Relativistische Quantenmechanik

Georg Wolschin

Relativistische Quantenmechanik

Springer Spektrum

Prof. Georg Wolschin
Inst. Theoretische Physik
Universität Heidelberg
Heidelberg, Deutschland

ISBN 978-3-662-47107-4 ISBN 978-3-662-47108-1 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-47108-1

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Planung: Margit Maly

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Berlin Heidelberg ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
(www.springer.com)

Vorwort

Diese Vorlesung ist eine kurzgefasste Einführung in die Grundlagen der relativistischen Quantenmechanik. Sie ist konzipiert als einsemestrige, zweistündige Veranstaltung für Bachelor- und Masterstudenten; einige der fortgeschritteneren Teile können auch für Promovierende von Interesse sein.

Primäre Adressaten sind Studierende ab dem vierten Semester, die den Quantenmechanik-Grundkurs schon bearbeitet haben (oder ihn gleichzeitig hören), aber darüber hinaus relativistische Wellenleichungen kennenlernen möchten, insbesondere die Dirac-Gleichung für Fermionen, und die Klein-Gordon-Gleichung für Bosonen. Im Coulomb-Feld von wasserstoffähnlichen Kernen lassen sich mit relativistischen Wellengleichungen die elektronischen (oder myonischen) Energieniveaus und Eigenfunktionen – bis auf quantenelektrodynamische Effekte – analytisch berechnen. Entsprechendes gilt für pionische (oder kaonische) Atome.

In der Einleitung zeichne ich zunächst die Entwicklung nach, deren Ergebnis die Aufstellung Lorentz-invarianter relativistischer Wellengleichungen durch Schrödinger, Klein, Gordon und Dirac war. Das Literaturverzeichnis (jeweils am Kapitelende) enthält dementsprechend auch einige der wissenschaftshistorisch interessanten Originalarbeiten. Ziel des Buches ist es jedoch, ausgehend von der ursprünglichen Formulierung der relativistischen Quantenmechanik zu aktuellen Forschungsfragestellungen zu kommen.

Nach einem Kapitel über die Verbindung zur Galilei-invarianten nichtrelativistischen Quantenmechanik folgen die Darstellungen der Klein-Gordon- und Dirac-Gleichungen und die Untersuchung der Dirac-

Theorie im Hinblick auf Invarianzen bezüglich Paritäts-, Ladungskonjugations- und Zeitumkehrtransformation. Wenngleich in der Natur als Folge der schwachen Wechselwirkung jede dieser Symmetrieoperationen verletzt ist (die Verletzung der T-Invarianz wurde erst 2012 schlüssig nachgewiesen), zeigt sich die Dirac-Theorie mit elektromagnetischer Wechselwirkung invariant gegenüber diesen Transformationen.

Wie die Klein-Gordon-Gleichung lässt sich auch die Dirac-Gleichung mit Coulomb-Potenzial analytisch lösen, und wir können die Energieeigenwerte und Eigenfunktionen für wasserstoffähnliche Atome in geschlossener Form berechnen. Dabei wird zunächst die durch Vakuumfluktuationen erzeugte Lamb-Shift vernachlässigt. Wir können sie in einer didaktisch motivierten Überlegung abschätzen, aber erst in der Quantenelektrodynamik (QED) genau berechnen; Präzisionsmessungen bestätigen diese Theorie mit sehr hoher Genauigkeit.

Besondere Bedeutung haben Lösungen der Dirac-Gleichung für myonische Atome, da der Bohr'sche Radius des Myons wegen der großen Teilchenmasse 207-mal kleiner als der des Elektrons ist, das Myon deshalb empfindlich auf die Eigenschaften des Kerns elektromagnetisch reagiert und die Wellenfunktionen tiefliegender Zustände sehr genau bestimmt werden müssen. Die mittleren Bahngeschwindigkeiten skalieren mit der Ladungszahl Z des Kerns und werden deshalb bei schweren myonischen Atomen in tiefliegenden Niveaus ($n = 1, 2$) mit der Lichtgeschwindigkeit vergleichbar, so dass Lösungen der Schrödinger-Gleichung dort unbrauchbar sind.

Ein interessantes Beispiel der Anwendung relativistischer Wellengleichungen ist das Klein'sche Paradoxon, die unerwartet hohe Transmission relativistischer Elektronen durch eine steil ansteigende (im Idealfall senkrechte) Potenzialwand. Obwohl die Originalrechnungen von Klein und Sauter mehr als 80 Jahre zurückliegen, können wir die Voraussage bis heute nicht einwandfrei experimentell testen, da sich genügend starke Felder bisher nicht erzeugen lassen. Möglicherweise gelingt dies in Zukunft mit Hilfe elektrostatischer Barrieren in Graphen.

Die Weyl-Gleichung ähnelt der Dirac-Gleichung, gilt jedoch nur für Fermionen mit Masse $m = 0$. Anders als die Dirac-Gleichung mit endlicher Masse verletzt sie die Paritätsinvarianz und wurde deshalb erst nach der experimentellen Bestätigung der Paritätsverletzung von den Theoretikern akzeptiert. Zwar ist seit der Entdeckung der Neutrinooszillationen

(2002) klar, dass Neutrinos – wie bereits von Pauli ursprünglich vorgesehen – nicht masselos sind, sondern eine geringe Ruhemasse haben, deren genaue Bestimmung Gegenstand heutiger experimenteller Forschung ist. Dennoch kann die Weyl-Gleichung einige grundlegende Eigenschaften der Neutrinos (präziser: masseloser Fermionen) wie ihre Chiralität (Händigkeit) gut illustrieren.

Es folgt eine kurze Einführung in Prinzipien der Quantenfeldtheorie, speziell der Quantenelektrodynamik (QED) – die natürlich einen ausführlichen Kurs über dieses Thema keinesfalls ersetzen kann und soll. Entsprechendes gilt für das Schlusskapitel zu den Invarianten bei relativistischen Streuprozessen.

Einige Testaufgaben am Ende des Buches sollen als Anreiz dienen, den Stoff dieses Kurses beispielhaft auch selbst nachzurechnen: Die Mehrzahl der Lösungen ist bereits im vorhergehenden Text versteckt.

Dieter Gromes danke ich für eine kritische Durchsicht des Manuskripts und viele präzise Verbesserungen. Das ursprüngliche LaTeX-Skript hat V. Kuchta erstellt und auch aus meinen Tafelskizzen satzfertige Druckvorlagen gemacht. Für die sorgfältige Betreuung des Projekts danke ich außerdem B. Alton, M. Maly und Dr. V. Spillner vom Springer-Verlag. Hinweise auf dennoch verbleibende Ungenauigkeiten und Fehler bitte direkt an mich senden.

Heidelberg, im Juli 2015 Georg Wolschin

Inhaltsverzeichnis