Statistische Entscheidungstheorie

Günter Bamberg, * 1940, 1960—1966 Studium der Mathematik in Saarbrücken und Bonn. 1966—1968 wissenschaftlicher Assistent am Institut für mathematische Statistik der T. H. Karlsruhe (Prof. Dr. B. Bierlein), 1968 Dr. rer. nat. (in Saarbrücken), 1968—1970 wissenschaftlicher Assistent an der Fakultät für Geistes- und Sozialwissenschaften der T. H. Karlsruhe, Sektion Ökonometrie und Operations Research (Prof. Dr. R. Henn). 1970 (Februar) Habilitation an der Universität Karlsruhe für das Fach Ökonometrie und Statistik. 1970 (Mai) Ernennung zum ord. Professor für Statistik am Wirtschafts- und Sozialwissenschaftlichen Fachbereich der Universität Augsburg.

Günter Bamberg

Statistische Entscheidungstheorie

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

Ursprünglich erschienen bei Physica-Verlag, Rudolf Liebing KG, Würzburg 1972.
Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1972

ISBN 978-3-7908-0099-9 ISBN 978-3-662-41480-4 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-41480-4

Vorwort

Rationales Entscheiden erfordert häufig Entscheidungsunterlagen, die nur von der Empirie geliefert werden können. Einige Beispiele mögen dies verdeutlichen. Zur Entscheidung über die Produktion eines neuentwickelten elektronischen Bauelements ist eine gewisse Kenntnis der mittleren Lebensdauer dieses Elements erforderlich; zur Entscheidung zwischen verschiedenen möglichen Werbemaßnahmen ist eine gewisse Kenntnis der Wirksamkeit erforderlich; zur Entscheidung über die Massenherstellung eines neuen pharmazeutischen Präparates ist eine gewisse Kenntnis der Heilungswahrscheinlichkeit erforderlich; zur Entscheidung zwischen verschiedenen konjunkturpolitischen Maßnahmen ist eine gewisse Kenntnis makroökonomischer Gesetzmäßigkeiten erforderlich, usw. Die von der Empirie zu liefernden Entscheidungsunterlagen sind hierbei die mittlere Lebensdauer des Bauelements, die Wirksamkeit der Werbemaßnahmen, die Heilungswahrscheinlichkeit des pharmazeutischen Präparates und schließlich die makroökonomischen Gesetzmäßigkeiten. Eine exakte Kenntnis dieser Größen wäre zwar ideal, ist aber in der Praxis nicht zu erzielen. Vielmehr kann aus Zeit- und Kostengründen lediglich eine „gewisse" Kenntnis mittels einer Stichprobe erzielt werden. Bei dem letzteren Beispiel wird eine exakte Kenntnis nicht nur aus Zeit- und Kostengründen, sondern auch aus prinzipiellen Gründen verhindert; man denke etwa an den bescheidenen Stichprobenumfang wirtschaftsstatistischer Zeitreihen, an ökonometrische Identifizierbarkeitsprobleme u. ä. Bei den anderen Beispielen kann der Stichprobenumfang, und damit die empirische Basis, vom Entscheidungsträger weitgehend selbst festgelegt werden. Eine derartige Festlegung stellt natürlich ebenfalls ein Entscheidungsproblem dar, das entweder aus rein subjektiven Erwägungen heraus „gelöst" werden kann oder ebenfalls die Frage nach der Rationalität aufwirft. Sobald die Entscheidung über den Stichprobenumfang getroffen ist und eine Stichprobenrealisation vorliegt, muß (ebenfalls möglichst rational) entschieden werden, welches statistische Auswertungsverfahren eingesetzt werden soll.

Das Typische der von *A. Wald* entwickelten statistischen Entscheidungstheorie besteht darin, daß diese verschiedenen Entscheidungsprobleme als interdependent aufgefaßt werden. Die statistische Entscheidungstheorie sieht die mit Fehlentscheidungen verbundenen Verluste und die Stichprobenkosten als primäre Daten an und legt mittels sog. statistischer Entscheidungsfunktionen fest, welche Stichprobe zu ziehen und welche Entscheidung aufgrund der Stichprobenrealisation zu treffen ist. Da eine statistische Entscheidungsfunktion sowohl die Informationsbeschaffung als auch die darauf basierende Entscheidungsfindung regelt und somit die zu treffende Entscheidung „automatisch“ herbeiführt, werden die eigentlichen Schwierigkeiten in die Konstruktion und in die Auswahl geeigneter statistischer Entscheidungsfunktionen verlagert. Die Diskussion dieser Schwierigkeiten sowie die Darstellung einiger Lösungsmöglichkeiten sind der Inhalt der vorliegenden Schrift.

Die statistische Entscheidungstheorie ist durch die Einbeziehung der Stichprobenkosten und der Konsequenzen von Fehlentscheidungen so flexibel, daß sie konkreten Entscheidungsproblemen weitgehend angepaßt werden kann. Allerdings erfordert sie — im Gegensatz zur traditionellen Statistik— die Angabe dieser Daten durch den Anwender.

In vielen Statistik-Lehrbüchern wird die statistische Entscheidungstheorie entweder überhaupt nicht oder nur auf den letzten Seiten erwähnt. Da ihr Bekanntheitsgrad deshalb noch relativ gering ist, wurde bei dieser Einführung versucht, unter Verzicht auf mathematische Strenge die wesentlichen Prinzipien sowie eine Reihe von Ergebnissen möglichst leichtverständlich darzustellen. Zur Lektüre dürften die Vorkenntnisse eines zweisemestrigen Kurses über Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, der z. B. an wirtschafts- und sozialwissenschaftlichen Fakultäten üblich ist, ausreichen. Vorkenntnisse in den Grundlagen der Spieltheorie sind nützlich, jedoch keine unbedingte Voraussetzung; die benötigten Begriffe werden in Paragraph 4 nochmals zusammengestellt. Zur Ergänzung der Vorkenntnisse eignen sich z. B. die in dieser Reihe erschienenen Bücher von *H. Basler* [1968] und *N. N. Vorobjoff* [1967].

Der leichteren Verständlichkeit wegen sind alle Sätze jeweils mit einer Erläuterung statt eines Beweises versehen. Der stärker mathematisch interessierte Leser sei zur Ergänzung auf die Bücher von *A. Wald* [1950], *E. L. Lehmann* [1959], *H. Witting* [1966] und *T. S. Ferguson* [1967] verwiesen. Literaturstellen werden in der Regel nur dann zitiert, wenn die jeweiligen Ergebnisse nicht in einem dieser Bücher nachzulesen sind.

Die einigen Paragraphen beigefügten Aufgaben dienen in erster Linie einem besseren Verständnis der neu eingeführten Begriffe und Ergebnisse. Infolgedessen schien es angebracht, die Aufgaben (auf Kosten der Praxisnähe) möglichst einfach zu halten. Jeder Aufgabe ist die Lösung unmittelbar angefügt.

Meinen Mitarbeitern Dipl.-Math. Dr. O. *Emrich,* Dipl.-Volkswirt *L. Knüppel,* Dipl.-Ing. *H. Paul,* Dipl.-Volkswirt Dr. *U. Schittko* und Dipl.-Math. *J. Sommer* danke ich für ihren Rat und ihre Kritik bei der Abfassung des Manuskripts. Darüber hinaus danke ich Frl. *B. Emmrich,* die mit viel Geduld und Sorgfalt das Manuskript samt Überarbeitungen geschrieben hat, sowie dem Physica-Verlag für die verständnisvolle Zusammenarbeit.

Augsburg, Dezember 1971 Günter Bamberg

Benutzte Symbole

Θ	Menge der Zustände der Umwelt (vgl. 1.1 und 5.1), hier meist ein Parameterbereich
ϑ	Element von Θ
D	Menge der in Betracht zu ziehenden Entscheidungen
d	Element von D
s	Schadensfunktion (vgl. 1.1)
$\mathfrak{X}$	Stichprobenraum
X	Stichprobenvariable; sofern nicht ausdrücklich anders vermerkt oder aus dem Kontext ersichtlich, ist $X=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, wobei die X_i unabhängige Wiederholungen einer Zufallsvariablen sind
x	Stichprobenrealisation; meist ist $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
$\bar{x}$	Stichprobenmittel $\frac{1}{n} \sum_{1}^{n} x_i$
n	Stichprobenumfang
$f(x \mid \vartheta)$	Wahrscheinlichkeitsdichte oder Wahrscheinlichkeitsfunktion über $\mathfrak{X}$, die durch ϑ festgelegt ist
W	Wahrscheinlichkeit
W_ϑ	durch ϑ festgelegte Wahrscheinlichkeit
Δ	Klasse von statistischen Verfahren
δ	Element von Δ
K	Optimalitätskriterium
$K(\delta)$	Beurteilungsgröße, die dem statistischen Verfahren δ durch K zugeordnet wird
c	Stichprobenkostenfunktion (vgl. 5.1)
r	Risikofunktion (vgl. 3.1)
φ	a priori Bewertung
ψ	a posteriori Bewertung
E_ϑ	Erwartungswert bez. der durch ϑ festgelegten Wahrscheinlichkeitsverteilung
var_ϑ	Varianz bez. der durch ϑ festgelegten Wahrscheinlichkeitsverteilung
μ	Erwartungswert einer normalverteilten Zufallsvariablen
σ^2	Varianz einer normalverteilten Zufallsvariablen
$\mathfrak{N}(\mu, \sigma^2)$	Normalverteilung mit dem Erwartungswert μ und der Varianz σ^2

$\mathfrak{B}(m, \vartheta)$	Binomialverteilung (vgl. 6.1)
T	Statistik, die entweder suffizient ist oder bez. der die Verteilung einen monotonen Likelihoodquotienten besitzt
$\varkappa$	kritischer Wert (bei Tests)
H_0, H_1	Hypothesen
Θ_0, Θ_1	Parametermengen, die H_0 bzw. H_1 entsprechen
$\mathrm{d}_0, \mathrm{d}_1$	Entscheidung für die Hypothese H_0 bzw. H_1

Daneben werden die üblichen mathematischen Symbole benutzt:

$a \in A$	a ist ein Element der Menge A
$\|a\|$	Länge des Vektors a
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}_+$	Menge der positiven reellen Zahlen
$\mathbb{R}^n$	n-dimensionaler reeller Raum
$\bigcup_i A_i$	Vereinigung der Mengen A_i
$[a, b]$	abgeschlossenes Intervall von a bis b
(a, b)	offenes Intervall von a bis b
max	Maximum
min	Minimum
sup	Supremum
inf	Infimum
exp	Exponentialfunktion

Inhalt