Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II

Herausgegeben von
F. Padberg, Halle, Germany
A. Büchter, Universität Duisburg-Essen, Fakultät für Mathematik, Essen, Germany

Die Reihe „Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II“ (MPS I+II) ist führende Reihe im Bereich „Mathematik und Didaktik der Mathematik“. Sie ist schon lange auf dem Markt und mit aktuell über 40 Bänden breit aufgestellt. Zielgruppen sind Lehrende und Studierende an Universitäten und Pädagogischen Hochschulen sowie Lehrkräfte, die nach neuen Ideen für ihren täglichen Unterricht suchen. Die Reihe MPS I+II enthält eine größere Anzahl weit verbreiteter und bekannter Klassiker sowohl bei den speziell für die Lehrerausbildung konzipierten Mathematikwerken für Studierende aller Schulstufen als auch bei den Werken zur Didaktik der Mathematik für die Primarstufe (einschließlich der frühen mathematischen Bildung), der Sekundarstufe I und der Sekundarstufe II. Die schon langjährige Position als Marktführer wird durch in regelmäßigen Abständen erscheinende, gründlich überarbeitete Neuauflagen ständig neu erarbeitet und ausgebaut. Ferner wird durch die Einbindung jüngerer Koautorinnen und Koautoren bei schon lange laufenden Titeln gleichermaßen für Kontinuität und Aktualität der Reihe gesorgt. Die Reihe wächst seit Jahren dynamisch und behält dabei die sich ständig verändernden Anforderungen an den Mathematikunterricht und die Lehrerausbildung im Auge.

Friedhelm Padberg · Andreas Büchter

Einführung Mathematik Primarstufe – Arithmetik

2. Auflage

Springer Spektrum

Friedhelm Padberg
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
Bielefeld, Deutschland

Andreas Büchter
Fakultät für Mathematik
Universität Duisburg-Essen
Essen, Deutschland

ISBN 978-3-662-43448-2
ISBN 978-3-662-43449-9 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-43449-9

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum
Die erste Auflage erschien unter dem Titel ″Einführung in die Mathematik I. Arithmetik″.

Planung und Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch, Martina Mechler
Redaktion: Alexander Reischert, Redaktion ALUAN

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
www.springer-spektrum.de

Vorwort

Zielsetzungen dieses Bandes

„Mathematisches Abiturwissen sichert nicht die besondere fachliche Kompetenz, die im Grundschullehramt erforderlich ist. Grundlegende fachwissenschaftliche Prinzipien und Strukturen der **Elementarmathematik von einem übergeordneten Standpunkt** aus zu durchdringen, ist Voraussetzung für die Gestaltung von *erfolgreichem Mathematikunterricht*" (Aufruf von DMV, GAMM, GDM, KMathF und MNU[1] vom Januar 2012: *Mathematik in der Grundschule – Chaos in der Lehrerausbildung*). „Die derzeitige Lehrerausbildung in Deutschland für das Lehramt in der Grundschule zeigt jedoch ein **sehr heterogenes Bild**, das nur in Teilen diesem Anspruch genügt" (a. a. O., S. 2; Hervorhebungen durch die Autoren).

Der vorstehende Aufruf gab uns den (letzten) Anstoß, einen Band zu den **fachlichen Grundlagen der Arithmetik in der Grundschule** entsprechend den hier genannten – und auch von uns vertretenen – Zielsetzungen zu konzipieren und zu realisieren. Hierbei konnten wir auf *Vorarbeiten* eines der beiden Autoren zurückgreifen (vgl. F. Padberg: Einführung in die Mathematik I – Arithmetik, Heidelberg 1997/2007).

Parallel zur Arithmetik initiierten wir für unsere Reihe *Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II* einen entsprechenden *fachlichen* Band zur *Geometrie in der Grundschule*, um so über Materialien für fachliche Einführungskurse zur Arithmetik *und* Geometrie unter einheitlichen Zielsetzungen zu verfügen.

Verzahnung mit der Didaktik der Arithmetik

Ein wichtiges Anliegen unseres Bandes ist es, die mathematischen Inhalte nicht zu theorielastig, sondern **möglichst praxisnah** darzustellen. Die Verwendung **beispielgebundener Beweisstrategien** beim Beweis verschiedener Sätze, die später in ähnlicher Form auch im eigenen Unterricht verwendet werden können, ist beispielsweise ein hierfür von uns

[1] Die Kürzel bedeuten: DMV: Deutsche Mathematiker Vereinigung, GAMM: Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik, GDM: Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, KMathF: Konferenz der Mathematischen Fachbereiche, MNU: Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts.

gewähltes Mittel. Ein weiterer (wichtiger) Punkt ist die **Verzahnung** mathematischer und mathematikdidaktischer Fragestellungen an allen hierzu geeigneten Stellen. Naheliegenderweise stützen wir uns hierbei auf den Band F. Padberg/C. Benz: Didaktik der Arithmetik für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung, Heidelberg 2011 (4. erweiterte, stark überarbeitete Auflage). Durch die *Praxisnähe* und durch die *Verzahnung* mathematischer und mathematikdidaktischer Inhalte hoffen wir, Lehramtsstudierenden für das Lehramt Grundschule den Zugang zur Arithmetik zu *erleichtern* und sie so stärker für diese Thematik zu *motivieren*.

Aufbau dieses Bandes

- Unsere *Abfolge der Themen* in diesem Band orientiert sich bewusst *nicht rein* an der Fachsystematik. So fundieren wir *nicht* zuerst die natürlichen Zahlen als Kardinalzahlen oder Ordinalzahlen. Vielmehr knüpfen wir zunächst unhinterfragt bei den Vorerfahrungen der Studierenden an und beginnen in einem *Schnupperkurs* mit der Analyse verblüffender Summendarstellungen und dem Geheimnis der vertauschten Ziffern.
- Wir beschäftigen uns mit unserer *heutigen Zahlschrift* und vergleichen sie mit der römischen. Wir gehen hier auch auf das von den Babyloniern verwandte Sexagesimalsystem ein.
- Bei den *schriftlichen Rechenverfahren* zeigt unsere Erfahrung, dass die Kenntnis dieser Verfahren meist nur rein formal den *Kalkül* betrifft (und selbst dieser heute im Taschenrechner- und Computerzeitalter auch längst nicht mehr allen Studierenden vertraut ist!) und nicht inhaltlich ihre *Begründung*.
- Zusätzlich thematisieren wir die schriftlichen Rechenverfahren auch in *nichtdezimalen* Stellenwertsystemen, um die Studierenden so u. a. besser in die Situation ihrer zukünftigen Schülerinnen und Schüler zu versetzen.
- Wir benutzen die natürlichen Zahlen ebenso unhinterfragt bei der Untersuchung von Elementen der *Teilbarkeitslehre/Zahlentheorie* in den folgenden Kapiteln.
- Bewusst erst gegen Ende dieses Bandes – nach den entsprechenden Vorarbeiten – stellen wir uns den schwierigen Fragen: *Was sind eigentlich die – von uns schon so lange benutzten – natürlichen Zahlen? Wie können wir das Rechnen mit ihnen und die Rechengesetze begründen?* Wir geben hierauf im Sinne des *Kardinalzahlmodells* eine ausführliche Antwort, da sich dieses Modell besonders gut für eine anschauliche Fundierung der *Rechenoperationen* mit natürlichen Zahlen eignet.
- Auf die ebenfalls mögliche Antwort im Sinne des *Ordinalzahlmodells* (Peano-Axiome) gehen wir im neunten Kapitel knapp ein. Dieses Modell spielt eine wichtige Rolle (auch als didaktischer Hintergrund) beim *Zählen* und *Erwerb des Zahlbegriffs*.
- Der Band endet mit einem *Ausblick* auf die zu Beginn der Sekundarstufe I folgenden *Bruchzahlen*, *ganzen Zahlen* und *rationalen Zahlen* sowie auf einen *Folgeband* zur *Vertiefung* dieser Einführung in die Arithmetik (F. Padberg/A. Büchter: Vertiefung Mathematik Primarstufe – Arithmetik/Zahlentheorie; Erscheinungstermin: 2015).

Aufbau dieses Bandes – en détail

- Der **Schnupperkurs** im *ersten* Kapitel soll durch anregende Problemstellungen das *Interesse* für die Arithmetik *wecken* und zugleich *motivieren*, sich hiermit *tiefer gehend* zu beschäftigen.
- Im **zweiten Kapitel** dieses Bandes stellen wir zu Beginn die umfassende Frage *Was sind Zahlen?* und analysieren in diesem Kapitel zunächst unsere Zahlschrift. Hierzu vergleichen wir – nach einem kurzen geschichtlichen Abriss – unser vertrautes *dezimales Stellenwertsystem* mit der völlig anders aufgebauten römischen Zahlschrift. Wir thematisieren hier auch das Sexagesimalsystem der Babylonier. Unter anderem hierdurch motiviert, gehen wir auf die Frage ein, ob die Basis 10 für unsere sehr effiziente Zahlschrift zwingend notwendig ist oder ob sie nur *eine* unter vielen verschiedenen, gleichwertigen Möglichkeiten darstellt.
- Die *schriftlichen Rechenverfahren* erarbeiten wir im **dritten Kapitel** zunächst sorgfältig im dezimalen Stellenwertsystem und betrachten anschließend jeweils parallel die Zahlschrift und die schriftlichen Rechenverfahren exemplarisch in nichtdezimalen Stellenwertsystemen. Wir halten diese Behandlung auch *nichtdezimaler* Stellenwertsysteme in einem Einführungsband für Primarstufenstudierende aus *vielen Gründen* für ausgesprochen sinnvoll. Auf die entsprechenden Argumente gehen wir in diesem Kapitel an verschiedenen Stellen ein. Wir beenden es mit einigen *Alternativen* zu den vertrauten schriftlichen Rechenverfahren (Computersubtraktion, Gittermethode, Nepersche Streifen).
- Im **vierten Kapitel** – und auch in den beiden folgenden – untersuchen wir die natürlichen Zahlen unter dem Blickwinkel der *elementaren Teilbarkeitslehre*. Wir führen zunächst die *Teilbarkeits- und Vielfachenrelation* anschaulich ein und lernen anschließend *einige einfache Aussagen* (Summen-, Differenz-, Produktregel) über sie kennen. Wir beweisen diese Aussagen auf drei *unterschiedlichen Begründungsniveaus*. Hierbei sind gerade unter dem Gesichtspunkt der späteren *Berufspraxis* die beiden ersten Begründungsniveaus (beispielgebundene Beweisstrategie auf der ikonischen Ebene bzw. auf der Zahlenebene) für zukünftige Grundschullehrkräfte besonders wichtig. Wir zeigen aber auch konkret auf, dass das Begründungsniveau eines Beweises mit Variablenbenutzung insbesondere mit der beispielgebundenen Beweisstrategie auf der Zahlenebene eng zusammenhängt und dass diese formale Beweisebene durch eine *Verzahnung* mit anderen Begründungsniveaus *leichter* verstanden werden kann. Anschließend gehen wir auf *weitere* Eigenschaften der Teilbarkeitsrelation sowie auf ihre *Veranschaulichung* durch Pfeildiagramme ein. Die bis zu dieser Stelle besprochenen Sätze (mit Ausnahme von Satz 1.3 und 1.4 im Schnupperkurs) sind alle von der Struktur „Aus … folgt“. Wir thematisieren daher zum Abschluss dieses Kapitels auf einem ersten – recht anschaulichen – Niveau den *Folgerungsbegriff* und die Frage der *Umkehrbarkeit von Sätzen* und enden mit einer Analyse einiger bislang naiv benutzter *Verknüpfungen von Aussagen*.

- Wie wir im vierten Kapitel erfahren haben, können wir Teilbarkeitsuntersuchungen mit Hilfe der Summen-, Differenz- oder Produktregel oft stark vereinfachen. Eine weitere, oft noch viel stärkere Vereinfachung erreichen wir durch die sogenannten *Teilbarkeitsregeln*, auf die wir im **fünften Kapitel** genauer eingehen. Wir beginnen mit den besonders einfachen *Endstellenregeln*, bei denen allein schon anhand der Endstelle oder der letzten zwei bzw. drei Endstellen die Frage der Teilbarkeit entschieden werden kann. Anschließend beweisen wir mit einer beispielgebundenen Beweisstrategie auf der Zahlenebene und parallel auch enaktiv bzw. ikonisch mit Hilfe von Stellentafeln die Teilbarkeitsregel für die Zahl Neun als Beispiel einer *Quersummenregel*. Nach der Behandlung *weiterer Teilbarkeitsregeln* z. B. zu den Zahlen Sieben und Elf mit Hilfe eines originellen und überraschenden Beweisansatzes gehen wir anschließend auf die Frage ein, ob die vertrauten Teilbarkeitsregeln beispielsweise für zwei oder drei unverändert auch in *nichtdezimalen Stellenwertsystemen* gültig bleiben. Wir greifen zum Ende dieses Kapitels die – mehr anschaulichen – Bemerkungen zum *Beweisen von Sätzen* aus dem vierten Kapitel nochmals auf und vertiefen sie. In diesem Zusammenhang lernen wir auch zwei *weitere Verknüpfungen von Aussagen* kennen.
- Das **sechste Kapitel** dient in weiten Teilen zur Vorbereitung der Einführung der natürlichen Zahlen als Kardinalzahlen im achten Kapitel. So führen wir hier anhand von *Teiler- und Vielfachenmengen* die wichtigsten *Mengenoperationen* und Beziehungen zwischen Mengen ein, und gehen auch knapp auf den Begriff der Menge ein. Wichtige *Gesetzmäßigkeiten bei den Mengenoperationen* können wir gut durch Venn-Diagramme veranschaulichen und u. a. durch Rückgriff auf die im fünften Kapitel im Zusammenhang mit den Teilbarkeitsregeln thematisierten Junktoren beweisen, wie wir exemplarisch aufzeigen. Das sechste Kapitel endet mit dem *Euklidischen Algorithmus*, mit dessen Hilfe wir den größten gemeinsamen Teiler (*ggT*) gegebener Zahlen oft besonders vorteilhaft und elegant bestimmen können.
- Das **siebte Kapitel** hat eine *doppelte* Zielsetzung: *Einerseits* werden hier *rückblickend* einige bisher in diesem Band schon angesprochene Begriffe und Eigenschaften (Relation, Transitivität, Reflexivität, Identitivität u. a.) in einen breiteren Kontext gestellt und damit vertieft. *Andererseits* werden hier – ähnlich wie im vorigen Kapitel – zentrale Begriffe und Sätze für die im nächsten Kapitel erfolgende Einführung der natürlichen Zahlen als Kardinalzahlen bereitgestellt. So benötigen wir für diese Einführung den Begriff der *Äquivalenzrelation* und die Kenntnis der Aussage, dass hierdurch stets eine *Klasseneinteilung* bewirkt wird. Wir benötigen aber auch eine gründliche Kenntnis des Begriffs der *Abbildung* bzw. *Funktion*. Diese zweifache Zielsetzung (vertiefender Rückblick bzw. Vorarbeiten für das nächste Kapitel) bestimmt insgesamt die *Auswahl* der Inhalte für dieses Kapitel aus dem breiten Themenbereich Relationen und Funktionen.
- Wir haben uns in diesem Band schon intensiv unter verschiedenen Gesichtspunkten mit den natürlichen Zahlen beschäftigt. Im **achten Kapitel** stellen wir zunächst die Frage: *Was ist eigentlich eine natürliche Zahl?* Die Antwort hierauf gestattet es uns, das (nichtschriftliche) Rechnen mit natürlichen Zahlen und die Kleinerrelation dort

auf „feste Füße" zu stellen. Wir stellen diese Frage differenziert und gründlich erst an dieser Stelle und nicht schon im zweiten Kapitel, da die Antwort hierauf nicht ganz einfach ist und wir in diesem Zusammenhang auf verschiedene Begriffsbildungen und Sätze aus den *vorhergehenden* Kapiteln zurückgreifen.
Wir fundieren die natürlichen Zahlen in diesem Kapitel ausführlich und gründlich als *Kardinalzahlen*, da sich dieser Zahlaspekt besonders gut für eine *anschauliche* Fundierung *der Rechenoperationen* eignet. Auf eine Fundierung der natürlichen Zahlen als *Ordinalzahlen* gehen wir im neunten Kapitel knapp ein. Dieser Zahlaspekt spielt beim *Zählen* und *Erwerb des Zahlbegriffs* eine wichtige Rolle.

- Die **Addition** führen wir durch Rückgriff auf die Mengenvereinigung an einfachen Beispielen ein. Die Eigenschaften der Addition wie das Kommutativ- und das Assoziativgesetz beweisen wir *einerseits* durch Rückgriff auf entsprechende, im sechsten Kapitel behandelte *Gesetze der Mengenalgebra, andererseits* durch – direkt in den Unterricht der Grundschule übertragbare – *beispielgebundene Beweisstrategien*. Diese zweite Form des Beweisens ist gerade für zukünftige Grundschullehrkräfte besonders sinnvoll.
- Die **Subtraktion** behandeln wir durch Rückgriff auf die Differenzmengenbildung.
- Die **Multiplikation** führen wir über die *Mengenvereinigung/Wiederholte Addition* sowie über das *Kreuzprodukt* ein. Hierbei bietet der Weg über das Kreuzprodukt unter rein *mathematischen* Gesichtspunkten Vorteile, während der Weg über die Mengenvereinigung/Wiederholte Addition es gestattet, viele Aussagen mit Hilfe *beispielgebundener Beweisstrategien* zu begründen, die so fast schon direkt in den Unterricht der Grundschule übertragen werden können. Dieser Weg ist daher der Haupteinführungsweg.
- An die **Division** führen wir – ganz entsprechend der Praxis in der Grundschule – *zunächst* eigenständig und anwendungsnah im Sinne des *Aufteilens* und *Verteilens* heran und definieren die Division *abschließend* als *Umkehroperation* der Multiplikation. Dieser Zugangsweg bietet *insgesamt* den Vorteil, dass die Division mit anschaulichen Vorstellungen verbunden wird.
- Im letzten Abschnitt dieses Kapitels skizzieren wir *zunächst* die Einführung der **Kleinerrelation** durch einen Vergleich von Mengen mittels der *paarweisen Zuordnung und der Teilmengenbeziehung* und führen sie *anschließend* durch Rückgriff auf die schon zur Verfügung stehende *Addition* ein, da wir *so* viele Sätze *besonders einfach* beweisen können.

• Im **neunten Kapitel** thematisieren wir relativ knapp die *Einführung der natürlichen Zahlen als Ordinalzahlen*. Wir beschreiben zunächst die für Ordinalzahlen im Sinne von *Zählzahlen* notwendigen *Anforderungen*. Dies führt fast unmittelbar zu den *Peano-Axiomen*. Das dort enthaltene Beweisprinzip der *vollständigen Induktion* leuchtet zwar anschaulich unmittelbar ein, ist allerdings im konkreten Beweisfall oft technisch anspruchsvoll. Anschließend skizzieren wir, wie auf dieser Grundlage die *vier Rechenoperationen* und die *Kleinerrelation* eingeführt werden können.

- In diesem Band steht die intensive Beschäftigung mit den natürlichen Zahlen als Zahlen, mit denen man zählen und rechnen und so insbesondere Anzahlen bestimmen kann, im Vordergrund. Im **zehnten Kapitel** untersuchen wir die vier sogenannten „kombinatorischen Grundaufgaben". Die Kombinatorik kann als Kunst des systematischen oder geschickten Zählens – oder genau genommen als Kunst des Zählens (im Sinne von „Anzahlen bestimmen"), ohne zu zählen – verstanden werden. In elementarster Form tritt Kombinatorik bereits im Mathematikunterricht der Grundschule auf. Als fachlichen Hintergrund hierfür entwickeln wir Formeln zur Bearbeitung der kombinatorischen Grundaufgaben, wobei wir jeweils von anschaulichen Fragestellungen ausgehen.
- Im **elften und letzten Kapitel „Ausblick"** beschäftigen wir uns unter einigen ausgesuchten Fragestellungen mit den zu Beginn der Sekundarstufe I auf die natürlichen Zahlen folgenden *Bruchzahlen* und *ganzen Zahlen* sowie *rationalen Zahlen*. Mit einem kurzen Ausblick auf eine mögliche *vertiefte Weiterführung* des Themas *Arithmetik/Zahlentheorie* im Sinne einer Curriculumspirale endet dieses Kapitel.

Für die professionelle Erstellung weiter Teile dieses Bandes bedanken wir uns herzlich bei Frau Anita Kollwitz.

Bielefeld/Essen, Mai 2014

Friedhelm Padberg
Andreas Büchter

Inhaltsverzeichnis