123
Abb. 5.3	Beispiel einer Operationscharakteristik	123
Abb. 5.4	Sequenzieller Test zum Beispiel 5.2.	126
Abb. 5.5	20 Zufallszahlen mit $T \sim WEIB[2, 1000]$ im Weibull-Netz.	132
Abb. 5.6	20 Zufallszahlen $(T - \gamma) \sim WEIB[2,1000]$ im Weibull-Netz	133
Abb. 5.7	Mischverteilung im Weibull-Netz.	133
Abb. 5.8	20 Zufallszahlen $(T - 500) \sim WEIB[2,1000]$ im Weibull-Netz, $\hat{\gamma} = 0$ (schwarz), $\hat{\gamma} = t_1 = 601$ (grau)	137
Abb. 5.9	20 Zufallszahlen $(T - 500) \sim WEIB[2,1000]$ im Weibull-Netz, $\hat{\gamma} = 0$ (rechts), $\hat{\gamma} = t_1 = 601$ (links), $\hat{\gamma} = 440$ (Mitte).	138
Abb. 5.10	Mischverteilung aus Abb. 5.7, zerlegt	140
Abb. 5.11	Posterioriwahrscheinlichkeiten $f_j(t_i)$ für die Zugehörigkeit der Daten zu einer der Teilgesamtheiten (richtige Parameter: dick, geschätzte Parameter: dünn).	140
Abb. 5.12	100 Zufallswerte von $T \sim WEIB[3, 10000]$	142
Abb. 5.13	Log-Likelihood nach 1000 h	142
Abb. 5.14	Log-Likelihood nach 5000 h	142
Abb. 5.15	Log-Likelihood der vollständigen Stichprobe	142
Abb. 6.1	Ausfallzeitpunkte der Objekte, zwischen den grauen Senkrechten: Beispiel einer „Zelle“	151
Abb. 6.2	Mittelwerte und Vertrauensintervalle in diskreter Betrachtungsweise.	151
Abb. 6.3	Mittelwerte und Vertrauensintervalle nach Gl. (6.5).	152
Abb. 6.4	Schätzwerte der CMF (Punkte), lineare Regression (dick, lang gestrichelt) und Vertrauensgrenzen des HPP (dünn, kurz gestrichelt).	153
Abb. 6.5	Daten aus Tab. 6.1, zweiseitige Grenzen für $\alpha = 0,05$	157
Abb. 7.1	Degradationskurven und Driftausfälle als Überschreitung der festen Toleranzgrenze	162
Abb. 7.2	Summenhäufigkeitsverteilung $F(t)$ der Grenzüberschreitung als Funktion der Zeit	163
Abb. 7.3	Degradation von zehn Objekten und Toleranzgrenze $y = 10$	166
Abb. 7.4	Messwerte zu Abb. 7.3	166
Abb. 7.5	Log-Log-Darstellung der Daten zu Abb. 7.3	166

Abb. 7.6	Bedingte Verteilungen von $v = \text{Log } Y$, nach 100 h (kurz), 400 h (mittel) und 1000 h (lang), die Senkrechte ist die Grenze $\log G_0 = 1$	167
Abb. 7.7	Scatterplot von 30 Messwerten nach 25 und 300 h Belastung	169
Abb. 7.8	Scatterplot von 30 Messwerten nach 100 und 300 h Belastung	169
Abb. 7.9	Degradation des Leistungsparameters Y in einer Stichprobe mit einem „Ausreißer“	171
Abb. 7.10	Stichprobenquantile (Punkte) und erwartete Werte (Linie)	172
Abb. 7.11	Einige Degradationsverläufe der Stichprobe	173
Abb. 8.1	PDF der Mischverteilung in Abb. 5.7	180
Abb. 8.2	Bimodale PDF bei $T = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ (gestrichelt) und eingipflige PDF bei $50 \text{ }^\circ\text{C}$	180
Abb. 8.3	Zeitraffung durch das Arrhenius-Modell für einige Aktivierungsenergien und Temperaturdifferenzen Δ	186
Abb. 8.4	Temperatureinfluss auf die Degradation, von unten nach oben: $50 \text{ }^\circ\text{C}$, $100 \text{ }^\circ\text{C}$, $150 \text{ }^\circ\text{C}$	187