# Teil II

# Die Konstruktion der reellen Zahlen

In diesem Teil geht es, anders als im ersten Teil, nicht mehr darum, eine Vielzahl von mathematischen Denkweisen einzuführen und durch Beispiele und Anwendungen zu illustrieren. Jetzt haben wir ein großes inhaltliches Ziel, auf das wir unter Einsatz dieser mathematischen Denkweisen zusteuern: Wir möchten die reellen Zahlen mathematisch korrekt konstruieren. Diese veränderte Zielsetzung schlägt sich in den Texten, aber auch in den Studienmaterialien bis hin zu den Übungen nieder. Wir befassen uns nicht mehr mit vielen unterschiedlichen Objekten, sondern konzentrieren uns auf wenige Objekte, deren Eigenschaften aber im Detail untersucht werden müssen. Es geht daher noch stärker darum, Argumente zu verinnerlichen.

Natürlich kommen die reellen Zahlen im Schulunterricht vor, in der Regel aber nur in Form der Visualisierung als „Zahlenstrahl". Solch eine Art der Darstellung ist zunächst für einen Mathematiker eher unbefriedigend, denn Fragen wie „Mit welcher Art Objekt habe ich es denn nun konkret zu tun?", „Woher kommt dieses Objekt?" und „Welche Eigenschaften besitzt es?" lassen sich unter ausschließlicher Verwendung des Zahlenstrahlmodells nicht ausreichend beantworten.

Mathematiker gehen an dieser Stelle zwei Wege, die wir mit Ihnen in diesem Teil des Buches beschreiten möchten: Einen charakterisiert der deutsche Mathematiker Leopold Kronecker (1823–1891) durch seine Aussage: „Die natürlichen Zahlen hat uns Gott gegeben, alles andere ist Menschenwerk." Wir nehmen die natürlichen Zahlen als bekannt an und überlegen, wie wir davon ausgehend die reellen Zahlen konstruieren können. Dieser Weg ist intuitiv naheliegend. Allerdings ist die Konstruktion der reellen Zahlen begrifflich nicht einfach und mathematikgeschichtlich ziemlich jung ist: etwa 150 Jahre.

Wir beschreiben daher zuerst einen alternativen Weg zu den reellen Zahlen, der häufig in den Anfängervorlesungen zur Analysis gegangen wird, weil er schneller zum Ziel führt. Er entspricht der mathematischen Vorstellung von Eleganz, wirkt aber zunächst etwas befremdlich: Wir überlegen uns eine möglichst kleine Anzahl sogenannter Axiome (siehe Kapitel 9), die eine Menge erfüllen sollen, die wir die reellen Zahlen nennen wollen. Mengen, die diese Axiome erfüllen, bezeichnet man als „vollständige geordnete Körper". Unter der Generalannahme, dass es eine solche Menge gibt, leiten wir dann weitere Eigenschaften ab. In den Anfängervorlesungen zur Analysis nimmt man so die Existenz sogar der reellen Zahlen als „gottgegeben" hin anstatt nur die Existenz der natürlichen Zahlen. In den folgenden Kapiteln werden wir dann zeigen, dass sich die Existenz einer solchen Menge von reellen Zahlen beweisen lässt, wenn man die Existenz der natürlichen Zahlen voraussetzt.

Man kann zeigen, dass sich zwei Mengen, die die Axiome eines vollständigen geordneten Körpers erfüllen, nicht wesentlich voneinander unterscheiden. Dabei lassen wir im Moment offen, wie genau man Unterschiede zwischen Mengen messen und wann man sie als „nicht wesentlich“ betrachten will. Diese im Wesentlichen eindeutige Festlegung eines vollständigen geordneten Körpers durch seine Axiome ist aber der Grund dafür, dass der in Kapitel 9 beschrittene Weg funktioniert: die Charakterisierung der reellen Zahlen durch einige Eigenschaften, aus denen man alle weiteren Eigenschaften der reellen Zahlen ableiten kann. Hätte man die Eindeutigkeit nicht, so könnte man trotzdem einen vollständigen geordneten Körper wählen, ihn die „Menge der reellen Zahlen“ nennen und damit weiterarbeiten. Zum Beispiel könnte man damit eine Differenzial- und Integralrechnung aufbauen. Genau das wird in den meisten Vorlesungen zur Analysis auch gemacht, denn nur selten führen die Dozenten einen Beweis der Eindeutigkeit vor. In der Regel passen sie aber genau auf, dass sie in ihrer Theorieentwicklung für die reellen Zahlen nur die Eigenschaften eines vollständigen geordneten Körpers benutzen. Damit ist sichergestellt, dass ihre Analysis auch für jeden anderen vollständigen geordneten Körper funktionieren würde.