

Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten

Joachim Hilgert · Max Hoffmann · Anja Panse

Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten

tutoriell und transparent

 Springer Spektrum

Joachim Hilgert
Institut für Mathematik
Universität Paderborn
Paderborn, Deutschland

Anja Panse
Institut für Mathematik
Universität Paderborn
Paderborn, Deutschland

Max Hoffmann
Paderborn, Deutschland

ISBN 978-3-662-45511-1
DOI 10.1007/978-3-662-45512-8

ISBN 978-3-662-45512-8 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2015

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen.

Planung: Dr. Andreas Rüdinger

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer-Verlag GmbH Berlin Heidelberg ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
(www.springer.com)

Vorwort

„Oh nein, nicht noch ein Mathebuch...“

Liebe Leserinnen und Leser,

an dieser Stelle möchten wir Ihnen mitteilen, wie es zu diesem Buch gekommen ist, warum es neben bereits vorhandener, sehr guter Lehr- und Übungsliteratur nun ein weiteres Buch für Studienanfänger gibt und was dieses von den meisten anderen Lehrbüchern unterscheidet.

Machen wir uns nichts vor: Ein Mathematikstudium erfordert neben fachlichem Interesse und einem gewissen Talent auch Kompetenzen im Studierverhalten, deren Bedeutung Abiturienten häufig unterschätzen und die von den meisten Dozenten stillschweigend vorausgesetzt werden. Angehende Mathematikstudierende erleben oft, dass sich die realen Anforderungen im Mathematikstudium stark von ihren Erwartungen unterscheiden. Im schlimmsten Fall führt diese Diskrepanz zu einem Studienabbruch, der nicht auf mangelnde fachliche Begabung, sondern auf Defizite im Bereich des selbstgesteuerten Lernens zurückzuführen ist.

Die Problematik ist bekannt, aber bisher nicht behoben. Dozenten diskutieren, Didaktiker forschen, Universitäten richten Unterstützungsmaßnahmen ein ... Auch wir begegnen dieser Situation und gehen mit gezielten Lehrinnovationen auf Bedürfnisse und Wünsche von Studierenden ein. Dabei liegt uns eines sehr am Herzen: Wir wollen keine Inhalte so vereinfachen, dass dadurch das fachliche Niveau sinkt. Die Studienanfänger sollen vielmehr ein realistisches Bild davon erlangen, welche Gepflogenheiten und Besonderheiten ein Mathematikstudium in sich birgt. Wir zeigen einen alternativen Weg zum Stoff auf und bieten den Studierenden durch ein Höchstmaß an Transparenz und Anleitung die nötige Unterstützung zum eigenständigen Lernen.

Was bedeutet das nun konkret? Im Rahmen des Bologna-Prozesses sind viele Änderungen von Studienplänen erfolgt. An der Universität Paderborn wurde zum Beispiel im Wintersemester 2011/12 für die Lehramtstudierenden im ersten Studiensemester die vierstündige Vorlesung *Analysis I* durch eine zweistündige Veranstaltung mit dem Titel *Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten* ersetzt. Im darauf folgenden Jahr haben wir diese Lehrveranstaltung als Dozent bzw. Übungsleiter übernommen und als traditionelle Vorlesung mit wöchentlichen Präsenz- und Hausübungen durchgeführt.

Wie viele andere Dozenten haben auch wir die klassischen Probleme und Schwierigkeiten bei Anfängerveranstaltungen erlebt: Studierende arbeiten die Vorlesung kaum nach; sie verwenden Übungsaufgaben nur zusammen mit Musterlösungen als Mittel der Klausurvorbereitung, indem sie die Lösungen kurzfristig auswen-

dig lernen, und es findet kaum Kommunikation zwischen Dozenten und Hörern statt. Diese Probleme sind allgemein zu beobachten, sie treten aber speziell in der Ausbildung angehender Lehrerinnen und Lehrer auf. Befragungen der Studierenden bestätigten unsere eigenen Beobachtungen: Studierende stellen die Frage nach dem Sinn der angebotenen Inhalte; welche Inhalte prüfungsrelevant sind, ist ihnen nicht klar; den eigenen Leistungsstand können sie nicht realistisch einschätzen; die Arbeitsbelastung empfinden als zu hoch.

Dieser Problematik haben wir uns mit einem innovativen Konzept gestellt. Dieses Buch bildet unsere Ideen, Vorschläge und Maßnahmen zur Veränderung der geschilderten Situation ab. Im WS 2013/14 haben wir die Veranstaltung *Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten* erneut angeboten, allerdings mit einem neuen Konzept, das wir „tutorielle Vorlesung“ genannt haben.

Hierbei setzen wir zwei Schwerpunkte. Zum einen haben wir bereits früher eingesetzte, hilfreiche Elemente des Unterrichtens intensiviert und ausgebaut: Die Transparenz der zu lernenden Inhalte wurde durch präzise ausformulierte Lernziele erhöht, die Möglichkeiten zur Selbstdiagnose wurden durch die Einführung von Voting-Fragen und verstärkte Rückmeldung des erreichten Leistungsstandes durch Testklausuren ausgebaut, und der Anwendungsbezug wurde durch systematischen Einsatz von Schnittstellenaufgaben verdeutlicht.

Der zweite Schwerpunkt ist die Unterstützung des Erwerbs zweier zentraler Kompetenzen, die essenzielle Grundlagen für das erfolgreiche Mathematikstudium darstellen: das sinnentnehmende Lesen mathematischer Texte und das Schreiben mathematischer Texte.

Aus den Erfahrungen dieser neu konzipierten Veranstaltung ist dieses Buch erwachsen. Wir bieten Studierenden mit diesem Buch also eine doppelte Chance: Sie können sich nicht nur mathematische Inhalte aneignen, sondern insbesondere wesentliche Kompetenzen trainieren, die für ein erfolgreiches Studium entscheidend sein können. Bei richtigem Gebrauch erhalten sie stets Feedback zum Lernerfolg ihres Studierverhaltens und der Beherrschung der eingesetzten Arbeitstechnik. Sie lernen, den eigenen Leistungsstand einzuschätzen, ihn selbst zu beeinflussen und ihn merklich zu verbessern.

Dezember 2014, Joachim Hilgert, Max Hoffmann und Anja Panse

Gebrauchsanleitung für Studierende

Liebe Studierende,

mit dem vorliegenden Werk laden wir Sie dazu ein, einige Gebiete der Welt der Schulmathematik von einem höheren Standpunkt aus zu erkunden. Dabei bietet sich Ihnen die Möglichkeit, einen Blick hinter die Kulissen zu werfen und unter anderem Antworten darauf zu erhalten, warum die Ihnen bekannten Konzepte aus der Schule funktionieren und ob sie sich eventuell verallgemeinern lassen. Als Beispiel erinnern wir uns an die Quersummenregel als Test für die Teilbarkeit durch die Zahl Drei. Hier ist auf den ersten Blick nicht unbedingt ersichtlich, was eine *Quersumme* mit Teilbarkeit zu tun hat. Außerdem stellt sich die Frage, ob es auch Teilbarkeitsregeln für weitere Zahlen, wie vielleicht Sieben oder Elf, gibt.

Mit diesem Buch erhalten Sie die Möglichkeit, sich mathematische Inhalte Ihrem eigenen Lernstil entsprechend zu erarbeiten und Ihren Lernstand selbst zu überprüfen und zu verbessern. Sie können sich diesem Vorhaben ohne Verwendung weiterer Literatur widmen, vorausgesetzt, Sie haben die Möglichkeit, Ihre Gedanken zu notieren.

Die Aneignung mathematischen Wissens erfolgt zu einem großen Teil durch Lesen entsprechender Literatur und Bearbeitung einschlägiger Übungsaufgaben. Somit sind für Ihren Erfolg zwei Kompetenzen von entscheidender Wichtigkeit: das Lesen und das eigenständige Verfassen mathematischer Texte.

Selbstverständlich ist uns bewusst, dass Sie Lesen und Schreiben bereits in der Schule gelernt haben. Dennoch: Mathematische Texte sind speziell, und es ist wichtig, dass Sie sich deren Besonderheit ausdrücklich vor Augen führen.

Wir möchten Sie für Ihre Erkundungstour gut ausrüsten und starten deshalb in Kapitel 1 mit dem Abschnitt **Lesen und Schreiben mathematischer Texte**, der praktische Hinweise zum Umgang mit mathematischen Texten enthält. In dem Abschnitt **Texterarbeitung und Übung** wird ein kurzer Beispieltext gegeben, an dem man die Hinweise testen kann. Er endet mit Erläuterungen und Übungsaufgaben zu diesem Beispieltext.

Die Kapitel 2 bis 15 sind wie folgt aufgebaut: Zunächst wird in einer Einleitung in das jeweilige Themengebiet erläutert, worum es inhaltlich geht und welchen mathematischen Fragestellungen wir uns an dieser Stelle widmen wollen. Unter der Überschrift *Lernziele* finden Sie eine Übersicht darüber, was Sie in Folge der Bearbeitung des Kapitels gelernt haben sollten.

Die Lernziele sind die Anhaltspunkte, anhand derer Sie überprüfen können, wie weit Sie die Inhalte des jeweiligen Kapitels verstanden und die entsprechenden

Fähigkeiten und Fertigkeiten zur Behandlung der auftretenden mathematischen Probleme erworben haben. (Die Einordnung dieser Ansprüche erfolgt nach der Bloom'schen Taxonomie, die im *Anhang (A)* näher erläutert wird.)

Es folgt der Abschnitt **Texterarbeitung**. Dieser startet mit einer Leseaufgabe, für die wir Ihnen einen Beispieltext zur Verfügung stellen. Es geht hierbei darum, dass Sie sich in die Inhalte einarbeiten und dabei das Lesen mathematischer Texte üben.

An dieser Stelle soll betont werden, welchen Anspruch dieses Buch nicht erhebt: Es hat nicht zum Ziel, dass Sie es linear von der ersten bis zur letzten Seite durchlesen und dabei alle nötigen Kompetenzen erwerben. Vielmehr soll es Sie zum „Blättern“ einladen. Sie dürfen also gern während Ihres Arbeitsprozesses zu den Lernzielen zurückblättern und sich fragen, welche sie bereits sicher erfüllen und welche weniger sicher. Wichtig ist Ihre aktive Beteiligung.

Am Rand der Texte sind Stellen, die vielen Studienanfängern erfahrungsgemäß Schwierigkeiten bereiten, durch Fragezeichen als *Stolpersteine* kenntlich gemacht. Ausrufezeichen kennzeichnen Passagen, die wichtige Informationen zur Klärung der Stolpersteine enthalten.

Um zu demonstrieren, wie das aktive Lesen mit Stift und Papier gestaltet sein könnte, haben wir für Sie den Umgang mit den Texten beispielhaft dokumentiert. Sie finden nach dem jeweiligem mathematischen Text unter der Überschrift *Lesen des Textes mit Papier und Stift* Notizen in verändertem Schriftsatz, in denen die Stolpersteine aufgegriffen werden.

Die vorliegenden Texte wurden im Rahmen einer Erstsemesterveranstaltung bereits von anderen Studierenden bearbeitet. Auf deren konkreten Fragen und Verständnisschwierigkeiten basieren die unter der Überschrift *Erläuterungen zum Text* gesammelten Erklärungen, die Ihnen hoffentlich weiterhelfen, falls Sie beim Lesen ins Stocken geraten. Haben Sie das Gefühl, dass Sie gut mit dem Text zurechtgekommen sind, dann widmen Sie sich den Übungsaufgaben im nachfolgenden Abschnitt **Übung und Selbstkontrolle**, um das Verständnis zu sichern und zu vertiefen. In diesem Buch finden Sie zwei Arten von Übungsaufgaben: Schnittstellenaufgaben und vertiefende Übungen.

Zunächst ein Wort zu den *Schnittstellenübungen*. Diese verdeutlichen den Bezug des Themas zur Schulmathematik. Spätestens an dieser Stelle wird die Frage, warum die Zusammenhänge, die Sie in der Schule kennengelernt haben, richtig sind, beantwortet. Nun können Sie von einer anderen Ebene auf die schulischen Inhalte blicken – genießen Sie ruhig die Aussicht.

Im Anschluss an die Schnittstellenaufgaben finden Sie die *vertiefenden Übungen*. In dieser Kategorie stehen Aufgaben, wie man sie im Mathematikstudium häufig antrifft. Sie haben einen eher abstrakten Charakter, und in der Regel lautet der Auftrag „Zeigen Sie. . .“ oder „Beweisen Sie. . .“. Wenn Sie bei den vertiefenden Übungen angelangt sind, dürfen Sie ein wenig Luft holen – Sie haben bereits viel erreicht und benötigen nun nochmals etwas Atem.

Sie werden bemerken, dass viele der Aufgaben paarweise zusammengehören. Diese Anordnung bietet Ihnen die Möglichkeit, ausgehend von einer Aufgabe, die Sie bereits kennen und deren Lösung Sie eventuell bereits selbst gefunden oder kurz nachgeschlagen haben, eine ähnliche Aufgabe eigenständig zu bearbeiten und Ihr Verständnis zu sichern.

An diese Stelle gehört ein Wort der Mahnung hinsichtlich des Umgangs mit den Lösungsvorschlägen, die sie in Kapitel 16 finden. Natürlich ist uns allen klar, dass Sie von den Aufgaben, die Sie selbstständig gelöst haben, am meisten profitieren. Deshalb gilt: Nutzen Sie die Lösungen nur, wenn Sie bei einer Aufgabe nicht weiterkommen. Holen Sie sich eine Idee, doch verzichten Sie nicht auf die Chance, die entsprechende Pärchenaufgabe eigenständig zu lösen.

Ihren Lernerfolg kontrollieren Sie abschließend durch die Beantwortung der *Kontrollfragen* am Ende des Abschnitts. Nun sollten Sie die Lernziele, die am Anfang des Kapitels stehen, erreicht haben.

In Kapitel 2 bis 9 werden viele neue Begriffe eingeführt. Wir haben in diesen Kapiteln am Ende jeweils noch einen Abschnitt mit **weiteren Beispielen** eingefügt, die diese Begriffe zusätzlich illustrieren.

Wenn Sie dieses Buch richtig einsetzen, können Sie Kenntnisse und Kompetenzen erwerben, die von großem Wert für Ihr weiteres Studium sind: Sie lernen den Umgang mit mathematischen Texten und Übungsaufgaben; Sie lernen eigenständig zu arbeiten; Sie lernen Ihren Leistungsstand realistisch einzuschätzen. Sie bekommen einen Eindruck davon, was es heißt, „mathematisch zu denken“, und verstehen den Aufbau des Zahlensystems bis hin zu den reellen Zahlen.

Wir hoffen, Ihnen eine spannende Entdeckungstour anbieten zu können. Wir versprechen keinen leichten, aber einen lohnenden Weg. Mathematik lernt man nur, indem man selbst tätig wird. Das ist vergleichbar mit dem Erlernen des Spielens eines Musikinstruments – vom Zuschauen allein erlangt man die Fertigkeiten zum Musizieren nicht.

Gewidmet
Hermann Anglhuber
für seinen Mathematikunterricht

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
Gebrauchsanleitung für Studierende	vii
I Bausteine mathematischen Denkens	1
1 Erste Schritte	5
1.1 Lesen und Schreiben mathematischer Texte	5
1.2 Texterarbeitung und Übung	10
2 Teilbarkeit	15
2.1 Texterarbeitung	16
2.2 Übung und Selbstkontrolle	27
2.3 Weitere Beispiele	33
3 Mengen, Relationen, Funktionen	45
3.1 Texterarbeitung	47
3.2 Übung und Selbstkontrolle	61
3.3 Weitere Beispiele	78
4 Größter gemeinsamer Teiler	83
4.1 Texterarbeitung	84
4.2 Übung und Selbstkontrolle	93
4.3 Weitere Beispiele	96
5 Aussagenlogik und Widerspruchsbeweise	101
5.1 Texterarbeitung	102
5.2 Übung und Selbstkontrolle	110
5.3 Weitere Beispiele	115
6 Vollständige Induktion	119
6.1 Texterarbeitung	120
6.2 Übung und Selbstkontrolle	129
6.3 Weitere Beispiele	133
7 Abelsche Gruppen	137
7.1 Texterarbeitung	138
7.2 Übung und Selbstkontrolle	143
7.3 Weitere Beispiele	150
8 Kommutative Ringe und Körper	153
8.1 Texterarbeitung	154
8.2 Übung und Selbstkontrolle	159
8.3 Weitere Beispiele	163
II Die Konstruktion der reellen Zahlen	167
9 Vollständige geordnete Körper	171

9.1	Texterarbeitung	172
9.2	Übung und Selbstkontrolle	182
9.3	Weitere Beispiele	192
10	Natürliche Zahlen	199
10.1	Texterarbeitung	200
10.2	Übung und Selbstkontrolle	208
11	Addition und Multiplikation auf den natürlichen Zahlen	211
11.1	Texterarbeitung	213
11.2	Übung und Selbstkontrolle	218
12	Von den natürlichen zu den ganzen Zahlen	225
12.1	Texterarbeitung	226
12.2	Übung und Selbstkontrolle	233
13	Von den ganzen zu den rationalen Zahlen	237
13.1	Texterarbeitung	238
13.2	Übung und Selbstkontrolle	244
14	Von den rationalen zu den reellen Zahlen	247
14.1	Texterarbeitung	249
14.2	Übung und Selbstkontrolle	261
15	Die Vollständigkeit der reellen Zahlen	265
15.1	Texterarbeitung	266
15.2	Übung und Selbstkontrolle	272
16	Lösungsvorschläge für die Übungsaufgaben	275
16.1	Erste Schritte	275
16.2	Teilbarkeit	276
16.3	Mengen, Relationen, Funktionen	286
16.4	Größter gemeinsamer Teiler	312
16.5	Aussagenlogik und Widerspruchsbeweise	316
16.6	Vollständige Induktion	322
16.7	Abelsche Gruppen	330
16.8	Kommutative Ringe und Körper	339
16.9	Vollständig angeordnete Körper	344
16.10	Natürliche Zahlen	359
16.11	Addition und Multiplikation auf den natürlichen Zahlen	361
16.12	Von den natürlichen zu den ganzen Zahlen	367
16.13	Von den ganzen zu den rationalen Zahlen	370
16.14	Von den rationalen zu den reellen Zahlen	374
16.15	Die Vollständigkeit der reellen Zahlen	377
16.16	Lösungen zu den Kontrollfragen	380
A	Bloom'sche Taxonomie	383

Literaturverzeichnis 385
Mathematische Symbole und Index 387