

DIE GRUNDLEHREN DER  
MATHEMATISCHEN  
WISSENSCHAFTEN

IN EINZELDARSTELLUNGEN MIT BESONDERER  
BERÜCKSICHTIGUNG DER ANWENDUNGSGEBIETE

GEMEINSAM MIT

W. BLASCHKE  
HAMBURG

M. BORN  
GÖTTINGEN

C. RUNGE  
GÖTTINGEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. COURANT  
GÖTTINGEN

BAND I

VORLESUNGEN ÜBER  
DIFFERENTIALGEOMETRIE I  
VON  
WILHELM BLASCHKE

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH  
1924

VORLESUNGEN ÜBER  
D I F F E R E N T I A L -  
G E O M E T R I E

UND GEOMETRISCHE GRUNDLAGEN VON  
EINSTEINS RELATIVITÄTSTHEORIE

VON

WILHELM BLASCHKE

PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER  
UNIVERSITÄT HAMBURG

I

ELEMENTARE DIFFERENTIALGEOMETRIE

ZWEITE VERBESSERTE AUFLAGE

MIT EINEM ANHANG VON

KURT REIDEMEISTER

PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER  
UNIVERSITÄT WIEN

MIT 40 TEXTFIGUREN

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH  
1924

ISBN 978-3-662-42667-8      ISBN 978-3-662-42944-0 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-662-42944-0

**ALLE RECHTE, INSBESONDERE DAS DER ÜBERSETZUNG  
IN FREMDE SPRACHEN, VORBEHALTEN.  
Copyright 1924 by Springer-Verlag Berlin Heidelberg  
Ursprünglich erschienen bei Julius Springer in Berlin 1924.  
Softcover reprint of the hardcover 2nd edition 1924**

MEINEM VEREHRTEN LEHRER  
E. STUDY

## Vorwort zur zweiten Auflage.

Dieses Lehrbuch soll vier Bändchen umfassen. Das erste bringt eine knappe Einführung in die „*elementare*“, das heißt bewegungs-invariante Differentialgeometrie, das zweite, bereits erschienene, eine Darstellung neuerer Untersuchungen über *affine* Differentialgeometrie. Das dritte wird der konformen und verwandten *Kugelgeometrien* gewidmet sein. Das letzte endlich soll die *mehrdimensionale* Geometrie mit der allgemeinen Maßbestimmung *Riemanns* und damit die geometrischen Grundlagen einerseits für *Einsteins* Gravitationstheorie und andererseits für die Untersuchungen der Dynamik bringen, die die Quantentheorie benötigt.

Die Differentialgeometrie untersucht die Eigenschaften der krummen Linien und Flächen im unendlich Kleinen. Die verschiedenen Wendungen des Begriffs „Krümmung“ stehen dabei im Vordergrund, so daß man auch von „Krümmungstheorie“ spricht. Im Gegensatz dazu betrachtet man in der algebraischen Geometrie die geometrischen Gebilde von vornherein in ihrer Gesamterstreckung. Indessen verzichtet auch die Differentialgeometrie durchaus nicht auf das Studium der geometrischen Figuren im ganzen und die Fragen der „Differentialgeometrie im großen“, die die mikroskopischen mit den makroskopischen Eigenschaften verknüpfen, gehören zu den reizvollsten, allerdings auch zu den schwierigsten Fragen unsrer Wissenschaft.

Die Krümmungstheorie erscheint, wenn man erst die Fesseln der Dimensionenzahl Drei und der Maßbestimmung *Euklids* zerrissen hat, von hohem Standpunkt aus gesehen, nicht mehr bloß als ein eng begrenztes Teilgebiet der Mathematik, sondern sie umfaßt einen erheblichen Teil der theoretischen Physik. Aus diesem weiten Gebiet soll in diesem Buch, das aus Vorlesungen in Tübingen und Hamburg entstanden ist, ein Ausschnitt geboten werden, der nicht allein im Werdegang der Anwendungen der Analysis auf die Geometrie, sondern auch in Geschmack- und Arbeitsrichtung des Verfassers begründet ist.

Als Leitstern möge uns *F. Kleins* Erlanger Programm dienen. Ferner sollen besonders die Beziehungen zur Variationsrechnung gepflegt werden.

Als ich 1908 nach Bonn kam, hat mich *E. Study* trotz einer schweren Erkrankung seines persönlichen Unterrichts gewürdigt und mir die kritischen Untersuchungen zur Differentialgeometrie vorgetragen, an denen er damals arbeitete. In dankbarem Gedenken an die schönen Bonner Tage sei Herrn *Study* dieses Bändchen gewidmet.

Bei der Herausgabe haben mich zahlreiche Fachgenossen unterstützt, und zwar bei der zweiten Auflage insbesondere die Herren *Artin* und *Berwald*.

Die neue Auflage bringt zunächst eine Reihe von Verbesserungen und Zusätzen. Die Angaben über das Leben von *Monge* und *Gauß* habe ich, da sie von einem Kritiker mit besonderm Lob, von einem andern mit besonderm Tadel bedacht wurden, unverändert stehen gelassen. Die wesentlichste Neuerung bringt der Anhang. In § 86 der alten wie der neuen Auflage habe ich eine Aufgabe gestellt, die mir besonders anziehend erscheint. Gehen auf einer Kugelfläche von einer beliebigen Stelle zwei Wandrer in beliebigen Richtungen gleich schnell und geradewegs fort, so begegnen sie sich stets an einer zweiten Stelle der Kugel. Es fragt sich: Ist die Kugelfläche die einzigen Bewohner mit Sicherheit auf ein solches Wiedersehen rechnen können? Ich freue mich im Anhang jetzt die Antwort bringen zu können, die Herr *Reidemeister* nach Überwindung mancher Hindernisse kürzlich gefunden hat.

Mathematisches Seminar, Hamburg im Januar 1924.

# Inhaltsverzeichnis.

Für ein erstes Studium genügt die Kenntnis der Kapitel 1, 3 und 4. Die Abschnitte dieser Kapitel, die übergangen werden können, sind durch Sternchen gekennzeichnet.

## 1. Kapitel.

### Kurventheorie.

	Seite
§ 1. Bogenlänge . . . . .	1
§ 2. Tangente . . . . .	3
§ 3. Schmiegeebene . . . . .	4
§ 4.* Ein Mittelwertsatz von <i>H. A. Schwarz</i> und <i>T. J. Stieltjes</i> . . . . .	7
§ 5. Krümmung und Windung . . . . .	9
§ 6. Formeln von <i>Frenet</i> . . . . .	11
§ 7. Über das Vorzeichen der Windung . . . . .	13
§ 8.* Kinematische Deutung von <i>Frenets</i> Formeln . . . . .	14
§ 9. Ebene Kurven, Vierscheitelsatz . . . . .	15
§ 10. Krümmungsmittelpunkt . . . . .	17
§ 11. Schmiegekugel . . . . .	18
§ 12. <i>Bertrandkurven</i> . . . . .	19
§ 13. Natürliche Gleichungen . . . . .	20
§ 14. Hilfssatz über lineare Differentialgleichungen . . . . .	23
§ 15. Böschungslinien . . . . .	23
§ 16. Böschungslinien auf einer Kugel . . . . .	25
§ 17. Böschungslinien auf einem Drehparaboloid . . . . .	26
§ 18. Evoluten, Evolventen . . . . .	26
§ 19. Isotrope Kurven . . . . .	28
§ 20. Integrallose Darstellung der isotropen Kurven . . . . .	30
§ 21. Aufgaben und Lehrsätze . . . . .	30

## 2. Kapitel.

### Extreme bei Kurven.

§ 22. Die erste Variation der Bogenlänge . . . . .	35
§ 23. Variationsprobleme von <i>J. Radon</i> . . . . .	36
§ 24. Bestimmung der Extremalen unserer Variationsprobleme . . . . .	38
§ 25. Die Isoperimetrie des Kreises . . . . .	40
§ 26. Beweis von <i>Crone</i> und <i>Frobenius</i> . . . . .	41
§ 27. Ein Beweis von <i>A. Hurwitz</i> . . . . .	43
§ 28. Ein Hilfssatz über Kurven auf der Kugel . . . . .	45
§ 29. Sätze von <i>H. A. Schwarz</i> für Raumkurven fester Krümmung . . . . .	47
§ 30. Weitere Ungleichheiten von <i>H. A. Schwarz</i> für Kurven fester Krümmung . . . . .	49
§ 31. Bemerkungen und Aufgaben . . . . .	50

## 3. Kapitel.

## Anfangsgründe der Flächentheorie.

	Seite
<i>§</i> 32. Die erste Grundform . . . . .	54
<i>§</i> 33. Die zweite Grundform . . . . .	56
<i>§</i> 34. Sätze von <i>Meusnier</i> und <i>Euler</i> . . . . .	57
<i>§</i> 35. Die Hauptkrümmungen . . . . .	59
<i>§</i> 36. <i>Gaußens</i> Theorema egregium . . . . .	61
<i>§</i> 37. Krümmungslinien . . . . .	62
<i>§</i> 38. Nabelpunkte . . . . .	64
<i>§</i> 39. Satz von <i>Dupin</i> über Orthogonalsysteme . . . . .	64
<i>§</i> 40. Die winkeltreuen Abbildungen des Raumes . . . . .	66
<i>§</i> 41. <i>Gaußens</i> sphärisches Abbild einer Fläche . . . . .	69
<i>§</i> 42. Normalensysteme . . . . .	71
<i>§</i> 43. Asymptotenlinien . . . . .	72
<i>§</i> 44. Asymptotenlinien auf geradlinigen Flächen . . . . .	74
<i>§</i> 45. Konjugierte Netze . . . . .	75
<i>§</i> 46. Ableitungsformeln von <i>Weingarten</i> . . . . .	76
<i>§</i> 47. Satz von <i>Bellrami</i> und <i>Enneper</i> über die Windung der Asymptotenlinien . . . . .	77
<i>§</i> 48. Die Ableitungsformeln von <i>Gauß</i> . . . . .	78
<i>§</i> 49. Grundformeln von <i>Gauß</i> und <i>Codazzi</i> . . . . .	80
<i>§</i> 50. <i>G. Monge</i> . . . . .	81
<i>§</i> 51. Aufgaben und Lehrsätze . . . . .	82

## 4. Kapitel.

## Geometrie auf einer Fläche.

<i>§</i> 52. Verbiegung . . . . .	88
<i>§</i> 53. Geodätische Krümmung . . . . .	89
<i>§</i> 54. Räumliche Deutung der geodätischen Krümmung . . . . .	91
<i>§</i> 55.* Beweis von <i>Radon</i> für einen Satz von <i>Schwarz</i> . . . . .	93
<i>§</i> 56. Geodätische Linien . . . . .	94
<i>§</i> 57. Geodätische Polarkoordinaten . . . . .	96
<i>§</i> 58. Noch einmal <i>Gaußens</i> Theorema egregium . . . . .	97
<i>§</i> 59. Zwei verschiedene Erklärungen der geodätischen Kreise . . . . .	100
<i>§</i> 60. Flächen festen Krümmungsmaßes . . . . .	101
<i>§</i> 61. Abbildung der Flächen festen negativen Krümmungsmaßes auf <i>Poincarés</i> Halbebene . . . . .	102
<i>§</i> 62. Längentreue Abbildungen einer Fläche mit $K = -1$ auf sich selbst . . . . .	104
<i>§</i> 63. Das Integral der geodätischen Krümmung . . . . .	108
<i>§</i> 64. Folgerungen aus der Integralformel von <i>Gauß</i> und <i>Bonnet</i> . . . . .	109
<i>§</i> 65. Über Hüllkurven von geodätischen Linien . . . . .	113
<i>§</i> 66. <i>Bellramis</i> erster Differentiator . . . . .	114
<i>§</i> 67. <i>Bellramis</i> zweiter Differentiator . . . . .	116
<i>§</i> 68. Formeln nach <i>Green</i> . . . . .	117
<i>§</i> 69. Allgemeine Formel für die geodätische Krümmung . . . . .	118
<i>§</i> 70.* Flächen, deren geodätische Krümmungskreise geschlossen sind . . . . .	119
<i>§</i> 71. Isotherme Parameter . . . . .	121
<i>§</i> 72. Winkeltreue Abbildung . . . . .	123
<i>§</i> 73. Die Förderung der Flächentheorie durch <i>Gauß</i> . . . . .	124
<i>§</i> 74. Aufgaben und Lehrsätze . . . . .	125



## 5. Kapitel.

## Fragen der Flächentheorie im großen.

	Seite
§ 75. Unverbiegbarkeit der Kugel . . . . .	128
§ 76. Die Kugeln als einzige Eiflächen mit fester mittlerer Krümmung .	131
§ 77. Starrheit der Eiflächen . . . . .	132
§ 78. <i>Minkowskis</i> Stützfunktion . . . . .	135
§ 79. Ein Satz <i>Christoffel</i> über geschlossene Flächen . . . . .	136
§ 80. Ein Satz von <i>Hilbert</i> über Flächen festen negativen Krümmungs- maßes . . . . .	139
§ 81. Bemerkungen über geschlossene geodätische Linien auf einer Ei- fläche nach <i>H. Poincaré</i> . . . . .	142
§ 82. <i>Erdmanns</i> Eckbedingung . . . . .	144
§ 83. Die Bedingung von <i>Jacobi</i> . . . . .	146
§ 84. Satz von <i>Bonnet</i> über den Durchmesser einer Eifläche . . . . .	149
§ 85. Das Vorhandensein kürzester Wege auf Eiflächen . . . . .	151
§ 86. Flächen, deren konjugierte Punkte festen geodätischen Abstand haben . . . . .	156
§ 87. Ein Satz <i>Carathéodorys</i> über die Hüllkurven geodätischer Linien auf Eiflächen . . . . .	160
§ 88. Aufgaben und Lehrsätze . . . . .	161

## 6. Kapitel.

## Extreme bei Flächen.

§ 89. Erste Variation der Oberfläche . . . . .	165
§ 90. Die Minimalflächen als Schiebflächen . . . . .	166
§ 91. Formeln von <i>Weierstraß</i> für Minimalflächen . . . . .	167
§ 92. Formeln von <i>Study</i> für Minimalflächen . . . . .	169
§ 93. Eine allgemeine Formel von <i>Gauß</i> für die erste Variation der Oberfläche . . . . .	171
§ 94. Eine Formel von <i>Schwarz</i> für die Oberfläche einer Minimalfläche	173
§ 95. Bestimmung einer Minimalfläche durch einen Streifen . . . . .	174
§ 96. Ein Satz von <i>T. Carleman</i> über den Kreis . . . . .	176
§ 97. Isoperimetrie der Kugel . . . . .	177
§ 98. Wirkung von <i>Steiners</i> Symmetrisierung auf die Oberfläche . . . .	179
§ 99. Konvergenzbeweis von <i>Wilhelm Groß</i> . . . . .	181
§ 100. Zweite Variation der Oberfläche . . . . .	184
§ 101. Erste Variation von $H$ und $K$ . . . . .	186
§ 102. Aufgaben und Lehrsätze . . . . .	188

## 7. Kapitel.

## Liniengeometrie.

§ 103. <i>Studys</i> Übertragungsprinzip . . . . .	191
§ 104. Geradlinige Flächen . . . . .	194
§ 105. Besondere geradlinige Flächen . . . . .	200
§ 106. Strahlensysteme . . . . .	202
§ 107. Übertragung der Integralformeln von <i>Gauß</i> und <i>Bonnet</i> auf Strahlen- systeme . . . . .	205

	Seite
§ 108. Brennflächen eines Strahlensystems . . . . .	206
§ 109. Formeln von <i>Hamilton</i> und <i>Mannheim</i> . . . . .	207
§ 110. Isotrope Strahlensysteme . . . . .	209
§ 111. Beziehungen der isotropen Strahlensysteme zu den Minimalflächen	210
§ 112. Darstellung der isotropen Strahlensysteme durch stereographische Linienkoordinaten . . . . .	214
§ 113. Weitere Formeln für stereographische Linienkoordinaten . . . . .	217
§ 114. Zusammenhang mit der Theorie der Minimalflächen von <i>Weierstraß</i>	219
§ 115. Bemerkungen und Aufgaben . . . . .	220

#### Anhang.

#### Über die Kugel.

§ 116. Ein Satz von <i>E. Study</i> . . . . .	227
§ 117. Kennzeichnung der Kugel . . . . .	230

Namen- und Stichwortverzeichnis . . . . .	234
---	-----

Anmerkungen und Formeln sind innerhalb eines jeden Kapitels durchnummeriert.